

THESE

**Pour l'obtention du grade de Magister en Génie Mécanique
Option Systèmes Thermiques Industriels**

Thème

**DEVELOPPEMENT DE CONDITIONS AUX LIMITES
OUVERTES POUR UN CODE DE CALCUL
NAVIER-STOKES COMPRESSIBLE**

Par

HANNOUN NOUREDDINE

*Soutenu publiquement le 3 Juillet 2001
devant le jury composé de:*

Mme Bouhadek K.	Professeur à l'USTHB	Présidente
Mr Benmansour S.	Professeur à l'USTHB	Examinateur
Mr Teniou D.	Professeur à l'USTHB	Examinateur
Mr Chikh S.	Maitre de Conf. à l'USTHB	Examinateur
Mr Dizene R.	Maitre de Conf. à l'USTHB	Examinateur
Mr Benabdesselam A.	Maitre de Conf. à l'USTHB	Directeur de Thèse
Mr Boisson H. C.	Directeur de Recherche au CNRS	Directeur de Thèse

Copyright Hannoun Nouredine 2001
ALL RIGHTS RESERVED

Remerciements

Le travail effectué dans la présente thèse de Magistère est le résultat de plusieurs années de travail ainsi que d'une collaboration fructueuse entre l'IGM (USTHB) et l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse (IMFT). Plusieurs personnes ont contribué à l'aboutissement de ce travail. Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à tous et en particulier aux personnes citées ci-après.

Tout d'abord, je voudrais remercier Mme Bouhadek K., Mr Benmansour S. et Mr Chikh S. pour avoir accepté d'être membres du jury qui a évalué ce travail et apporter des suggestions pour l'amélioration de la thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à mes deux directeurs de thèse, Mr Benabdesselam Azzeddine et Mr Boisson Henri Claude pour leur suivi, soutien, patience, compréhension, bonne humeur et amitié pendant cette longue période.

Mr Benabdesselam A. qui a assuré la direction de ce travail à Alger n'a pas hésité à se lancer dans ce projet un peu éloigné de sa spécialité. Ses longues discussions et recommandations ont beaucoup apporté à ce travail.

Mr H. C. Boisson, Directeur du groupe ITEC de l'IMFT, a organisé trois mois de stage à l'IMFT durant trois années consécutives. Le support logistique (stations de travail, software et assistance) et le code de calcul fournis par l'IMFT et utilisé pour démarrer le travail ont beaucoup contribué à la réalisation de ce travail. Je tiens notamment à remercier certaines personnes de l'IMFT qui ont été très coopératives lors de mes passages à Toulouse: Mr Bombaud J. P., Mme Archard A., et mon ami Traoré P. Un grand merci aussi au regretté Pr. Haminh H. qui a beaucoup contribué au succès de ce travail par sa constante disponibilité pour les problèmes administratifs et surtout pour m'avoir introduit au monde de la CFD à travers son exceptionnel cours *Méthodes Numériques*.

Les discussions entretenues avec Mr Poinot T. J., Directeur du groupe CFD au CERFACS (Toulouse), ont beaucoup aidé dans la phase d'implémentation de la méthode NSCBC à notre code de calcul. Elles sont notamment à l'origine de la sélection des cas tests utilisés pour valider les conditions aux limites sur notre code. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Mr R. Issa (Imperial College, Londres) n'a pas hésité à répondre à mes questions concernant la méthode PISO à travers le réseau Internet. Il a notamment suggéré des améliorations de notre traitement de l'algorithme avec les variables conservatives. Qu'il trouve ici l'expression de mes remerciements les plus chaleureux.

Mr S. T. Wu (University of Alabama at Huntsville) m'a gracieusement envoyé des reprints de ces articles concernant l'adaptation de conditions aux limites caractéristiques aux équations de la Magnétohydrodynamique. L'idée de base qu'il a employé a été reprise dans notre travail et appliquée à l'implémentation de la méthode NSCBC à notre code. Je tiens à le remercier vivement pour sa contribution bénévole.

Je tiens aussi à remercier le staff de l'Institut de Génie Mécanique de l'USTHB pour la disponibilité et l'aide précieuses qu'ils ont fournis. En particulier je voudrais remercier quelques collègues et amis, Madani, Nebbali Rachid, Bousri Ali, Kiboua Rachid, Amrouche, et bien d'autres.

Merci à toute la famille, les amis et collègues qui ont fait le déplacement pour assister à ma soutenance. En particulier Ait-Si-Selmi Ghana et Fazia, Lamoudi Mourad et son fils, Derrar Abderrezak et Zahia, Kebbouche Kamel et sa famille, Sebih, Kamel Djellal Slimane, Kiboua Rachid, Nebbali Rachid et Oulad-Daoud Lyes.

Mes plus chaleureux remerciements vont à Mr Ali Smain pour l'aide précieuse qu'il a toujours fournie lors de mes séjours à Toulouse.

Je tiens à remercier tout particulièrement ma famille, parents, frères et sœurs, pour leur support durant ce long travail.

Nomenclature

Lettres

a	: Vitesse de phase
a_i	: Coefficient de $\rho\phi_i$ au noeud i
\mathbf{A}	: Matrice $\mathbf{A}_k\kappa_k$
A	: Fonction du nombre de Peclet
\mathbf{A}_k	: Matrices des équations d'Euler sous forme primitive
B	: Coefficient du noeud S (programme)
c	: Vitesse du son
c_v	: Chaleur spécifique à volume constant
C	: Intensité du vortex
\mathbf{d}	: Vecteur \mathbf{SL}
D	: Nombre de diffusion, coefficient du noeud W (programme)
ds	: Element de surface
$d\Omega$: Element de volume
DX	: Paramètre du maillage dans la direction x
DXU	: Paramètre du maillage dans la direction x
DXG	: Paramètre du maillage dans la direction x
$DY,$: Paramètre du maillage dans la direction y
DYV	: Paramètre du maillage dans la direction y
DYG	: Paramètre du maillage dans la direction y
e	: Energie totale
E_i	: Energie interne
E_c	: Energie cinétique
E	: Coefficient du noeud P (programme)
$f(x)$: Perturbation de vitesse (onde acoustique)
F	: Nombre de convection, coefficient du noeud E (programme)
\mathbf{F}	: Vecteur flux (équations d'Euler 2D)
g	: Accélération de la gravité
G	: Opérateur des cinq noeuds voisins (équation de l'énergie)
h	: Hauteur des obstacles
H	: Coefficient du noeud N (programme)
H_u	: Opérateur des cinq noeuds voisins (équation de quantité de mouvement selon x)
H_v	: Opérateur des cinq noeuds voisins (équation de quantité de mouvement selon y)
J	: Flux de convection diffusion, opérateur de dissipation visqueuse
j	: indice de maille selon x
jx	: Nombre de noeuds dans la direction x
k	: indice de maille selon y
kx	: Nombre de noeuds dans la direction y
K	: Constante (conditions limites non-refléchissantes)
l	: Largeur du domaine
\mathbf{l}	: Vecteur propre à gauche
L	: Longueur du domaine
\mathbf{L}	: Vecteur des amplitudes des ondes caractéristiques
M	: Nombre de Mach
$\vec{\mathbf{n}}$: Vecteur normal
P	: Pression
Pe	: Nombre de Peclet
\mathbf{P}	: Matrice de passage des variables primitives aux variables conservatives
P_r	: Nombre de prandtl
Q	: Source terme dans l'équation de l'énergie
\mathbf{Q}	: Matrice de passage, second membre d'un système linéaire

r : Constante des gaz parfaits
 \mathbf{r} : Vecteur propre à droite
 R : Rayon
 R_e : Nombre de Reynolds
 S : Source terme
 \mathbf{S} : Matrice diagonalisante pour \mathbf{A}
 t : Temps
 T : Température
 T_r : Taux de reflection
 u : Composante de la vitesse selon x
 \mathbf{U} : Vecteur de variables primitives
 $\tilde{\mathbf{U}}$: Vecteur des variables conservatives
 v : Composante de la vitesse selon y
 \vec{V} : Vecteur vitesse
 W : Variable caractéristique
 x : Première coordonnée Cartésienne
 y : Seconde coordonnée Cartésienne

