Annexe B

Analogies électromécaniques

B.1 Introduction

Des systèmes mécaniques peuvent être représentés par des circuits électriques analogues. Deux systèmes mécanique et électrique sont dits analogues si les équations différentielles qui régissent leur évolution sont identiques. Quand cette équivalence est obtenue, les termes correspondant dans les équations différentielles sont dits analogues.

Il y a deux types d'analogies pour les systèmes mécaniques et électriques

– l'analogie force-tension ou analogie masse-inductance ; c'est la plus utilisée.
– l'analogie force-courant ou analogie masse-capacitance.

B.2 Analogie force-tension ou masse-inductance

Les relations entre le courant électrique i et la charge électrique Q sont exactement de même nature que celles qui existent entre la vitesse $\dot{x}$ et la position x d'un système mécanique en translation :

$$i = \frac{dQ}{dt} \text{ ou encore } Q = \int i\,dt$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} \text{ ou encore } x = \int \dot{x}\,dt$$

Comme ces grandeurs sont liées par les mêmes relations, nous dirons que les grandeurs électriques Q et i sont respectivement analogues aux grandeurs mécaniques $\dot{x}$ et x

$$x \rightleftharpoons Q$$
$$\dot{x} \rightleftharpoons i$$

Lorsque le condensateur a emmagasiné une charge électrique Q, la tension électrique v à ses bornes est donnée par la relation :

$$v = \frac{1}{C}Q$$

Cette relation est de même nature que celle qui relie l'allongement x d'un ressort linéaire soumis à une force F

$$F = kx$$

Nous dirons que la tension électrique v est analogue à une force mécanique et que l'inverse de la capacité est analogue à un coefficient de rappel élastique k :

$$v \rightleftharpoons F \text{ et } 1/C \rightleftharpoons k$$

Dans le cas d'une force de rappel proportionnelle au déplacement x, l'énergie potentielle $U(x)$ est donnée par :

$$U(x) = \frac{1}{2} k\, x^2$$

Tandis que l'énergie $\mathcal{E}_E(Q)$ emmagasinée par le champ électrique dans un condensateur s'écrit :

$$\mathcal{E}_E(Q) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Ces résultats montrent que l'énergie potentielle élastique $U(x)$ est analogue à l'énergie électrique $\mathcal{E}_E(Q)$ emmagasinée dans le condensateur.

Il suffit donc de considérer l'analogie : $L \rightleftharpoons m$ pour que la relation $v = L\frac{di}{dt}$ soit équivalente à la relation fondamentale de la dynamique

$$F = m\frac{d\dot{x}}{dt}$$

Tenant compte de ces résultats, nous pouvons considérer que la quantité électrique analogue à l'énergie cinétique est représentée par l'énergie magnétique $\mathcal{E}_M$ emmagasinée dans la bobine d'auto-inductance :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2} L\dot{Q}^2 \rightleftharpoons T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

La puissance dissipée sous forme de chaleur dans une résistance électrique est donnée par la loi de Joule :

$$P_J = R\, i^2$$

La fonction dissipation qui, par définition, est égale à la moitié de la puissance dissipée peut s'écrire dans ce cas :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} R\, i^2$$

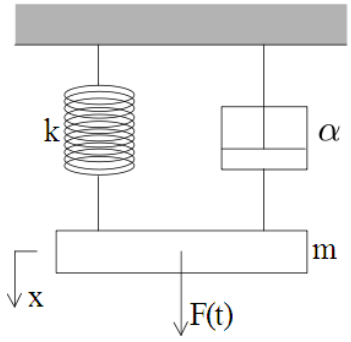
On remarque qu'un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α est analogue à une résistance électrique :$\alpha \rightleftharpoons R$.

On peut donc établir le tableau des analogies électromécaniques suivant :

Mécanique	Eléctricité
vitesse : $\dot{x}$	courant : i
force : F	d.d.p : v
masse : m	inductance : L
amortisseur : α	résistance : R
ressort : k	capacitance : $\frac{1}{C}$
Energie potentielle : U	Energie électrostatique : U_E
Energie cinétique : T	Energie magnétique : U_M

Tableau des analogies force-tension

B.3 Systèmes à un degré de liberté



Le système masse-amortisseur-ressort ci-dessus, est régi par l'équation différentielle suivante

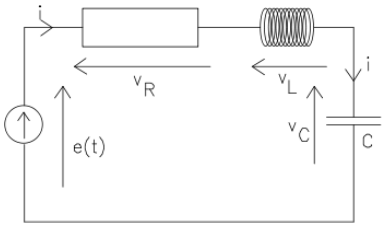
$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + kx = F$$

Cette équation différentielle peut s'écrire en fonction de la vitesse $\dot{x}$ sous la forme

