Annexe A

Equations différentielles

A.1 Introduction

Les oscillations linéaires des systèmes à un degré de liberté sont régies par des équations différentielles du second ordre à coefficients constants. Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est une relation entre une variable dépendante y et ses dérivées première et seconde par rapport à une variable indépendante t, qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\delta\frac{dy}{dt} + \omega_0^2\, y = A(t)$$

Les coefficients δ et ω_0 sont des constantes réelles positives. Dans les problèmes de vibration le paramètre t représente le temps et on note par convention :

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$$

D'où l'écriture de l'équation différentielle :

$$\ddot{y} + 2\,\delta\,\dot{y} + \omega_0^2\, y = A(t)$$

A.2 Equation homogène

L'équation différentielle est dite homogène si $A(t) = 0$:

$$\ddot{y} + 2\,\delta\,\dot{y} + \omega_0^2\, y = 0$$

On recherche des solutions qui sont de la forme $y(t) = e^{st}$. Dans ce cas l'équation différentielle s'écrit :

$$\left[s^2 + 2\delta\, s + \omega_0^2\right]\, e^{st} = 0$$

Cette équation doit être vraie quel que soit t, ce qui implique :

$$s^2 + 2\delta\, s + \omega_0^2 = 0$$

On obtient ainsi une équation du second degré en s dite équation caractéristique. Les racines de cette équation caractéristique sont :

$$s_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$s_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

La solution de l'équation différentielle s'écrit alors :

$$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

A_1 et A_2 sont deux constantes d'intégration que l'on peut déterminer à partir des conditions initiales :

$$y(t=0) = y_0$$
$$\dot{y}(t=0) = \dot{y}_0$$

Sachant que δ et ω_0 sont des nombres réels positifs, s_1 et s_2 sont négatives ou complexes avec une partie réelle négative. La nature des solutions s_1 et s_2 de l'équation caractéristique dépend de la valeur relative de δ par rapport à ω_0 . Ainsi trois cas sont à envisager :

A.2.1 Régime fortement amorti ($\delta > \omega_0$)

Dans ce cas, les deux racines s_1 et s_2 sont réelles et négatives. L'écriture des conditions initiales donne un système de deux équations :

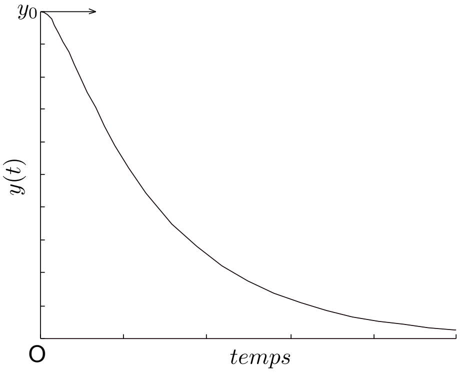
$$A_1 + A_2 = y_0$$
$$s_1 A_1 + s_2 A_2 = \dot{y}_0$$

dont les solutions sont les constantes d'intégration A_1 et A_2 :

$$A_1 = \frac{s_2 y_0 - \dot{y}_0}{s_2 - s_1}$$

$$A_2 = \frac{\dot{y}_0 - s_1 y_0}{s_2 - s_1}$$

$y(t)$ est une fonction décroissant sans oscillations vers zéro lorsque t augmente. La forme exacte de $y(t)$ dépend des valeurs de A_1 et A_2 qui sont déterminées par les conditions initiales. Pour les conditions initiales particulières suivantes :$y_0 \neq 0$; $\dot{y}_0 = 0$, la figure suivante représente les variations de y au cours du temps



Régime apériodique

A.2.2 Régime critique ($\delta = \omega_O$)

L'équation caractéristique possède une racine double :

$$s_1 = s_2 = -\delta$$

La solution générale de l'équation différentielle est de la forme :

$$y(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{-\delta t}$$

Les constantes d'intégration A_1 et A_2 sont déterminées à partir des conditions initiales et valent :