Lettres Greques

ρ : Densité
 μ : Viscosité dynamique
 κ : Conductivité thermique, normale à la frontière
 γ : Rapport des chaleurs spécifiques
 ϕ : Variable transportée
 Γ : Coefficient de diffusion, contour de l'element de volume
 Ω : Volume d'intégration
 δx : Taille de maille selon x
 δy : Taille de maille selon y
 λ : Valeurs propres de la matrice \mathbf{A}
 σ : Constante (CL non réfléchissantes), contrainte visqueuse, ecart type
 ψ : Fonction de courant
 ω : Pulsation
 τ : Vecteur tangent à la frontière

Indices supérieures

$+$: Partie positive
 $-$: Partie négative
 $*$: Première approximation (PISO)
 $**$: Seconde approximation (PISO)
 $***$: Troisième approximation (PISO)
NSCBC: Obtenue sur la frontière par l'algorithme NSCBC
 n : Pas de temps n
 $n + 1$: Pas de temps $n + 1$

Indices inférieures

c : Cinétique
 i : Interne
 x : Suivant la direction x
 y : Suivant la direction y
 e : Milieu de la face Est
 E : Noeud voisin Est

<i>s</i>	: Milieu de la face Sud
<i>S</i>	: Noeud voisin Sud
<i>n</i>	: Milieu de la face Nord
<i>N</i>	: Noeud voisin Nord
<i>w</i>	: Milieu de la face Ouest
<i>W</i>	: Noeud voisin Ouest
<i>ou</i>	: Coefficient central (équation de quantité de mouvement <i>u</i>)
<i>ov</i>	: Coefficient central (équation de quantité de mouvement <i>v</i>)
<i>o</i>	: Coefficient central (équation de quantité de l'énergie <i>e</i>)
<i>o</i>	: Grandeur de référence
<i>u</i>	: Relatif à l'équation de quantité de mouvement selon <i>x</i>
<i>v</i>	: Relatif à l'équation de quantité de mouvement selon <i>y</i>

Abbreviations

NSCBC:	Navier Stokes Characteristic Boundary Conditions
CFL	: Nombre de Courant Friedrichs Levy
SIP	: Strongly Implicit Procedure
CFD	: Computational Fluid Dynamics
PISO	: Pressure Implicit Splitting Operator
MSI	: More Strongly Implicit
CL	: Conditions aux Limites
ADI	: Alternating Direction Implicit
LODI	: Local One Dimensional Inviscid
EPP	: Equation de Poisson pour la Pression

Table des matieres

1	INTRODUCTION	1
2	MODELE NUMERIQUE	3
2.1	Equations de transport	3
2.2	Equations de la thermostatique	4
2.3	Coefficients de transport	4
3	METHODE NUMERIQUE	5
3.1	Méthode de discrétisation	5
3.2	Coordonnées et système de vecteurs de base	6
3.3	Maillage	6
3.4	Approximations finies	6
3.4.1	Evaluation des intégrales de surface	7
3.4.2	Evaluation des intégrales de volume	8
3.4.3	Interpolations	8
3.4.4	Cas du maillage non-uniforme	11
3.5	Détails de la discrétisation spatiale	12
3.5.1	Forme générale de l'équation discrétisée	12
3.5.2	Equation de quantité de mouvement	12
3.5.3	Equation de l'énergie	14
3.6	Discrétisation temporelle	16
3.7	Algorithme PISO	16
3.7.1	Procédure de fractionnement	17
3.8	Résolution des systèmes d'équations	20
4	VALIDATION DU CODE DE CALCUL	23
4.1	Test du nouveau code sur maillage uniforme	23
4.2	Test du nouveau code sur maillage non-uniforme	24
4.3	Supression des obstacles et changement de conditions aux limites	26
4.4	Validation du nouveau code	28
4.4.1	Solution analytique	28
4.4.2	Configuration étudiée	28
4.4.3	Paramètres de l'essai	29
4.4.4	Résultats et interprétation	30
4.5	Conclusion	33
5	CONDITIONS AUX LIMITES CARACTERISTIQUES	34
5.1	Introduction	34
5.2	Bases théoriques - Analyse caractéristique pour les équations d'Euler	35
5.2.1	Cas général - Système hyperbolique multidimensionnel	35
5.2.2	Application - Cas des équations d'Euler bidimensionnelles	39
5.3	Méthode NSCBC	41
5.4	Implémentation de la méthode NSCBC dans notre code calcul	42
5.4.1	Procédure générale	42

5.4.2	Modification des équations sur la frontière	43
5.4.3	Configuration étudiée - Choix des conditions aux limites	43
5.4.4	Calcul des inconnues principales sur la frontière à l'instant $t = (n + 1)$	44
5.4.5	Discretisation des équations sur la frontière	45
5.4.6	Conditions aux limites aux instants intermédiaires	47
6	TEST DES CONDITIONS AUX LIMITES CARACTERISTIQUES	53
6.1	Introduction	53
6.2	Écoulement uniforme	53
6.3	Onde entropique	54
6.3.1	Paramètres de l'essai:	54
6.3.2	Résultats	55
6.4	Onde acoustique monodimensionnelle	56
6.4.1	Configuration	56
6.4.2	Paramètres des essais	57
6.4.3	Résultats	58
6.5	Vortex advecté par un écoulement uniforme	63
6.5.1	Configuration	63
6.5.2	Paramètres des essais	64
6.5.3	Résultats	64
6.5.4	Analyse des résultats - Problèmes rencontrés	65
7	CONCLUSION	68

Résumé

La simulation numérique d'un écoulement requiert la spécification de conditions limites sur les frontières. Lorsque la frontière considérée ne correspond pas à une frontière physique (paroi, axe de symétrie, interface solide-liquide, ...), la frontière est dite ouverte. Tel est le cas de la frontière de sortie d'un jet plan, ou d'un sillage. La spécification de conditions limites adéquate sur les frontières ouvertes est une difficulté majeure pour la simulation numérique. Dans le présent travail, on propose une méthode d'implémentation d'un algorithme de conditions aux limites ouvertes bien connu (NSCBC) à un code de calcul Navier Stokes compressible implicite avec correction de pression. Le travail comprends quatre parties essentielles: Un code originalement développé pour les écoulements de jets sur maillage uniforme est modifié pour intégrer un maillage non-uniforme. Le code est testé sur différentes configurations pour attester de son bon fonctionnement. La méthode NSCBC est présentée et une méthode d'implémentation a notre code de calcul est proposée. La validation des conditions aux limites ainsi obtenues est effectuée a l'aide d'une serie de tests incluant l'onde entropique, l'onde acoustique et le vortex advecté pas un écoulement uniforme. Des résultats intéressants sont obtenus. Les limitations de notre algorithme sont discutées et des suggestions proposées.

Chapitre 1

INTRODUCTION

Il y a quelque décades les calculs scientifiques se faisaient encore à la main. Certains savants ont passé des années à remplir des pages de calcul pour aboutir à des résultats considérés aujourd'hui dérisoires. Le grand développement des moyens de calcul (ordinateurs) en puissance et en capacité durant les 30 dernières années a révolutionné le monde des sciences et de la technologie. On est en mesure à présent de calculer, l'écoulement de l'air autour d'un avion, la réaction nucléaire d'une bombe atomique, la trajectoire complète d'un missile et bien d'autres phénomènes physiques extrêmement complexes. Les softwares et méthodes numériques ont également subi un grand développement, dû à l'intérêt suscité par la disponibilité de ces moyens de calculs.

