USTHB – Devoir N° 01 Année scolaire 2016-2017
PROF : OUATIZERGA Abdelaziz

Exercice 1 - Équation d'oscillation, conditions limites

Un oscillateur mécanique non amorti. Sa pulsation est ω = 1 rad/s. L'équation différentielle régissant le déplacement x(t) est donc $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Explicer x(t) dans les cas suivants :

1. Amplitude est A = 2 cm et $\dot{x}$ (0)=1 cm/s (*)

$$x(t) = 2cos(\omega_0 t + \phi)$$
$$\dot{x}\ (0) = -2\omega_0 \sin(\phi) = 1$$
$$sin\phi = -\frac{1}{2} \rightarrow \quad \phi = -\frac{\pi}{6}$$
$$x(t) = 2\cos(t - \frac{\pi}{6})$$

2. x(0) = −1 cm et $\dot{x}$(0) = 1 cm/s ; (*)

$$x(0) = Acos(\phi) = -1$$
$$\dot{x}\ (0) = -\mathrm{A}\omega_0 \sin(\phi) = 1$$

Différentes méthodes sont possibles par exemple on divise la 2eme équation sur la 1ere
Nous avons

$$tan(\phi) = 1, \quad d'ou \quad \phi = \frac{\pi}{4} \quad on\ remplace\ dans\ une\ des\ deux\ équations\ et\ on\ a\ A = -\sqrt{2}$$

D'où la solution s'écrit

$$x(t) = -\sqrt{2}cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}cos(\omega_0 t + \frac{3\pi}{4})$$

3. x(0) = X_0 et $\dot{x}$ (0) = V_0; (**)

$$x(0) = Acos(\phi) = x_0 \qquad (1)$$
$$\dot{x}\ (0) = \mathrm{A}\omega_0 \sin(\phi) = v_0 \quad (2)$$

Pour déterminer φ on fait comme précédemment on divise (2) / (1) membre à membre
Nous avons

$$tan(\phi) = \frac{v_0}{\omega_0 x_0} \quad donc\ \phi = Arctan\left(\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right)$$

Pour déterminer A on peut écrire les deux équations comme suit :

$$Acos(\phi) = x_0 \qquad (1)$$
$$\mathrm{A}\sin(\phi) = \frac{v_0}{\omega_0} \qquad (2)$$

Comme ça on peut calculer

$$A^2\cos^2(\phi) = x_0^2 \qquad (1)$$
$$\mathrm{A}^2\sin^2(\phi) = \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2 \qquad (2)$$

Faisant la somme membre à membre et utilisons la relation $\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$

Nous obtenons $\mathrm{A} = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$, la solution s'écrit donc

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}\cos\left(\omega_0 t + Arctan\left(\frac{v_0}{\omega_0 x_0}\right)\right)$$

4. $x(t_1) = X_1 \quad et \quad x(t_2) = X_2$ (***)

$$\begin{cases} A\cos(t_1+\phi)=x_1 \\ A\cos(t_2+\phi)=x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} A\cos(t_1)\cos(\phi)-A\sin(t_1)\sin(\phi)=x_1 \\ A\cos(t_2)\cos(\phi)-A\sin(t_2)\sin(\phi)=x_2 \end{cases}$$

Posons

$$\begin{cases} X=A\cos(\phi) \\ Y=A\sin(\phi) \end{cases} \qquad \begin{cases} X\cos(t_1)-Y\sin(t_1)=x_1 & (1) & \times\sin(t_2) \\ X\cos(t_2)-Y\sin(t_2)=x_2 & (2) & \times\sin(t_1) \end{cases}$$

nous aobtenons

$$\begin{cases} X\cos(t_1)\sin(t_2)\cancel{-Y\sin(t_1)\sin(t_2)}=x_1\sin(t_2) \\ X\cos(t_2)\sin(t_1)\cancel{-Y\sin(t_2)\sin(t_1)}=x_2\sin(t_1) \end{cases}$$

Donc, en faisant la différence

$(1)\times\sin(t_2)-(2)\times\sin(t_1)$:

$$X\cos(t_1)\sin(t_2)-X\cos(t_2)\sin(t_1)=x_1\sin(t_2)-x_2\sin(t_1) \qquad X=\frac{x_1\sin(t_2)-x_2\sin(t_1)}{\cos(t_1)\sin(t_2)-\cos(t_2)\sin(t_1)}=A\cos(\phi) \quad (3)$$

de même

$(1)\times\cos(t_2)-(2)\times\cos(t_1)$:

$$-Y\sin(t_1)\cos(t_2)+Y\sin(t_2)\cos(t_1)=x_1\cos(t_2)-x_2\cos(t_1) \qquad Y=\frac{x_1\cos(t_2)-x_2\cos(t_1)}{\sin(t_2)\cos(t_1)-\sin(t_1)\cos(t_2)}=A\sin(\phi) \quad (4)$$

