Chapitre 1

Eléments d'analyse vectorielle

1.1 Champ scalaire - Champ vectoriel

Soit un trièdre orthonormé $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et M un point de l'espace, de coordonnées (x, y, z) :

$$\overrightarrow{OM} = x\ \vec{e}_x + y\ \vec{e}_y + z\ \vec{e}_z \tag{1.1}$$

La fonction $f(M)$ est dite fonction scalaire de point ou champ scalaire si :

$$f(M) = f(x, y, z) \tag{1.2}$$

Le vecteur $\vec{v}(M)$ est dit fonction vectorielle de point ou champ vectoriel si :

$$\vec{v}(M) = V_x(x, y, z)\ \ \vec{e}_x + V_y(x, y, z)\ \ \vec{e}_y + V_z(x, y, z)\ \ \vec{e}_z \tag{1.3}$$

1.2 Gradient d'un champ scalaire

Le gradient (noté $\overrightarrow{grad}$) est défini à partir d'une fonction scalaire de point et a pour composantes suivant $\vec{e}_x, \vec{e}_y$, et $\vec{e}_z$ les dérivées partielles de $f(M)$ par rapport à x, y et z respectivement :

$$\overrightarrow{grad}\ (f) = \frac{\partial f}{\partial x}\ \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\ \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\ \vec{e}_z \tag{1.4}$$

1.3 Divergence d'un champ vectoriel

La divergence (notée div) n'est définie qu'à partir d'une fonction vectorielle $\vec{v}(M)$ de point et donne une fonction scalaire de point définie, en coordonnées cartésiennes par :

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1.5}$$

1.4 Rotationnel d'un champ vectoriel

Le rotationnel noté ($\overrightarrow{rot}$) d'un champ vectoriel donne une fonction vectorielle de point définie en coordonnées cartésiennes par :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]\ \vec{e}_x + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]\ \vec{e}_y + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]\ \vec{e}_z \tag{1.6}$$

1.5 Laplacien scalaire

Le laplacien scalaire d'une fonction scalaire de point (noté lap ou Δ) est par définition un champ scalaire défini par :

$$lap\,(f) = \Delta f = div\left[\overrightarrow{grad}\,(f)\right] \tag{1.7}$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes, il s'écrit :

$$lap\,(f) = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.8}$$

1.6 Laplacien vectoriel

Le laplacien vectoriel (noté $\overrightarrow{lap}$ ou $\vec{\Delta}$) d'un champ vectoriel $\vec{v}$ est un champ vectoriel défini par :

$$\overrightarrow{lap}\,(\vec{v}) = \vec{\Delta}\,(\vec{v}) = \overrightarrow{grad}\,[div\,(\vec{v})] - \overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}\,(\vec{v})\right] \tag{1.9}$$

Dans le cas d'un système de coordonnées cartésiennes, le laplacien vectoriel a pour composantes :

$$\overrightarrow{lap}\,(\vec{v}) \begin{cases} \Delta v_x = \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \\ \Delta v_y = \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \\ \Delta v_z = \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \end{cases} \tag{1.10}$$

1.7 Opérateur nabla

Pour écrire de manière plus compacte les opérateurs vectoriels précédemment définis, on introduit un vecteur symbolique appelé opérateur nabla et défini par :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.11}$$

Les opérateurs vectoriels s'écrivent parfois à l'aide de l'opérateur nabla sous les formes respectives suivantes :

– le gradient d'un champ scalaire f est noté

$$\overrightarrow{grad}\,(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z \tag{1.12}$$

– la divergence d'un champ vectoriel est notée

$$div\,(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{1.13}$$

– le rotationnel d'un champ vectoriel est noté

$$\overrightarrow{rot}\,(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right] \vec{e}_x + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right] \vec{e}_y + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right] \vec{e}_z \quad (1.14)$$

– le laplacien scalaire d'un champ scalaire est noté

$$lap\,(f) = \Delta f = div\left[\overrightarrow{grad}\,(f)\right] = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \nabla^2\,(f) \quad (1.15)$$

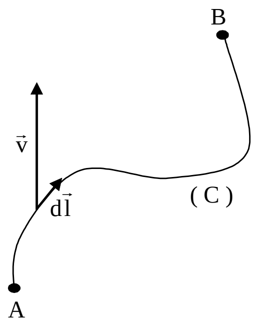
∇^2 se lit "del de".