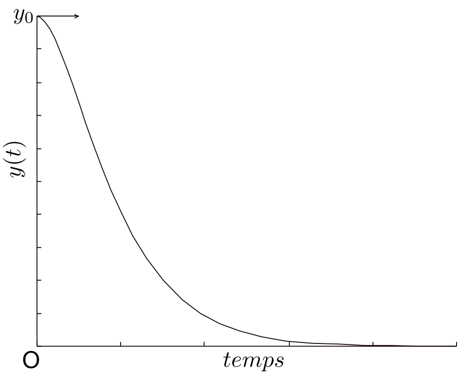
$$A_1 = y_0$$

$$A_2 = \dot{y}_0 + \delta\, y_0$$

$y(t)$ et une fonction décroissant vers zéro quand t augmente. Il est aisé de vérifier que cette situation correspond à la décroissance la plus rapide de $y(t)$. Ce cas correspond au régime critique. Pour le cas particulier de conditions initiales :$y_0 \neq 0$; $\dot{y}_0 = 0$, la solution est :

$$y\,(t) = y_0\, e^{-\delta t}\,(1 + \delta t)$$

La figure ci-dessous représente les variations de $y(t)$.



Régime critique

A.2.3 Régime pseudo-périodique ($\delta < \omega_0$)

Dans ce cas s_1 et s_2 sont complexes conjugués :

$$s_1 = -\delta + i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

$$s_2 = -\delta - i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

où i représente le nombre imaginaire pur vérifiant la relation $i^2 = -1$. Posons :

$$\omega_D = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

La solution générale s'écrit alors :

$$y(t) = e^{-\delta t} \left[A_1 \, e^{i\omega_D t} + A_2 \, e^{-i\omega_D t} \right]$$

Sachant que :

$$e^{i\omega_D t} = \cos(\omega_D t) + i \, \sin(\omega_D t)$$

$$e^{-i\omega_D t} = \cos(\omega_D t) - i \, \sin(\omega_D t)$$

$y(t)$ s'écrit :

$$y(t) = e^{-\delta t} \, [(A_1 + A_2) \cos(\omega_D t) + i \, (A_1 - A_2) \, \sin(\omega_D t)]$$

$y(t)$ étant réelle, les nombres complexes A_1 et A_2 doivent vérifier les relations :

$$A_1 + A_2 : \text{ réel}$$

$$A_1 - A_2 : \text{ imaginaire}$$

A_1 et A_2 sont donc complexes conjugués et peuvent se mettre sous la forme :

$$A_1 = A' \, e^{i\varphi}$$

$$A_2 = A' \, e^{-i\varphi}$$

$y(t)$ s'écrit alors :

$$y(t) = A' \, e^{-\delta t} \left[e^{i(\omega_D t + \varphi)} + e^{-i(\omega_D t + \varphi)} \right]$$

soit finalement, en posant $A = 2A'$:

$$y(t) = A \; e^{-\delta t} \; \cos(\omega_D t + \varphi)$$

$y(t)$ peut être interprétée comme une fonction périodique de pulsation ω_D , de phase initiale φ et d'amplitude $Ae^{-\delta t}$ décroissant exponentiellement au cours du temps. On peut définir une pseudo-période

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$$

A et φ sont deux constantes d'intégration définies à partir des conditions initiales :

$$y_0 = A \, \cos(\varphi)$$

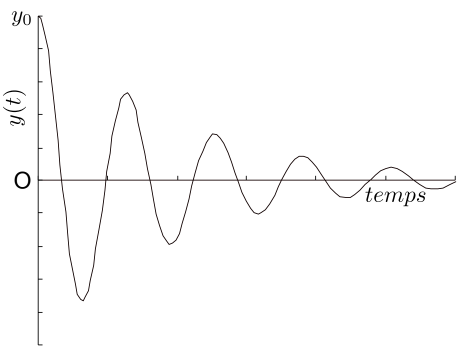
$$\dot{y}_0 = -A \, \cos(\varphi) \; [\delta + \omega_D \; \tan(\varphi)]$$

D'où l'on tire :

$$\varphi = -\ \arctan\left[\frac{\dot{y}_0 + \delta y_0}{\omega_D\, y_0}\right]$$

$$A = \frac{\sqrt{(\omega_D\, y_0)^2 + (\dot{y}_0 + \delta y_0)^2}}{\omega_D}$$

La figure ci-dessous représente les variations de $y(t)$ dans le cas particulier de conditions initiales :$y_0 \neq 0;\ \dot{y}_0 = 0$.