Parmi les domaines qui ont trouvé un vaste champs d'applications pour ces méthodes numériques, la Mécanique des Fluides occupe une place de choix. En effet, les équations de base qui régissent les écoulement des fluides sont semblables aux équations modèles utilisées dans les autres domaines. L'ordinateur et les programmes sont là pour permettre la simulation complète d'un écoulement donné. Par *simulation*, on entend la détermination des champs de vitesse, pression, température, densité, concentration (et bien d'autres grandeurs) ainsi que leur évolution avec le temps. Le principe d'une simulation numérique repose sur la discrétisation par des méthodes de type différences finies des équations aux dérivées partielles qui gouvernent la conservation des différentes variables. A cette fin, une discrétisation spatiale est effectuée en premier lieu. Celle-ci consiste à choisir un maillage qui va définir des noeuds où les variables de l'écoulement seront calculées. On remplace ainsi un milieu continu par un système discret. Dans une deuxième étape, les équations du mouvement sont discrétisées en chaque noeud par intégration (volumes-finis), séries de Fourier (méthode spectrales), séries de Taylor (différences finies) ou bien series de fonctions orthogonales (éléments-finis). Le résultat, est un système d'équations en général non-linéaires qui est résolu par une méthode numérique appropriée. Des conditions initiales et aux limites complètent le problème.

Tous les écoulements de fluide sont régis par les mêmes équations au niveau d'approximation utilisé près (on peut aussi utiliser des équations simplifiées, mais elles sont dérivées des équations de Navier-Stokes et leur solution n'est donc qu'un cas particulier ou limite de ces dernières). *La seule différence qui existe donc entre deux écoulements donnés est imposée par les conditions aux limites.* Il n'est donc pas surprenant que le choix et l'implémentation des aux conditions limites dans un code de calcul est une opération cruciale à laquelle trop souvent il n'est pas accordée l'importance requise. Ce la provient aussi du fait, qu'en pratique, on ne connaît pas la solution du problème au préalable et on ne sait donc pas a priori quelles conditions aux limites s'appliquent. Ainsi, on simplifie souvent le problème, par exemple en "*assumant une paroi isotherme*", ce qui donne une condition aux limites de Dirichlet très facile à implanter pour la température $T = \text{constante}$. Cela se justifie en l'absence d'informations valides, mais ne peut conduire à une solution précise que si l'on est assuré qu'en pratique, cela est bien vérifié.

Parmi les différents types de frontière qu'on rencontre en pratique (entrée, paroi glissante, paroi non-glissante, axe de symétrie, sortie), la frontière de sortie est l'une des plus difficiles à traiter. Très souvent, l'écoulement est considéré établi à la section de sortie ce qui permet d'utiliser des conditions aux limites de type "*gradient normal de toutes les variables égal à zéro*". Ceci n'est valide que si la frontière de sortie est suffisamment éloignée de l'entrée (domaine de calcul très long). Si

de plus l'écoulement acquiert un caractère tourbillonnaire à la sortie, l'écoulement ne peut pas être considéré établi. La prescription des conditions aux limites dans ce cas précis devient un problème délicat pour lequel beaucoup reste à faire.

C'est dans cette optique que se situe notre travail. On se propose d'implémenter un algorithme de conditions aux limites à un code de calcul Navier-Stokes implicite, en volumes finis et utilisant les variables conservatives. Les trois derniers points mentionnés constituent notre apport personnel car l'algorithme de conditions aux limites que l'on se propose d'utiliser existe déjà, mais est utilisé sur des codes explicites en différences finies. Nous nous proposons donc de réaliser une extension de ces conditions aux limites. Une autre difficulté pour nous, réside dans le fait que la méthode que nous utilisons est une méthode à pas fractionnaires et qu'il nous faut donc des conditions aux limites aux instants intermédiaires.

Notre travail consiste donc à mettre au point un code de calcul incorporant un traitement particulier des conditions aux limites à la sortie et qui pourrait être utilisé pour la simulation d'écoulements convectivement instables générant beaucoup de tourbillons. Il est connu que les instabilités hydrodynamiques sont très sensibles aux perturbations extérieures qu'elles amplifient. Il est donc impératif de disposer de conditions aux limites qui ne réfléchissent pas d'ondes parasites dans l'écoulement.

Le plan de notre travail est le suivant:

Il démarre d'un code de calcul développé initialement à l'institut de Mécanique des Fluides de Toulouse pour la simulation des écoulements instationnaires faiblement compressibles et utilisant la méthode à pas fractionnaires PISO. Ce code qui est écrit en maillage uniforme, doit être dans une première étape modifié pour permettre la simulation en maillage non-uniforme. Ceci, pour être en mesure de raffiner notre maillage dans les zones nécessitant une plus grande précision sans avoir à réduire la taille de maille dans le reste du domaine, permettant ainsi de réduire considérablement le temps de calcul et la place mémoire nécessaires. Dans une deuxième étape, un algorithme de conditions aux limites sera mis au point et implanté à la frontière de sortie de l'écoulement. La troisième étape consiste à valider l'algorithme sur une série de tests soigneusement choisis.

Le mémoire est organisé de la façon suivante:

Après la présente introduction, les équations modèles utilisées ainsi que les hypothèses qui les accompagnent sont présentées dans le chapitre II. Le chapitre suivant (III) décrit la méthode numérique utilisée, la procédure de discrétisation employée, les équations obtenues ainsi que la méthode de résolution du couplage par la méthode PISO. Puisque, cette phase constitue une grande part de travail personnel et apporte un certain nombre d'innovations, elle est présentée de manière détaillée. Dans le chapitre IV, on présente les tests du nouveau code en maillage non-uniforme. Ceux-ci comportent une comparaison avec l'ancien code et une validation avec des résultats publiés. Le chapitre V introduit le nouvel algorithme de conditions aux limites. Après un rappel théorique sur les fondements de la méthode, nous présentons l'algorithme NSCBC (qui sert de base à notre travail) ainsi que les différentes étapes qui ont mené à son élaboration. Ultérieurement, on présente notre procédure d'implémentation de manière détaillée. Le nouvel algorithme est mis au banc d'essai dans le chapitre VI qui présente les différents tests choisis pour sa validation. Enfin, on termine ce travail par une conclusion générale donnée dans le chapitre VII.

Chapitre 2

MODELE NUMERIQUE

Nous nous intéressons essentiellement à l'implémentation de conditions aux limites pour les équations de Navier-Stokes en situation compressible et sous forme conservative. Ces équations qui servent de base à toute notre étude, sont données ci-après.

2.1 Equations de transport

La conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont décrites par les relations suivantes:

Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

Equations de quantité de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Equation de l'énergie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho u e}{\partial x} + \frac{\partial \rho v e}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\kappa}{c_v} \frac{\partial e}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\kappa}{c_v} \frac{\partial e}{\partial y} \right) + \rho u g_x + \rho v g_y - \frac{\partial P u}{\partial x} - \frac{\partial P v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\kappa}{c_v} \frac{\partial E_c}{\partial x} \right) \\ &- \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\kappa}{c_v} \frac{\partial E_c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_{xx} + v \sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \sigma_{xy} + v \sigma_{yy}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

où

- u : Composante selon x de la vitesse.
- v : Composante selon y de la vitesse.
- ρ : Masse volumique.
- P : Pression.
- T : Température.
- e : Energie totale (Energie interne E_i + Energie cinétique E_c).
- E_c : Energie cinétique $\frac{1}{2}(u^2 + v^2)$.
- c_v : Chaleur spécifique à volume constant.
- μ : Viscosité dynamique.
- κ : Conductivité thermique.
- g_x : Composante selon x de l'accélération de la pesanteur.

g_y : Composante selon y de l'accélération de la pesanteur.

