Mouvement de rotation et translation

a) Un cylindre de masse m et de moment d'inertie **J_0** est libre de rouler sans glisser mais il est retenu par deux ressorts de constante de raideur **k1** et **k2** comme le montre la figure (a).

1. Trouver la pulsation propre de vibration ?
2. Trouver la valeur de **a** qui maximise cette pulsation ?

b) Ce cylindre est maintenant libre de pivoter autour du point **O** comme le montre la figure (b).

1. Trouver dans ce cas la pulsation propre du système ?
2. Trouver la valeur du paramètre **b** qui maximise cette pulsation ?

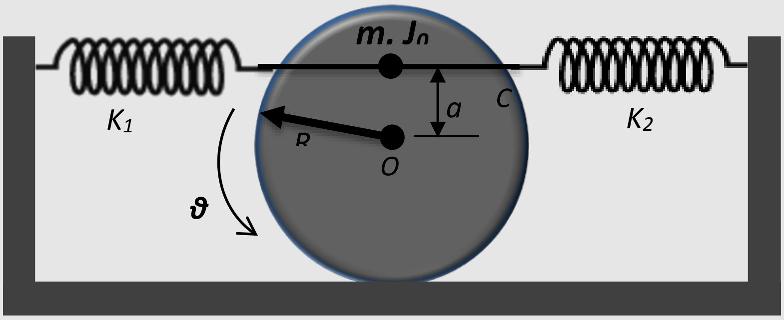

Figure (a)

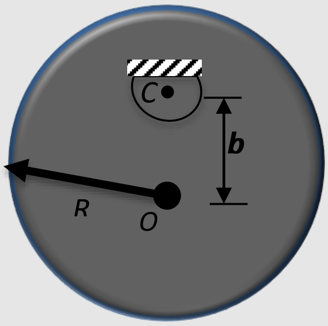

Figure (b)

Solution :

a) Déplacement + Rotation

1 - Recherche de la pulsation propre :

Le mouvement du disque est composé d'un mouvement de translation et d'un mouvement de rotation. La vitesse linéaire de translation est $v = R\dot{\theta}$ et la vitesse de rotation est $\dot{\theta}$; l'énergie cinétique s'écrit donc comme suit :

$$T = \frac{1}{2}mR\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

Lorsque le disque tourne d'un angle θ Le point C parcours en plus de la translation $(\mathrm{R}\theta)$ une distance aθ due à sa rotation autour de O.

La distance totale du parcourus par le point C $(\mathrm{R}\theta + \mathrm{a}\theta)$ est égale à l'élongation du premier ressort et est égale à la compression du deuxième.

L'énergie potentielle élastique des deux ressorts est donc :

$U = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(a + R)^2\theta^2$, le mouvement étant horizontal; l'énergie de gravitation ne joue aucun rôle dans le mouvement.

La fonction de Lagrange s'écrit alors comme suit :

$$L = \frac{1}{2}(mR^2 + J)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(k_1 + k_2)(a + R)^2\theta^2$$

On déduit l'équation de mouvement à partir de l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$(mR^2 + J)\ddot{\theta} + (k_1 + k_2)(a + R)^2\theta = 0$$

$$D'ou \ \rightarrow \ \ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad avec \qquad \omega_0^2 = \frac{(k_1 + k_2)(a + R)^2}{(mR^2 + J)}$$

$$= \frac{k_1 + k_2}{m + \frac{J}{(a+R)^2}}$$

Ou ω_0 est la pulsation propre du système avec laquelle il oscille autour de sa position d'équilibre.

2. A partir de l'expression de ω_0 ou ω_0^2 on voit qu'elle augmente avec R en x^2 elle est maximum lorsque R est maximum donc a_{max} = R

b) Système en rotation sans déplacement

Le disque tourne autour de O distant de b par rapport au centre de gravité.

Le théorème de Huygens permet de calculer le nouveau moment d'inertie : $J + mb^2$

$T = \frac{1}{2}(J + mb^2)\dot{\theta}^2, \quad U = mgb\cos(\theta) = -\frac{1}{2}mgb\theta^2 + mgb$ (L'origine de l'énergie potentielle de gravitation est prise au point C).

Le Lagrangien s'écrit :

$L = \frac{1}{2}(J + mb^2)\theta^2 + \frac{1}{2}mgb\theta^2 - mgb.$

L'équation de Lagrange donne l'équation de mouvement suivante :

$(J + mb^2)\ddot{\theta} + mgb\,\theta = 0$ D'où $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$ avec $\omega^2 = \frac{mgb}{mb^2+J} = f(b)$

L'expression est positive quel que soit b, elle est nulle pour b=0 et tend vers 0 lorsque b tend vers l'infini donc doit passer par un maximum. Ce maximum est connu en mettant le dérivé

de f (b) égal à zéro.

$mg(mb^2 + j) - 2mb\,.mgb = 0 \quad c'est\grave{a}\,dire \quad J - mb = 0 \quad donc \quad b_{max} = \sqrt{\frac{J}{m}}$ Qui est, donc, la valeur pour laquelle la pulsation propre est maximale