Régime pseudo-périodique

Remarque : Cas particulier où $\delta = 0$:
L'équation différentielle s'écrit :

$$\ddot{y} + \omega_0^2\, y = 0$$

La solution s'exprime dans ce cas :

$$y(t) = A\ \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Cette solution est appelée solution harmonique car $y(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps, de pulsation ω_0 , de période $T_0 = 2\pi/\omega_0$ et dont l'amplitude A et la phase initiale ϕ sont déterminées par les conditions initiales :

$$y_0 = A\,\cos(\phi)$$

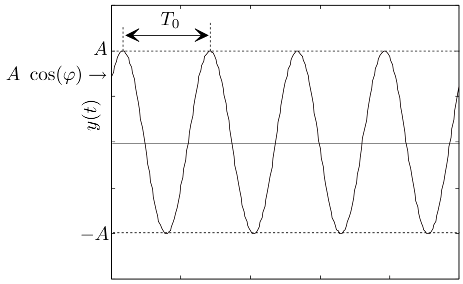
$$\dot{y}_0 = -\omega_0\, A\,\sin(\phi)$$

d'où l'on tire :

$$\phi = -\arctan\left[\frac{\omega_0\, y_0}{\dot{y}_0}\right]$$

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0}{\omega_0}\right)^2}$$

La figure suivante représente les variations au cours du temps de $y(t)$ dans le cas particulier où : $y_0 = 1$ *et* $\dot{y}_0 = 0$.



Oscillations non amorties

A.3 Equation avec second membre

A.3.1 Solution générale

Soit y(t) la solution générale de l'équation différentielle avec second membre :

$$\ddot{y} + 2\,\delta\,\dot{y} + \omega_0^2\,y = A(t)$$

Soit $y_H(t)$ la solution de l'équation homogène et soit $y_P(t)$ une solution particulière de l'équation avec second membre ; $y_H(t)$ et $y_P(t)$ sont les solutions respectives des deux équations différentielles suivantes :

$$\ddot{y}_H + 2\,\delta\,\dot{y}_H + \omega_0^2\,y_H = 0$$

$$\ddot{y}_P + 2\,\delta\,\dot{y}_P + \omega_0^2\,y_P = A(t)$$

Les opérations de dérivation qui interviennent étant des opérations linéaires, l'addition membre membre des deux équations différentielles précédentes donne :

$$(\ddot{y}_H + \ddot{y}_P) + 2\,\delta\,(\,\dot{y}_H +\,\dot{y}_P) + \omega_0^2\,(y_H + y_P)\, = A(t)$$

Ainsi la solution générale peut être obtenue en faisant la somme de la solution homogène et d'une solution particulière :

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t)$$

A.3.2 Cas particulier où A(t) est constante

Considérons le cas particulier important où $A(t) = A_0$, A_0 étant une constante réelle. L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{y} + 2\,\delta\,\dot{y} + \omega_0^2\,y = A_0$$

On peut vérifier que

$$y = \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

constitue une solution particulière de l'équation avec second membre. Selon le cas la solution générale de l'équation avec second membre sera :

– Régime fortement amorti $(\delta > \omega_0)$

$$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

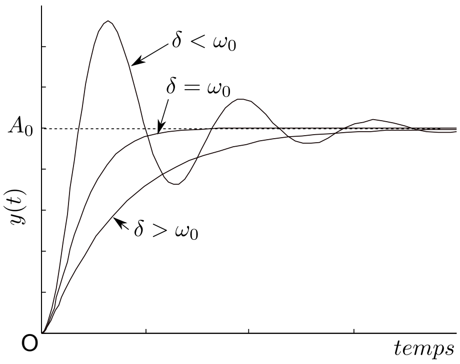
– Régime critique ($\delta = \omega_0$)

$$y(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{-\delta t} + \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

– Régime pseudo-périodique ($\delta < \omega_0$)

$$y(t) = A\ e^{-\delta t} \cos(\omega_D t + \varphi) + \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

Dans les trois cas considérés les constantes d'intégration A_1 , A_2, A et ϕ sont déterminées à partir des conditions initiales. Considérons à titre d'exemple le cas particulier $y_0 = 0$ et $\dot{y}_0 = 0$. La résolution des systèmes d'équations obtenus permet de calculer les constantes d'intégration et de tracer les variations de $y(t)$ pour les trois régimes. Les variations correspondantes de $y(t)$ sont représentées par la figure ci-dessous.



Cas où $A(t)$ est une constante.