$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$: Contraintes visqueuses.

Ce système d'équations constitue la forme conservative des équations de Navier-Stokes pour un fluide compressible en situation bidimensionnelle. Le modèle est basé sur les hypothèses suivantes :

Hypothèses :

1. Milieu continu.
2. Ecoulement monophasique.
3. Les forces de volume se réduisent aux seules forces de pesanteur.
4. La conduction de la chaleur obéit à la loi de Fourier : $q = -\kappa \nabla T$
5. Fluide Newtonien: Les contraintes visqueuses sont données par la loi de Newton-Stokes:

$$\sigma_{xx} = 2 \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] \right) \quad (2.5)$$

$$\sigma_{yy} = 2 \left(\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] \right) \quad (2.6)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (2.7)$$

2.2 Equations de la thermostatique

Le système précédent est complété par les deux équations de la thermostatique:

Equation d'état Reliant densité, pression et température

$$P = \rho r T \quad (2.8)$$

Relation thermodynamique Expriment l'énergie interne pour un gaz parfait.

$$E_i = c_v T \quad (2.9)$$

2.3 Coefficients de transport

Des relations supplémentaires permettent de relier les propriétés physiques du fluide aux variables thermodynamiques:

Viscosité dynamique Elle est donnée par la loi de Sutherland:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1 + \frac{S}{T_0}}{1 + \frac{S}{T}} \quad (2.10)$$

Conductivité thermique On utilise la relation suivante où l'on considère γ (rapport des chaleurs spécifiques) et P_r (nombre de Prandtl) sensiblement constants et ne dépendent donc pas de la température T :

$$\frac{\kappa}{c_v} = \frac{\mu \gamma}{P_r} \quad (2.11)$$

Chapitre 3

METHODE NUMERIQUE

3.1 Méthode de discrétisation

La discrétisation du système d'équation aux dérivées partielles (2.1–2.4) est effectuée par la méthode des volumes finis. C'est donc la forme intégrale des équations de transport qui est utilisée. Le domaine de calcul est subdivisé en un nombre fini de volumes élémentaires contigus, entourant chacun un noeud où la variable est définie, et les équations sont intégrées sur chacun de ces volumes. A cette fin, chaque équation de transport est mise sous la forme conservative générale suivante:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V} \phi) = \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) + S_\phi \quad (3.1)$$

où ϕ désigne la variable transportée, S_ϕ le terme source dans lequel sont inclus les termes diffusifs normaux à $\nabla \phi$ (voir Table 3.1).

Equation	Variable transportée	Variable conservée	Diffusion Γ_ϕ	Terme source S_ϕ
Continuité	1	ρ	0	0
Quantité de mvnt x	u	ρu	μ	$\rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} [\mu (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})]$
Quantité de mvnt y	v	ρv	μ	$\rho g_y - \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} (\mu \frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (\mu \frac{\partial u}{\partial y}) - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} [\mu (\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y})]$
Energie	e	ρe	$\frac{\kappa}{c_v}$	$\rho u g_x + \rho v g_y - \frac{\partial P u}{\partial x} - \frac{\partial P v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (\frac{\kappa}{c_v} \frac{\partial E_c}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\kappa}{c_v} \frac{\partial E_c}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x} (u \sigma_{xx} + v \sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \sigma_{xy} + v \sigma_{yy})$

Table 3.1: Forme conservative des équations

Après intégration de cette équation sur un volume élémentaire Ω de frontière S et transformation des intégrales de volume en intégrales de surface par la formule de Green, on obtient la forme suivante:

$$\underbrace{\iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} d\Omega}_a + \underbrace{\iint_S \rho \vec{V} \phi \vec{n} ds}_b = \underbrace{\iint_S \Gamma_\phi \nabla \phi \vec{n} ds}_c + \underbrace{\iiint_{\Omega} S_\phi d\Omega}_d \quad (3.2)$$

dans laquelle \vec{n} désigne la normale sortante à l'élément de surface ds . Cette équation traduit l'équilibre entre la variation de $\rho \phi$ dans l'élément de volume, le flux de $\rho \phi$ à travers la frontière S par diffusion et convection et, la génération de $\rho \phi$ par le terme source. ϕ est la variable transportée alors que $\rho \phi$ est la variable qui se conserve.

La discrétisation numérique démarre de l'équation 3.2. Les intégrales de volume et de surface sont évaluées par des quadratures appropriées et les valeurs des variables nécessaires sur les faces du volume d'intégration sont obtenues par interpolation.

L'écriture des équations discrétisées en chaque noeud du domaine conduit à un système algébrique d'équations reliant les valeurs de la variable $\rho \phi$ aux différents noeuds du domaine de calcul. La résolution de ce système fournit la solution recherchée. Notons que les inconnues principales sont les variables conservatives $\rho \phi$ ($\phi = 1, u, v, e$).

3.2 Coordonnées et système de vecteurs de base

Les coordonnées utilisées sont les coordonnées cartésiennes et les vecteurs sont définis par leurs composantes cartésiennes dans un repère fixe. En particulier, le vecteur vitesse a pour composantes u suivant x et v suivant y dans le cas bidimensionnel.

3.3 Maillage

Le maillage utilisé est un maillage structuré orthogonal, formé de lignes parallèles aux axes de coordonnées et donc aux composantes du vecteur vitesse. C'est un maillage de type décalé, identique à celui introduit par Harlow and Welsh [8] pour la méthode MAC. Les différentes variables ne sont pas définies aux mêmes noeuds. Les grandeurs transportées ϕ autres que la vitesse (ρ, T, e, \dots) ainsi que la pression P , sont définies aux noeuds principaux (Intersections des lignes de maillage principal), alors que les composantes de la vitesse sont décalées d'une demi-maille dans le sens des axes de coordonnées par rapport aux noeuds principaux (voir Fig. 3.1). Les volumes d'intégration aussi diffèrent : Ils entourent chacun un noeud où est définie la variable principale de l'équation considérée.

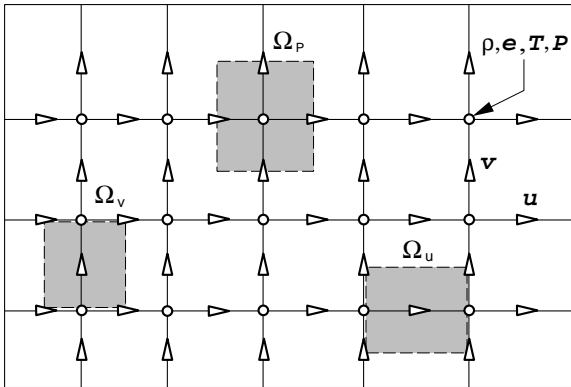


Figure 3.1: Maillage, Noeuds et volumes d'intégration

- Ω_u est le volume d'intégration de l'équation de quantité de mouvement selon x ($\phi = u$).
- Ω_v est le volume d'intégration de l'équation de quantité de mouvement selon y ($\phi = v$).
- Ω_P est le volume d'intégration des équations de continuité et de l'énergie ($\phi = 1, e$ resp.).

Selon la variable ϕ , le volume d'intégration est du type (a) noeud au centre de la cellule (b) faces centrées entre les noeuds (c) mixte.

Une attention particulière doit-être accordée au traitement des indices lors de la programmation. On utilise généralement la convention suivante:

$$\begin{aligned}
 \Phi(J, K) &= \phi_{j,k} \\
 U(J, K) &= u_{j+\frac{1}{2},k} \\
 V(J, K) &= v_{j,k+\frac{1}{2}}
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

où Φ , U et V désignent les variables programme représentant respectivement ϕ , u and v .