– le laplacien vectoriel d'un champ vectoriel est noté

$$\overrightarrow{lap}\,(\vec{v}) = \vec{\Delta}\,(\vec{v}) = \overrightarrow{grad}\,[div\,(\vec{v})] - \overrightarrow{rot}\left[\overrightarrow{rot}\,(\vec{v})\right] = \vec{\nabla}\vec{\nabla} \cdot (\vec{v}) - \vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \vec{v}\right] \quad (1.16)$$

1.8 Théorème de Stokes-Théorème de Gauss

1.8.1 Circulation d'un champ vectoriel



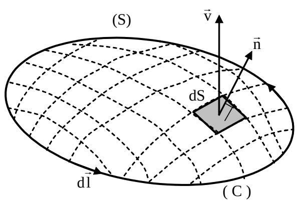
On définit la circulation d'un vecteur $\vec{v}$ le long d'un contour (C), par l'intégrale curviligne :

$$\mathcal{C}_{\overrightarrow{AB}}\,(\vec{v}) = \int\limits_{\overrightarrow{AB}} \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (1.17)$$

La circulation de long d'un contour fermé est notée :

$$\mathcal{C}\,(\vec{v}) = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \quad (1.18)$$

1.8.2 Flux d'un champ vectoriel



On définit le flux d'un vecteur $\vec{v}$ à travers une surface (S) par l'intégrale double :

$$\phi_{/(S)}\,(\vec{v}) = \iint\limits_{(S)} \vec{v} \cdot \vec{n}\; dS \quad (1.19)$$

Lorsque la surface (S) est fermée, le vecteur unitaire $\vec{n}$ est dirigé de l'intérieur vers l'extérieur.

1.8.3 Théorème de Stockes

La circulation d'un vecteur le long d'un contour fermé (C) limitant une surface (S) est égal au flux de son rotationnel à travers cette surface.

$$\mathcal{C}\,(\vec{v}) = \phi_{/(S)}\left(\overrightarrow{rot}\,(\vec{v})\right) \quad (1.20)$$

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \iint\limits_{(S)} \overrightarrow{rot}\,(\vec{v}) \cdot \vec{n}\; dS \quad (1.21)$$

Le vecteur unitaire $\vec{n}$ est orienté selon la convention du tire-bouchon de Maxwell.

1.8.4 Théorème de Gauss-Ostrogradski (ou théorème de la divergence)

Le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée (S) est égal à l'intégrale de sa divergence dans le volume (τ) limité par la surface fermée (S) :

$$\oiint_{(S)} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_{(\tau)} div\,(\vec{v}) \;\; d\tau \tag{1.22}$$

1.9 Exercices

Exercice 1 : On donne le champ $\vec{F} = (y-1) \;\; \vec{e}_x + 2x \; \vec{e}_y$; trouver le vecteur $\vec{F}$ au point $(2, 2, 1)$ et sa projection sur $\vec{B}$, si $\vec{B} = 5 \; \vec{e}_x - \vec{e}_y + 2 \; \vec{e}_z$.

Exercice 2 : Soient les vecteurs $\vec{A} = \vec{e}_x + \vec{e}_y$, $\vec{B} = \vec{e}_x + 2\vec{e}_y$ et $\vec{C} = 2\vec{e}_x + \vec{e}_y$:

1. Calculer $\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \times \vec{C}$ et comparer avec $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$.
2. Calculer $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$ et comparer avec $\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{C}$.

Exercice 3 : Exprimer en coordonnées cylindriques (r, θ, z), le vecteur $\vec{A}$ donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{A} = y \; \vec{e}_x + x \; \vec{e}_y + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \; \vec{e}_z$$

Exercice 4 : Soit un vecteur de module 10 unités dirigé de l'origine vers le point $(5, 5\pi/4, 0)$, en coordonnées cylindriques (r, θ, z). Exprimer ce vecteur en coordonnées cartésiennes.

Exercice 5 : Exprimer le vecteur $\vec{A} = A_x \; \vec{e}_x + A_y \; \vec{e}_y + A_z \; \vec{e}_z$ en coordonnées cylindriques $(A_r, \; A_\theta, \; A_z)$.

Exercice 6 : Exprimer le vecteur $\vec{A} = A_r \; \vec{e}_r + A_\theta \; \vec{e}_\theta + A_z \; \vec{e}_z$ en coordonnées cartésiennes.

Exercice 7 : Exprimer en coordonnées cartésiennes le vecteur $\vec{F} = r^{-1} \; \vec{e}_r$ donné en coordonnées sphériques.

Exercice 8 : Trouver l'expression du gradient :

1. en coordonnées cylindriques (r, θ, z)
2. en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

Exercice 9 : Etablir, à partir des relations de définition, les formules de composition :

$$\overrightarrow{grad}(f+g) = \overrightarrow{grad}\,(f) + \overrightarrow{grad}\,(g)$$
$$\overrightarrow{grad}\,(f \cdot g) = f \cdot \overrightarrow{grad}(g) + g \cdot \overrightarrow{grad}(f)$$

Exercice 10 : Montrer que $\overrightarrow{grad}\,(f)$ est normal en chaque point à la surface $f = constante$ passant par ce point.

Exercice 11 : Montrer que la circulation d'un vecteur gradient le long d'un contour fermé est nulle.