$(3)^2+(4)^2$

$$A^2=X^2+Y^2 \qquad A^2=\left(\frac{x_1\sin(t_2)-x_2\sin(t_1)}{\sin(t_2-t_1)}\right)^2+\left(\frac{x_1\cos(t_2)-x_2\cos(t_1)}{\sin(t_2-t_1)}\right)^2$$

$$\boxed{A=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2-2x_1x_2\cos(t_2-t_1)}{\sin(t_2-t_1)}}}$$

(4) / (3)

$$\boxed{\tan(\phi)=\frac{Y}{X}=\frac{x_1\cos(t_2)-x_2\cos(t_1)}{x_1\sin(t_2)-x_2\sin(t_1)}, \phi=\arctan(\ldots)}$$

Sachant que : $\cos(t_1)\sin(t_2)-\cos(t_2)\sin(t_1)=\sin(t_2-t_1)$

Exercice 2 - Comparaison de deux équations

Quelles sont les solutions des équations différentielles $\ddot{x}+\omega^2x=0$, $\ddot{x}-\omega^2x=0$?

$\underline{\ddot{x}+\omega^2x=0:}$ Cette équation est de la forme ($\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=0$ $avec$ $\delta=0$ et $\omega=\omega_0$)
Eqt caractéristique : $r^2+\omega^2=0$ $\Delta=-\omega^2<0$ donc deux solutions complexes
La solution est donc de la forme $x=Ae^{-\delta}\cos(\omega_a t+\phi)$, $avec$ $\omega_a=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}=\omega_0$

D'où $x=A\cos(\omega_0 t+\phi)$ $\quad\omega_0=\sqrt{k/m}$

$\underline{\ddot{x}-\omega^2x=0:}$ Cette équation est de la forme ($\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=0$ $avec$ $\delta=0$ et $\omega=\omega_0$)
Eqt caractéristique : $r^2-\omega^2=0$ $\Delta=\omega^2>0$ deux solutions réels $r_1=-\omega_0$ et $r_2=\omega_0$

La solution est donc $x(t) = c_1 e^{r_1} + c_2 e^{r_2} = c_1 e^{-\omega_0 t} + c_2 e^{\omega_0 t}$

On remarque que bien que les deux équations sont différentes juste par un signe – leurs solutions sont très différentes dans le premier cas c'est un système oscillatoire dans le second non.

Exercice 3 - Calcul du moment d'inertie

Soit une barre homogène de faible section, de longueur L et de masse M.

1) Donner son moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire passant par son milieu.

$$J = J_G = \frac{ML^2}{12}$$

2) Calculer son moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire passant par axe distant de L/3 de l'une de ses extrémités

$$J = J_G + md^2, d = \frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \frac{L}{6}, \qquad J = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{6}\right)^2 = \frac{ML^2}{9}$$

3) Calculer son moment d'inertie par rapport à un axe perpendiculaire passant par une de ses extrémités

$$J = J_G + md^2, d = \frac{L}{2}, \qquad J = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

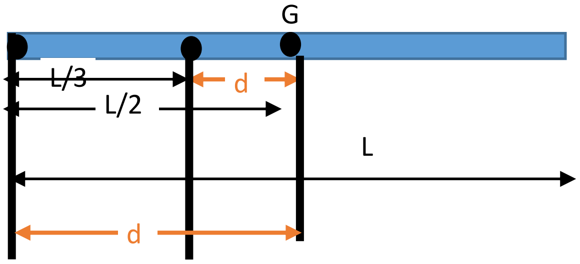
5. Ecrire dans chaque cas l'énergie cinétique de rotation

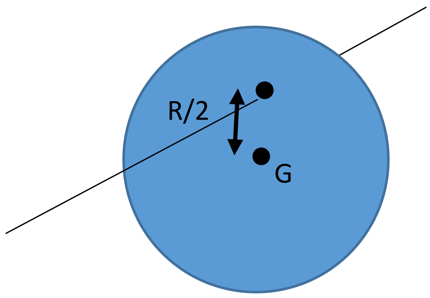
$$E_{c1} = \frac{ML^2}{24}\dot{\theta}^2 \qquad E_{c2} = \frac{ML^2}{18}\dot{\theta}^2 \qquad E_{c3} = \frac{ML^2}{6}\dot{\theta}^2$$