3.4 Approximations finies

La discrétisation opère sur l'équation 3.2. Il s'agit donc d'évaluer des intégrales de surface et de volume. En situation bidimensionnelle (dans le plan x,y), les grandeurs de l'écoulement sont indépendantes de la troisième coordonnée z . On considère donc des éléments de volume d'épaisseur unité suivant z . Les intégrales de volume se ramènent alors à des intégrales de surface et les intégrales de surface à des intégrales le long d'un contour (car les intégrales sur les deux faces perpendiculaires à l'axe z s'annulent mutuellement).

Considérons le cas où la variable ϕ est définie aux noeuds principaux (les cas $\phi = u, v$ sont traités de façon similaire). La figure 3.2 représente un élément de volume typique Ω entourant le point P

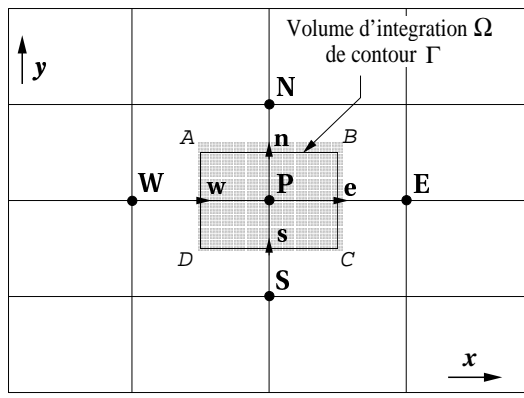


Figure 3.2: Repérage des noeuds et volumes d'intégration

où est définie la variable ϕ . Les intégrales de volume sur Ω se ramènent à une intégrale sur l'aire du rectangle ABCD alors que les intégrales de surface se ramènent à une intégrale le long du contour ABCD.

3.4.1 Evaluation des intégrales de surface

Considérons l'élément de volume Ω de la figure 3.2, et soit à évaluer l'intégrale sur son contour Γ

$$\int_{\Gamma} f ds \quad (3.4)$$

où ds désigne l'élément de contour. Pour $f = \rho\phi\vec{V}\cdot\vec{n}$, l'intégrale 3.4 représente le flux convectif de $\rho\phi$ à travers Γ alors que pour $f = \Gamma_{\phi}\nabla\phi\cdot\vec{n}$ elle représente le flux diffusif de $\rho\phi$ à travers Γ . L'évaluation de l'intégrale 3.4 se fait en trois étapes:

1ère Etape L'intégrale sur le contour Γ est subdivisée en intégrales élémentaires le long de chacune des quatre (4) faces Γ_k ($k=1,\dots,4$) du contour:

$$\int_{\Gamma} f ds = \sum_{k=1}^4 \int_{\Gamma_k} f ds \quad (3.5)$$

2ème Etape L'intégrale sur une face Γ_k du contour est obtenue par la règle du point milieu (midpoint-rule) qui est précise à l'ordre deux par rapport au pas spatial (taille de la maille). Cette règle consiste à approximer l'intégrale sur Γ_k par le produit de la valeur f_k de la grandeur f au milieu du segment Γ_k et de la longueur du segment Γ_k :

$$\int_{\Gamma_k} f ds = f_k \Gamma_k \quad (3.6)$$

A titre d'exemple, l'intégrale sur la face Est Γ_e (segment BC) du contour (voir figure 3.2) est approximée par :

$$\int_{\Gamma_e} f ds = f_e BC \quad (3.7)$$

Pour obtenir une précision supérieure à l'ordre deux (2), il faut utiliser des quadratures faisant intervenir un plus grand nombre de points. Les matrices qui en résultent sont plus complexes, donc plus difficiles à inverser et plus coûteuses en temps de calcul et place mémoire. De plus, le traitement des noeuds au voisinage des frontières nécessite alors un traitement spécial. Nous avons donc opté pour une précision d'ordre deux.

3ème Etape L'évaluation de f au milieu du segment Γ_k nécessite les valeurs de $\rho\phi$ ainsi que d'autres variables au même point. Celles-ci sont obtenues par interpolation en fonction des valeurs aux noeuds voisins. Afin de préserver la précision du schéma, les interpolations utilisées doivent être du même ordre que pour les intégrales (ordre 2). Les différents schémas d'interpolation sont présentés dans la section "Interpolations".

Règle importante :

Il est essentiel que les flux à travers une face soient calculés par des formules indépendantes des volumes adjacents afin que la propriété de conservation globale soit préservée.

3.4.2 Evaluation des intégrales de volume

Considérons à présent le terme source (d) de l'équation 3.2 que l'on intègre sur le volume Ω de la figure 3.2. C'est une intégrale de volume de la forme :

$$\iint_{\Omega} q d\Omega \quad (3.8)$$

où l'on rappelle qu'en situation bidimensionnelle, Ω est la surface du rectangle ABCD. L'approximation du second ordre la plus simple pour 3.8 consiste à évaluer l'intégrale par le produit de la valeur de q au centre P de Ω par l'aire du rectangle:

$$\iint_{\Omega} q d\Omega = q_p \cdot AB \cdot CD \quad (3.9)$$

3.4.3 Interpolations

Variable transportée ϕ : I. Généralités

Revenons à l'évaluation des intégrales de surface précédentes de l'équation 3.2. Ces intégrales représentent respectivement le flux de convection et le flux de diffusion à travers la frontière d'un élément de volume. Considérons l'une des quatre faces de l'élément de volume Ω de la figure 3.2, par exemple la face BC (la même démarche s'applique pour les autres faces). L'évaluation de l'intégrale sur la face BC requiert la valeur au point e du flux par unité de surface

$$J' = \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (3.10)$$

Supposons que l'inconnue principale soit la variable ϕ (c'est le cas lorsque l'on utilise les variables primitives; le cas des variables conservatives qui nous intéresse sera traité ultérieurement). Les autres variables sont alors supposées connues sur la frontière et il faut exprimer d'une part la valeur de ϕ et d'autre part celle du gradient $\partial\phi/\partial x$ au point e en fonction des valeurs de ϕ aux noeuds voisins où elles sont définies (Points P et E par exemple).

CONVECTION

Un grand nombre de schémas d'interpolation couramment utilisés existent pour le terme de convection $\rho u \phi$. Le choix doit s'effectuer en fonction de :

- La précision.
- La stabilité.
- La diffusion numérique.
- Les oscillations engendrées.

On citera parmi les plus importants:

Le schéma centré : Il consiste à utiliser un profil linéaire entre les points P et E, conduisant à:

$$\begin{aligned} \phi_e &= \lambda_e \phi_e + (1 - \lambda_e) \phi_P \\ \lambda_e &= \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ce schéma est précis au second ordre mais peut produire des oscillations de la solution.

Le schéma décentré amont : Il tient compte du sens de l'écoulement:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_P & \text{si } u_e > 0 \\ \phi_E & \text{si } u_e < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

C'est un schéma qui n'est précis qu'au premier ordre et qui introduit une importante diffusion numérique. Toutefois, il ne produit jamais d'oscillations et il est inconditionnellement stable.

DIFFUSION

Considérons à présent le terme de diffusion $\Gamma \partial\phi/\partial x$. La dérivée en x peut être approximée simplement par :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e = \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} \quad (3.13)$$

Cette évaluation est précise au second ordre lorsque le maillage est uniforme (point e au milieu du segment PE).

CONVECTION + DIFFUSION

L'étude approfondie d'un grand nombre de schémas d'interpolation a permis d'aboutir à l'élaboration d'une classe de schémas très performants, dont la principale caractéristique est qu'ils sont basés sur la nature physique de la solution plutôt que sur la précision du schéma. L'étude de l'influence de l'importance relative de la convection et de la diffusion sur la nature de la solution a permis de donner naissance aux schémas suivants:

Le schéma exponentiel : Il suppose que le profil entre P et E est représenté par la solution exacte de l'équation de convection-diffusion monodimensionnelle et cette courbe est utilisée pour effectuer les interpolations. Toutefois, ce schéma n'est pas exact dans le cas bidimensionnel avec termes sources, et le temps de calcul important nécessaire pour l'évaluation d'exponentielles le pénalise.