A.3.3 Cas particulier où $A(t) = A_0 \cos(\Omega t)$:

Nous pouvons vérifier que $y_P(t) = Y_0 \cos(\Omega t + \theta)$ constitue une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre à condition que l'amplitude Y_0 et la phase θ vérifient la relation :

$$\left[\omega_0^2 - \Omega^2\right] Y_0 \cos(\Omega t + \theta) - 2\,\delta\,\Omega\, Y_0 \sin(\Omega t + \theta) = A_0 \cos(\Omega t)$$

Le développement des termes en cosinus et en sinus permet d'obtenir :

$$\mathrm{Y}_0 = \frac{A_0}{\sqrt{[\omega_0^2 - \Omega^2]^2 + 4\delta^2\Omega^2}}$$

$$\theta = -\arctan\left[\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right]$$

La solution complète s'écrit alors suivant le cas :
– Régime fortement amorti ($\delta > \omega_0$)

$$y(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t} + Y_0 \cos(\Omega t + \theta)$$

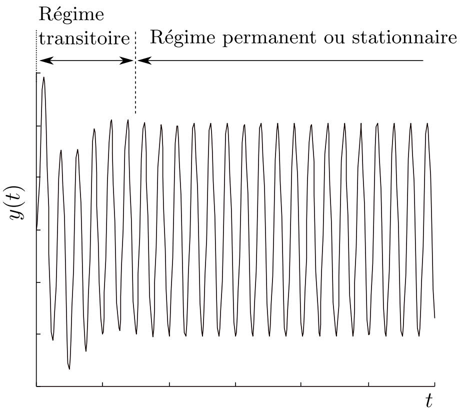
– Régime critique ($\delta = \omega_0$)

$$y(t) = (A_1 + A_2 t)\, e^{-\delta t} + Y_0 \cos(\Omega t + \theta)$$

– Régime pseudo-périodique ($\delta < \omega_0$)

$$y(t) = A\ e^{-\delta t} \cos(\omega_D t + \varphi) + Y_0 \cos(\Omega t + \theta)$$

Comme dans le cas précédent les constantes d'intégration A_1 , A_2 , A et θ sont déterminées à partir des conditions initiales. La figure suivante représente le résultat obtenu dans le cas particulier où :($y_0 = 0\,, \dot{y}_0 = 0$).



Cas où A(t) est une fonction sinusoïdale

On remarque que dans tous les cas la solution homogène tend zéro lorsque t augmente, et la solution générale s'identifie alors avec la solution particulière :

$$y(t) \simeq y_P(t)$$

Pour cette raison la solution de l'équation homogène est appelée solution transitoire tandis que la solution particulière est appelée solution permanente.

A.3.4 Cas où A(t) est une fonction périodique du temps

Introduction

Nous avons étudié dans le paragraphe précédent la solution de l'équation différentielle dans le cas harmonique, c'est-à-dire lorsque le second membre est une fonction sinusoïdale de la variable t. En considérant le cas de fonctions périodiques, nous procéderons à une généralisation du cas harmonique.

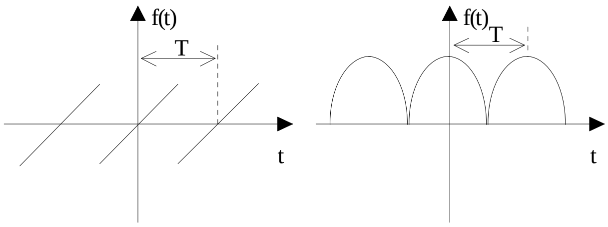
Développement en série de Fourier d'une fonction périodique

Les fonctions périodiques Une fonction $f(t)$ est dite périodique, de période T, si pour tout t, $f(t+T) = f(t)$ où T est une constante positive. La plus petite valeur non nulle de T est appelé la période de $f(t)$.

Exemples :

1. La fonction $\sin(\pi t)$ reprend les mêmes valeurs pour $t = 2, 4, 6$ puisque $\sin[\pi(t+2)] = \sin[\pi(t+4)] = \sin[\pi(t+6)] = \sin(t)$. Cependant 2 est la période de $\sin(\pi t)$.
2. La période de $\sin(\Omega t)$ ou de $\cos(\Omega t)$ est $2\pi/\Omega$. La période de $\sin(n\Omega t)$ et de $\cos(n\Omega t)$ est $2\pi/n\Omega$.
3. Une constante a pour période n'importe quel nombre positif.