4) Calculer le moment d'inertie d'un disque par rapport à un axe distant de R/2 de son centre de gravité. R étant son rayon

$$J = J_G + md^2, \qquad d = \frac{R}{2}, \qquad J = \frac{MR^2}{2} + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3MR^2}{4}$$

5) Faire un schéma dans chaque cas montrant l'axe de rotation. $d = \frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \frac{L}{6}$





Exercice 4 - Mouvement de rotation

On considère une barre rigide uniforme qui pivote à une extrémité et qui est connectée symétriquement par deux ressorts à l'autre extrémité, comme le montre la figure 1; On suppose la masse de la barre égale à *m* et les ressorts au repos lorsque la barre est verticale.

(a) Etablir l'équation du mouvement des deux systèmes.

(b) comparer les deux pulsations propres des deux systèmes.

Figure 1

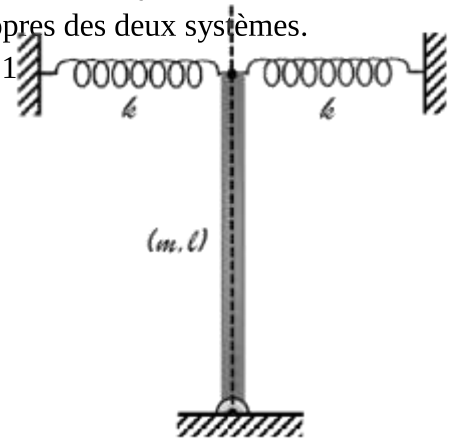
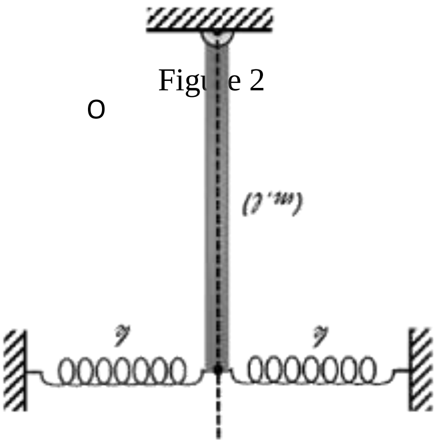


Figure 2

O



<u>Travail personnel :</u>

Comparer les mouvements

avec le système de la figure 2

O

Figure1 :

$J = \frac{ml^2}{3}$ son énergie cinétique devient $E_c = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$

L'énergie potentielle totale est donc $E_p = Ee + Eg = kl^2\theta^2 - \frac{1}{4}mgl\theta^2 + \frac{mgl}{2}$

Le Lagrangien s'écrit donc comme suit: $\mathrm{L} = \mathrm{E_c} - \mathrm{E_p} = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 - kl^2\theta^2 + \frac{1}{4}mgl\theta^2 - \frac{mgl}{2}$

Comme c'est un système libre à 1 degré de liberté l'équation $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ permet d'aboutir à l'équation de mouvement:

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \left(2kl^2 - \frac{1}{2}mgl\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{6k}{m} - \frac{3g}{2l}\right)\theta = 0 \quad (I)$$

Figure2 :

$E_c = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2$, $Ee = kl^2\theta^2$, $Eg = -mgh = \frac{mgl}{2}\left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right) = \frac{1}{4}mgl\theta^2 + \frac{mgl}{2}$ (par rapport à O)

L'énergie potentielle totale est donc $E_p = Ee + Eg = kl^2\theta^2 - \frac{1}{4}mgl\theta^2 + \frac{mgl}{2}$

Le Lagrangien s'écrit donc comme suit: $\mathrm{L} = \mathrm{E_c} - \mathrm{E_p} = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 - kl^2\theta^2 - \frac{1}{4}mgl\theta^2 + \frac{mgl}{2}$

Comme c'est un système libre à 1 degré de liberté l'équation $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ permet d'aboutir à l'équation de mouvement:

$$\frac{1}{3}ml^2\ddot{\theta} + \left(2kl^2 + \frac{1}{2}mgl\right)\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{6k}{m} - \frac{3g}{2l}\right)\theta = 0 \quad (I)$$

Comparaison :

Dans la figure 1 l'effet du ressort et du pendule sont opposé alors que dans la figure 2 s'ajoute.

La fréquence des oscillations dans le 2eme cas est plus grande.