Le schéma hybride : Il combine les schémas centré et décentré amont pour mieux se rapprocher du schéma exponentiel tout en assurant une bonne stabilité.

si $-2 < Pe < 2$ on utilise le schéma centré

si $|Pe| > 2$ on utilise le schéma amont

avec $Pe = \frac{\rho u(x_E - x_P)}{\Gamma}$ (nombre de Peclet local au point e).

Le schéma de puissance : C'est le schéma recommandé. Il est presque aussi précis que le schéma exponentiel et nécessite moins de temps de calcul. Le profil exponentiel est ici approximé par une courbe puissance du 5ème ordre.

Variable transportée ϕ : II. Formule générale d'interpolation

Patankar [17] a développé un formalisme général qui regroupe les cinq schémas précédents en une seule formule. On peut ainsi changer de schéma très simplement rien qu'en ajustant la valeur d'un paramètre.

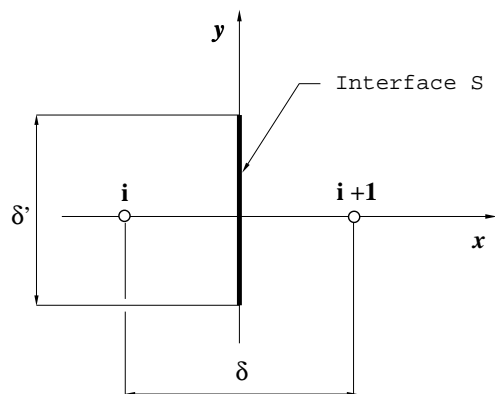


Figure 3.3: Nomenclature de l'interface pour le calcul du flux

Considérons l'interface S de hauteur δ' située entre les noeuds principaux i et $i+1$ (voir figure 3.3). Le flux (convection + diffusion) à travers l'interface S

$$\begin{aligned} J &= \delta' \left(\rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ &= \delta' J' \end{aligned} \quad (3.14)$$

s'exprime en fonction des valeurs de ϕ aux noeuds i et $i+1$ à travers l'une des deux formules générales suivantes:

$$J' = \frac{\rho}{\delta'} \left(A'(\phi_i - \phi_{i+1}) + F\phi_i \right) \quad (3.15)$$

$$J' = \frac{\rho}{\delta'} \left(B'(\phi_i - \phi_{i+1}) + F\phi_{i+1} \right) \quad (3.16)$$

dans lesquelles les coefficients A' et B' sont fonctions du schéma d'interpolation utilisé:

$$\begin{aligned} A' &= D\mathcal{A}(Pe) + \|-F, 0\| \\ B' &= D\mathcal{A}(Pe) + \|F, 0\| \end{aligned} \quad (3.17)$$

Dans ces expressions, les nombres Pe , F et D définis localement au milieu de l'interface, représentent respectivement le nombre de Peclet, le nombre de convection et le nombre de diffusion:

$$\begin{aligned} Pe &= \frac{\rho u \delta}{\Gamma} \\ F &= u \delta' \\ D &= \frac{\Gamma \delta'}{\rho \delta} \end{aligned} \quad (3.18)$$

La fonction \mathcal{A} est une fonction du nombre de Peclet qui dépend du schéma d'interpolation choisi. Son expression est donnée dans le tableau 3.2. L'opérateur $\|.,.\|$ retourne la valeur du plus grand de ses deux arguments.

	<i>Formule</i>	<i>Schéma</i>
$\mathcal{A}(Pe)$	$-0.5 Pe $	Centré
	1	Amont
	$\ 0, 1 - 0.5 Pe \ $	Hybride
	$\ 0, (1 - 0.1 Pe)^5 \ $	Puissance
	$\frac{ Pe }{\exp(Pe)-1}$	Exponentiel

Table 3.2: Les cinq schémas d'interpolation

Il est à noter que cette formulation est limitée aux schémas d'interpolation à deux points (i et $i + 1$).

Variable transportée ϕ : III. Cas des variables conservatives :

L'utilisation des résultats précédents nécessite quelques transformations dans le cas où les inconnues principales sont les variables conservatives. Il faut alors exprimer le flux J en fonction de la variable $\phi' = \rho\phi$. Nous avons procédé de la façon suivante:

$$\begin{aligned} J &= \delta' J' \\ &= \delta' \left(\rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\delta'}{\rho} \underbrace{\left(\rho u \phi' - \Gamma \frac{\partial \phi'}{\partial x} \right)}_j + \frac{\Gamma \phi \delta'}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.19)$$

On peut alors utiliser les formules 3.15-3.16 pour évaluer le terme j et on obtient les deux formules générales suivantes:

$$J = A'[(\rho\phi)_i - (\rho\phi)_{i+1}] + F(\rho\phi)_i + \delta D \frac{\partial \rho}{\partial x} \phi_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

$$J = B'[(\rho\phi)_i - (\rho\phi)_{i+1}] + F(\rho\phi)_{i+1} + \delta D \frac{\partial \rho}{\partial x} \phi_{i+\frac{1}{2}} \quad (3.21)$$

avec

$$\begin{aligned} A' &= D\mathcal{A}(Pe) + \|-F, 0\| \\ B' &= D\mathcal{A}(Pe) + \|F, 0\| \end{aligned} \quad (3.22)$$

La valeur de ϕ au noeud $i + \frac{1}{2}$ représente la valeur de ϕ sur l'interface S. Les différents coefficients D , F , Pe , ρ , $\partial\rho/\partial x$, A' , B' sont évalués également au milieu de l'interface S.

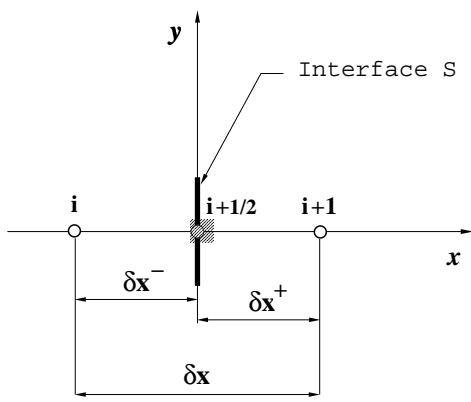


Figure 3.4: Nomenclature pour les interpolations de μ et κ

Coefficients de transport μ et κ :

La consistance des flux sur une interface entre deux volumes adjacents (1ère règle de Patankar) requiert que le flux sortant d'un élément de volume à travers une face soit identique au flux rentrant dans l'élément de volume adjacent à travers la même face. Afin de ne pas violer cette règle, la valeur du flux sur une interface $i + \frac{1}{2}$ doit-être évaluée en utilisant une valeur de μ (ou κ) qui sera identique pour les deux volumes de contrôle centrés aux noeuds i et $i + 1$.

Pour évaluer le flux de chaleur par conduction à travers l'interface $i + \frac{1}{2}$ (voir figure 3.4), on peut utiliser la formule

$$q = -\kappa_{i+\frac{1}{2}} \frac{T_{i+1} - T_i}{\delta x} \quad (3.23)$$

dans laquelle $\kappa_{i+\frac{1}{2}}$ représente la valeur de la conductivité thermique à l'interface $i + \frac{1}{2}$. Celle-ci peut être obtenue par interpolation linéaire mais, comme le montre Patankar [17], une évaluation plus précise est donnée par la formule

$$\frac{1}{\kappa_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{\delta x^- / \delta x}{\kappa_i} + \frac{\delta x^+ / \delta x}{\kappa_{i+1}} \quad (3.24)$$

Si l'interface est située au milieu du segment $[i, i + 1]$, cette formule se réduit à

$$\frac{1}{\kappa_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\kappa_i} + \frac{1}{\kappa_{i+1}} \quad (3.25)$$

où l'on peut constater que $\kappa_{i+\frac{1}{2}}$ est la moyenne harmonique de κ_i et κ_{i+1} .