4. Les figures ci-dessous représentent deux exemples de fonctions périodiques non sinusoïdales.



Exemples de fonctions périodiques

Définition des séries de Fourier Soit $f(t)$ une fonction périodique de période T, c'est–dire telle que $f(t) = f(t+T)$, la série de Fourier ou le développement de Fourier qui correspond $f(t)$ est définie par :

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

où $\Omega = 2\pi/T$, n est un entier positif, a_n et b_n sont les coefficients de Fourier. Ces coefficients sont définis par les expressions suivantes :

$$a_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\Omega t)dt$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\Omega t)dt$$

La valeur $a_0/2$ représente la valeur moyenne de $f(t)$ sur la période T. Le terme sinusoïdal de pulsation $\Omega_1 = \Omega$, la plus faible est appelé fondamental tandis que les termes de pulsation $\Omega_n = n\Omega$ plus élevée sont appelés les harmoniques.

Cas des fonctions paires et impaires

– Une fonction est dite paire si $f(-t) = f(t)$. Dans le cas de développement en série de Fourier d'une fonction paire,il n'y aura que les termes en cosinus et parfois une constante qui représente la valeur moyenne. Il est aisé de montrer que :

$$b_n = 0$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

– Une fonction est dite impaire si $f(-t) = -f(t)$. Seuls les termes en sinus peuvent très présents dans un développement en série de Fourier d'une fonction impaire. Il est également aisé de montrer que :

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\,\sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

Solution de l'équation différentielle La fonction $A(t)$ étant périodique, de période T, son développement de Fourier s'écrit :

$$A(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

L'équation différentielle s'écrit alors :

$$\ddot{y} + 2\,\delta\,\dot{y} + \omega_0^2\,y = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\Omega t) + b_n \sin(n\Omega t)$$

La réponse permanente (ou stationnaire) qui s'identifie avec la solution particulière, pour t suffisamment élevé, peut alors être calculée pour chacune des composantes de l'excitation : $a_0/2$, $a_n \cos(n\Omega t)$, $b_n \sin(n\Omega t)$. On obtient alors par superposition :

$$y(t) = \frac{a_0}{2\Omega_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos(\Omega_n t + \theta_n) + b_n \sin(\Omega_n t + \theta_n)}{\sqrt{(\Omega_n^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\Omega_n^2}}$$

Exercices

Exercice 1 : Calculer et représenter graphiquement la solution de l'équation différentielle homogène :

$$\ddot{x} \; + \; 4\,x \; = \; 0$$

, pour les conditions initiales suivantes :

1. $x(0) = 1$ et $\dot{x}\,(0) = 0$.
2. $x(0) = 0$ et $\dot{x}\,(0) = 2$.

Exercice 2 : Pour les conditions initiales suivantes :

1. $x(0) = 1$ et $\dot{x}\,(0) = 0$.
2. $x(0) = 0$ et $\dot{x}\,(0) = 2$.
3. $x(0) = 1$ et $\dot{x}\,(0) = 2$.

calculer et représenter graphiquement les solutions des équations différentielles homogènes suivantes :

1. $\ddot{x} + 5\,\dot{x} + 4\,x = 0$
2. $\ddot{x} + 4\,\dot{x} + 4\,x = 0$
3. $\ddot{x} + 0.3\,\dot{x} + 4\,x = 0$

Exercice 3 : Pour les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}\,(0) = 0$, calculer et représenter graphiquement la solution générale de chacune des équations différentielles inhomogènes suivantes :

1. $\ddot{x} + 4x = 5$
2. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 5$
3. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 5$
4. $\ddot{x} + 0.3\dot{x} + 4x = 5$
5. $\ddot{x} + 4x = 5\cos(3t)$
6. $\ddot{x} + 4x = 5\cos(2.1t)$
7. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 5\cos(3t$

8. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = 5\cos(3t)$
9. $\ddot{x} + 0.3\dot{x} + 4x = 5\cos(3t)$

Exercice 4 : Calculer la solution particulière de chacune des équations différentielles inhomogènes suivantes :

1. $\ddot{x} + 4x = f(t)$
2. $\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = f(t)$
3. $\ddot{x} + 4\dot{x} + 4x = f(t)$

où $f(t)$ est une fonction de période T, définie par :

$$\begin{cases} f(t) = -a & \text{pour} \quad -T/2 \leq t \leq 0 \\ f(t) = +a & \text{pour} \quad 0 \leq t \leq T/2 \end{cases}$$

a étant un nombre réel positif.