Exercice 12 : Trouver l'expression de la divergence :

1. en coordonnées cylindriques (r, θ, z)
2. en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

Exercice 13 : Etablir les formules de composition :

$$\begin{aligned} &div\ (\vec{u}+\vec{v}) = div\ (\vec{u}) + div\ (\vec{v}) \\ &div\ (m\vec{v}) = m\ div\,(\vec{v}) + \vec{v}\cdot \overrightarrow{grad}\,(m) \\ &div\,(\vec{u}\times\vec{v}) = -\vec{u}\cdot\overrightarrow{rot}(\vec{v}) + \overrightarrow{rot}\,(\vec{u})\cdot\vec{v} \end{aligned}$$

Exercice 14 : On donne $\vec{A} = e^{-y}\,(\cos\ x\ \vec{e}_x - \sin\ x\ \vec{e}_y)$; chercher $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$.

Exercice 15 : On donne $\vec{A} = x^2\ \vec{e}_x + yz\ \vec{e}_y\ + xy\ \vec{e}_z$; chercher $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$.

Exercice 16 : On donne $\vec{A} = 5x^2\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right)\ \vec{e}_x$; calculer $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ pour $x = 1$.

Exercice 17 : On donne $\vec{A} = \left(x^2+y^2\right)^{-1/2}\vec{e}_x$; calculer $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ au point de coordonnées $(2, 2, 0)$.

Exercice 18 : On donne $\vec{A} = r\sin\ \theta\ \vec{e}_r + 2r\ \cos\ \theta\ \vec{e}_\theta + 2z^2\ \vec{e}_z$, chercher $div\ \vec{A}$.

Exercice 19 : Trouver l'expression du rotationnel :

1. en coordonnées cylindriques (r, θ, z)
2. en coordonnées sphériques $(r\ , \theta, \phi)$

Exercice 20 : Etablir la formule de composition :

$$div\,(\vec{u}\times\vec{v}) = -\vec{u}\cdot\overrightarrow{rot}(\vec{v}) + \overrightarrow{rot}\,(\vec{u})\cdot\vec{v}$$

Exercice 21 : Démontrer les relations :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}\ f\ \right) = 0 \\ &div\left(\overrightarrow{rot}\ \vec{v}\right) = 0 \end{aligned}$$

Exercice 22 : Etablir les lois de composition :

$$\begin{aligned} &\overrightarrow{rot}\,(\vec{u}+\vec{v}) = \overrightarrow{rot}\ (\vec{u}) + \overrightarrow{rot}(\vec{v}) \\ &\overrightarrow{rot}(\lambda\,\vec{v}) = \lambda\,\overrightarrow{rot}(\vec{v}) - \vec{v}\times\overrightarrow{grad}(\lambda) \end{aligned}$$

Exercice 23 : Soit un champ de vecteurs, $\vec{A} = (y\ \cos\ ax)\,\vec{e}_x + (y+e^x)\,\vec{e}_z$; calculer $\vec{\nabla}\times\vec{A}$ à l'origine.

Exercice 24 : Etant donné le champ de vecteurs $\vec{A} = 5r\ \sin\ \theta\ \vec{e}_z$, en coordonnées cylindriques (r, θ, z) ; trouver $\overrightarrow{rot}\ \vec{A}$ au point $(2, \pi, 0)$.

Exercice 25 : Etant donné le champ de vecteurs $\vec{A} = 5e^{-r}\ \cos\ \theta\ \vec{e}_r - 5\ \cos\ \theta\ \vec{e}_z$, en coordonnées cylindriques (r, θ, z), trouver $\overrightarrow{rot}\ \vec{A}$ au point $(2, 3\pi/2, 0)$.

Exercice 26 : Etant donné le champ de vecteurs $\vec{A} = 10 \ \sin \ \phi \ \vec{e}_\phi$, en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), trouver $\vec{\nabla} \times \vec{A}$ au point $(2, \pi/2, 0)$.

Exercice 27 : Soit un champ de vecteurs $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ où le vecteur d'onde $\vec{k}$ a pour composantes k_x, k_y, k_z . Le vecteur $\vec{A}_0$ (indépendant de $\vec{r}$ et t) a pour composantes A_{0x}, A_{0y}, A_{0z}. Démontrer les relations :

$$div(\vec{A}) = -j\vec{k} \cdot \vec{A}$$
$$\overrightarrow{rot}(\vec{A}) = -j\vec{k} \times \vec{A}$$

Exercice 28 : Soit le champ scalaire $V(\vec{r}, t) = V_0 \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$ (avec les mêmes notations que pour l'exercice précédent). Montrer que :

$$\overrightarrow{grad}(V) = -j\vec{k} \ V$$

Exercice 29 : Les champs

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = j\vec{B}_0 \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$$

sont des vecteurs de composantes réelles ; sont-ils orthogonaux ou en quadrature ?