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} + \alpha\dot{x} + k\int \dot{x}\,dt = F$$

L'écriture de la seconde loi de Kirchhoff permet d'obtenir l'équation différentielle qui régit le circuit R.L.C série ci-dessus

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int i\,dt = e$$

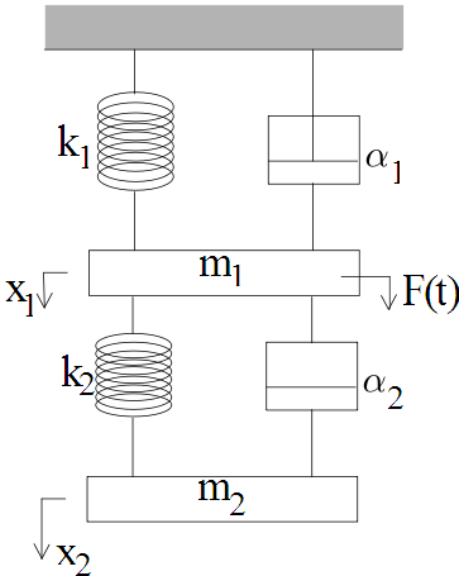


Les équations différentielles qui régissent ces deux systèmes sont de même nature. Les deux systèmes physiques sont dits analogues.

B.4 Système à deux degrés de liberté

Exercice résolu

Etablir, dans le cadre de l'analogie force-tension, le système électrique analogue au système mécanique à deux degrés de liberté ci-dessous.



Solution

Seule une démarche méthodique permet d'obtenir le circuit électrique analogue. Les différentes étapes sont

1. Etablir le système d'équations différentielles

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (\alpha_1+\alpha_2)\,\dot{x}_1 + (k_1+k_2)\,x_1 - \alpha_2\dot{x}_2 - k_2x_2 &= F \\ m_2\ddot{x}_2 + \alpha_2\dot{x}_2 + k_2x_2 - \alpha_2\dot{x}_1 - k_2x_1 &= 0 \end{aligned}$$

2. Regrouper les différents termes en mettant en facteur chaque grandeur correspondant à un élément mécanique.

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + \alpha_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + \alpha_2\,(\dot{x}_1-\dot{x}_2) + k_2\,(x_1-x_2) &= F \\ m_2\ddot{x}_2 - \alpha_2\,(\dot{x}_1-\dot{x}_2) - k_2\,(x_1-x_2) &= 0 \end{aligned}$$

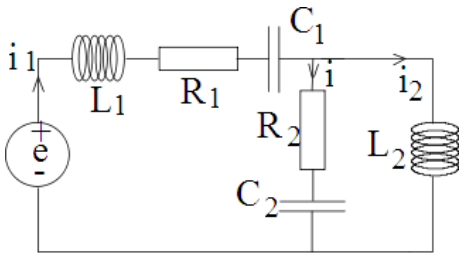
3. Ecrire le système d'équations différentielles sous la forme d'un système intégro-différentiel

$$\begin{aligned} m_1\frac{d\dot{x}_1}{dt} + \alpha_1\dot{x}_1 + k_1\int\dot{x}_1dt + \alpha_2\,(\dot{x}_1-\dot{x}_2) + k_2\int(\dot{x}_1-\dot{x}_2)\,dt &= F \\ m_2\frac{d\dot{x}_2}{dt} - \alpha_2\,(\dot{x}_1-\dot{x}_2) - k_2\int(\dot{x}_1-\dot{x}_2)\,dt &= 0 \end{aligned}$$

4. Etablir la liste des éléments électriques analogues

Mécanique	Electricité
$\dot{x}_1$	i_1
$\dot{x}_2$	i_2
m_1	L_1
m_2	L_2
k_1	$\frac{1}{C_1}$
k_2	$\frac{1}{C_2}$
α_1	R_1
α_2	R_2
F	e

5. Remplacer chaque terme du système d'équations mécanique par un terme électrique analogue. Ce qui permet d'établir le système d'équations intégro-différentiel électrique

$$L_1\frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1 dt + R_2\left(i_1 - i_2\right) + \frac{1}{C_2}\int \left(i_1 - i_2\right) dt = e$$
$$L_2\frac{di_2}{dt} - R_2\left(i_1 - i_2\right) - \frac{1}{C_2}\int \left(i_1 - i_2\right) dt = 0$$

6. Construire le circuit électrique analogue en remarquant que les termes de ces deux équations sont respectivement la d.d.p aux bornes de L_1, R_1, C_1, R_2, C_2, e et L_2. Ces deux équations réprésentent l'écriture de la seconde loi de Kirchoff pour deux mailles parcourues respectivement par les courants i_1 et i_2 et qui ont une branche commune contenant R_2 et C_2 et parcourue par le courant $i = i_1 - i_2$.