Autres variables :

Après avoir défini les interpolations utilisées pour la variable transportée ϕ et les coefficients de transport, il reste à définir les interpolations nécessaires pour obtenir les autres variables sur l'interface.

De manière générale, si la variable n'est pas définie au point considéré, on utilise une interpolation linéaire qui est précise à l'ordre deux (toujours avec le soucis de préserver la précision globale du schéma).

3.4.4 Cas du maillage non-uniforme

Que deviennent les approximations précédentes dans le cas d'un maillage non-uniforme? Dans ce cas, en effet, les noeuds utilisés pour le calcul ne sont ni exactement au centre de l'élément de volume ni au milieu des faces du contour. Dans les zones où le maillage est non-uniforme, les approximations précédentes ne sont plus du second ordre et la précision dépend du rapport r entre deux mailles consécutives. L'erreur de troncature est généralement proportionnelle à $(1 - r)\delta x$ et c'est pourquoi il est nécessaire de ne pas dépasser des valeurs de r de l'ordre de 1,15 en pratique, afin que la précision reste supérieur à l'ordre un. Vu que les zones à forts gradients sont physiquement de longueur constante, un raffinement du maillage entraîne l'augmentation du nombre de mailles qui induit une diminution du facteur r qui se rapproche à nouveau de l'unité et l'on retrouve ainsi une précision d'ordre deux.

3.5 Détails de la discrétisation spatiale

3.5.1 Forme générale de l'équation discrétisée

Quelle que soit la variable ϕ , la discrétisation de l'équation de conservation 3.2 effectuée selon la méthode décrite dans les sections précédentes, conduit à une équation de la forme:

$$\underbrace{\Omega \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}_a = \underbrace{a_E(\rho\phi)_E + a_W(\rho\phi)_W + a_N(\rho\phi)_N + a_S(\rho\phi)_S + a_P(\rho\phi)_P}_{b} - \underbrace{(F_e - F_w + F_n - F_s)(\rho\phi)_P}_c - \underbrace{\left[\frac{\Gamma_\phi \Delta y \phi}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right]_e + \left[\frac{\Gamma_\phi \Delta y \phi}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right]_w - \left[\frac{\Gamma_\phi \Delta x \phi}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right]_n + \left[\frac{\Gamma_\phi \Delta x \phi}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} \right]_s}_{d} + \underbrace{\Omega S_\phi}_e \quad (3.26)$$

Les notations utilisées font référence à la figure 3.2. À ce stade, aucune hypothèse n'a encore été faite sur le schéma temporel utilisé. Nous allons faire quelques observations concernant la forme de l'équation obtenue afin que cela puisse servir de guide dans la démarche à adopter lors de l'application de l'algorithme PISO.

Le terme (a) est le terme temporel. Il fait intervenir l'inconnue $\rho\phi$ uniquement au noeud central P mais à plusieurs instants.

Le terme (b) représente la forme discrétisée des flux convectif et diffusif sur la frontière Γ du volume élémentaire Ω . Il peut être écrit sous forme d'un opérateur faisant intervenir une combinaison linéaire des valeurs de l'inconnue $\rho\phi$ aux cinq noeuds P , E , N , W , et S (le noeud principal et ses plus proches voisins). Le coefficient a_P du noeud central est égal à la somme des coefficients des noeuds voisins affectée du signe moins (-). Ceci garantit la positivité de la solution. Cet opérateur sera dénoté H_u , H_v ou G selon qu'il s'agira respectivement des équations de quantité de mouvement (composantes x et y) ou de l'équation de l'énergie.

Les termes (c) et (d) proviennent également de la discrétisation des termes convectif et diffusif. Ce sont des termes supplémentaires qui n'apparaissent que du fait de l'utilisation des variables conservatives comme inconnues principales. L'algorithme PISO ne prévoit pas de traitement pour ces deux termes et c'est pourquoi il faudra faire un choix.

Si le terme (c) est traité comme le terme (a) lors de la discrétisation temporelle, cela conduit à violer la règle importante précédente stipulant que le coefficient central est égal à la somme des coefficients des noeuds voisins, ce qui peut conduire à des champs irréalistes dans le régime stationnaire. Pour des raisons de stabilité, ce terme sera toujours traité implicitement si le coefficient $\sum F_i$ est positif. Cela conduit à le regrouper avec la partie implicite du terme temporel durant les pas correcteurs explicites comme on le verra ultérieurement.

Le terme (d) quand à lui, fait intervenir la variable ϕ (et non l'inconnue principale $\rho\phi$) aux noeuds e , n , s , et w où elle n'est pas définie. Afin d'éviter des interpolations supplémentaires qui pourraient être incompatibles avec celles de ρ et $\rho\phi$, le terme (d) qui est généralement faible en pratique (selon Issa) sera traité comme terme source et donc inclus dans S_ϕ .

Les résultats de la discrétisation pour chacune des équations de transport par la méthode indiquée ci-dessus sont donnés dans les sections suivantes.

3.5.2 Equation de quantité de mouvement

Composante u

L'équation de quantité de mouvement selon x sous forme conservative

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\mathbf{V}} u) = \nabla \cdot (\mu \nabla u) + S_u^* \quad (3.27)$$

est intégrée sur le volume élémentaire Ω_u de la figure 3.5.

Le maillage est supposé non uniforme. On obtient la forme discrétisée suivante:

$$\Omega_u \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = H_u(\rho u) - \left(\sum F_u \right) (\rho u)_e - \Omega_u \frac{\partial P}{\partial x} + S_u \quad (3.28)$$

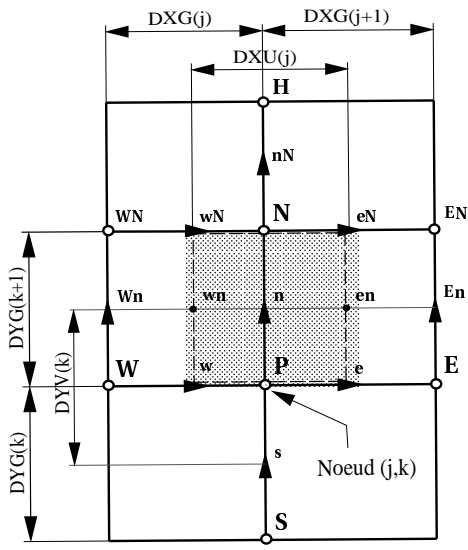


Figure 3.6: Volume d'intégration de l'équation de quantité de mouvement selon y

l'équation correspond à l'élément de volume centré au point n qui est un noeud de vitesse v . Les différents opérateurs sont définis ci-dessous:

$$H_v(\rho v) = a_{en}(\rho v)_{En} + a_{wn}(\rho v)_{Wn} + a_N(\rho v)_{nN} + a_P(\rho v)_s + A_{ov}(\rho v)_n \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} S_v = & \left(\mu_n \frac{v_{nN} - v_n}{DYV_{k+1}} - \mu_P \frac{v_n - v_s}{DYV_k} \right) DXU_j + \mu_{en}(u_{eN} - u_e) - \mu_{wn}(u_{wN} - u_w) \\ & - \frac{2}{3}(\mu_N \nabla \cdot \vec{\mathbf{V}}_N - \mu_P \nabla \cdot \vec{\mathbf{V}}_P) DXU_j + \rho_n g_{yn} - \frac{\mu_{en} DYG_{k+1} v_{en}}{\rho_{en}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{en} \\ & + \frac{\mu_{wn} DYG_{k+1} v_{wn}}{\rho_{wn}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_{wn} - \frac{\mu_N DXU_j v_N}{\rho_N} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_N + \frac{\mu_P DXU_j v_P}{\rho_P} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_P \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} a_{en} &= D_{en} \mathcal{A}(Pe_{en}) + \| -F_{en}, 0 \| \\ a_{wn} &= D_{wn} \mathcal{A}(Pe_{wn}) + \| F_{wn}, 0 \| \\ a_N &= D_N \mathcal{A}(Pe_N) + \| -F_N, 0 \| \\ a_P &= D_P \mathcal{A}(Pe_P) + \| F_P, 0 \| \\ A_{ov} &= -(a_{en} + a_{wn} + a_N + a_P) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\sum F_v = F_{en} - F_{wn} + F_N - F_P \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} F_{en} = u_{en} DYG_{k+1} \quad D_{en} = \frac{\mu_{en} DYG_{k+1}}{\rho_{en} DXG_{j+1}} \quad Pe_{en} = \frac{F_{en}}{D_{en}} \\ F_{wn} = u_{wn} DYG_{k+1} \quad D_{wn} = \frac{\mu_{wn} DYG_{k+1}}{\rho_{wn} DXG_j} \quad Pe_{wn} = \frac{F_{wn}}{D_{wn}} \\ F_N = v_N DXU_j \quad D_N = \frac{\mu_N DXU_j}{\rho_N DYV_{k+1}} \quad Pe_N = \frac{F_N}{D_N} \\ F_P = v_P DXU_j \quad D_P = \frac{\mu_P DXU_j}{\rho_P DYV_k} \quad Pe_P = \frac{F_P}{D_P} \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\Omega_v = DXU_j DYG_{k+1} \quad (3.42)$$

Dans l'équation 3.36, le terme correspondant au terme (d) de l'équation 3.26 a été inclus dans le terme source S_v pour les raisons indiquées dans la section précédente. De plus le terme de pression a été séparé du terme source S_v car il fait l'objet d'un traitement particulier dans l'algorithme PISO.

3.5.3 Equation de l'énergie

L'équation de l'énergie écrite sous la forme conservative

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{\mathbf{V}} e) = \nabla \cdot \left(\frac{\kappa}{c_v} \nabla e \right) + S_e \quad (3.43)$$

est intégrée sur le volume élémentaire Ω_P de la figure 3.7.

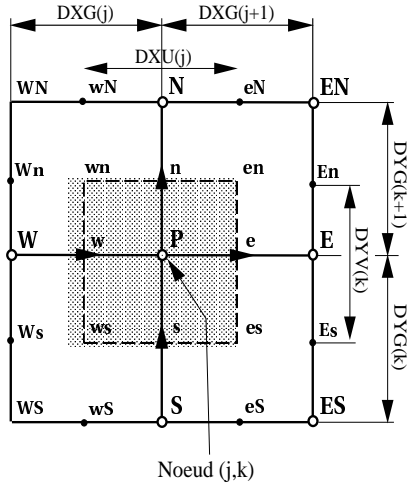


Figure 3.7: Volume d'intégration de l'équation de l'énergie.

Le maillage est supposé non uniforme. On obtient la forme discrétisée suivante:

$$\Omega_P \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} = G(\rho e) - \left(\sum F_e \right) (\rho e)_P - \Omega_P \left[\frac{\partial P u}{\partial x} + \frac{\partial P v}{\partial y} \right] + J(u) + J(v) + Q \quad (3.44)$$

l'équation correspond à l'élément de volume centré au point P qui est un noeud principal. Les différents opérateurs sont définis ci-dessous:

$$G(\rho e) = a_e(\rho e)_E + a_w(\rho e)_W + a_n(\rho e)_N + a_s(\rho e)_S + B_o(\rho e)_P \quad (3.45)$$

$$\begin{aligned} J(u) + J(v) = & 0.5 DYV_k \left\{ u_e(\sigma_{xxE} + \sigma_{xxP}) + 0.25(v_{Es} + v_{En} + v_n + v_s)(\sigma_{xyE} + \sigma_{xyP}) \right. \\ & \left. - u_w(\sigma_{xxP} + \sigma_{xxW}) - 0.25(v_n + v_s + v_{Wn} + v_{Ws})(\sigma_{xyP} + \sigma_{xyW}) \right\} \\ & + 0.5 DXU_j \left\{ 0.25(u_e + u_w + u_{eN} + u_{wN})(\sigma_{xyP} + \sigma_{xyN}) + v_n(\sigma_{yyP} + \sigma_{yyN}) \right. \\ & \left. - 0.25(u_e + u_w + u_{eS} + u_{wS})(\sigma_{xyP} + \sigma_{xyS}) - v_s(\sigma_{yyS} + \sigma_{yyP}) \right\} \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} Q = & 0.5 DXU_j DYV_k \left\{ ((\rho u)_e + (\rho u)_w) g_x + ((\rho v)_n + (\rho v)_s) g_y \right\} \\ & + DYV_k \left\{ \left(\frac{\kappa}{c_v} \right)_w \frac{E_{cP} - E_{cW}}{DXG_j} - \left(\frac{\kappa}{c_v} \right)_e \frac{E_{cE} - E_{cP}}{DXG_{j+1}} \right\} \\ & + DXU_j \left\{ \left(\frac{\kappa}{c_v} \right)_s \frac{E_{cP} - E_{cS}}{DYG_k} - \left(\frac{\kappa}{c_v} \right)_n \frac{E_{cN} - E_{cP}}{DYG_{k+1}} \right\} \\ & - \frac{\left(\frac{\kappa}{c_v} \right)_e e_e DYV_k}{\rho_e} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_e + \frac{\left(\frac{\kappa}{c_v} \right)_w e_w DYV_k}{\rho_w} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_w \\ & - \frac{\left(\frac{\kappa}{c_v} \right)_n e_n DXU_j}{\rho_n} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_n + \frac{\left(\frac{\kappa}{c_v} \right)_s e_s DXU_j}{\rho_s} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_s \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} a_e &= D_e \mathcal{A}(Pe_e) + \| -F_e, 0 \| \\ a_n &= D_n \mathcal{A}(Pe_n) + \| F_n, 0 \| \\ a_w &= D_w \mathcal{A}(Pe_w) + \| -F_w, 0 \| \\ a_s &= D_s \mathcal{A}(Pe_s) + \| F_s, 0 \| \\ B_o &= -(a_e + a_n + a_w + a_s) \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\sum F_e = F_e - F_w + F_n - F_s \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
F_e = u_e DYV_k & \quad D_e = \frac{\left(\frac{\kappa}{c_v}\right)_e DYV_k}{\rho_e DXG_{j+1}} & \quad Pe_e = \frac{F_e}{D_e} \\
F_n = v_n DXU_j & \quad D_n = \frac{\left(\frac{\kappa}{c_v}\right)_n DXU_j}{\rho_n DYG_{k+1}} & \quad Pe_n = \frac{F_n}{D_n} \\
F_w = u_w DYV_k & \quad D_w = \frac{\left(\frac{\kappa}{c_v}\right)_w DYV_k}{\rho_w DXG_j} & \quad Pe_w = \frac{F_w}{D_w} \\
F_s = v_s DXU_j & \quad D_s = \frac{\left(\frac{\kappa}{c_v}\right)_s DXU_j}{\rho_s DYG_k} & \quad Pe_s = \frac{F_s}{D_s}
\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\Omega_P = DXU_j DYV_k \tag{3.51}$$

Dans l'équation 3.44, le terme correspondant au terme (d) de l'équation 3.26 a été inclus dans le terme source Q pour les raisons indiquées dans la section précédente. De plus le terme de pression a été séparé du terme source Q car il fait l'objet d'un traitement particulier dans l'algorithme PISO.

3.6 Discrétisation temporelle

Le système constitué des équations (3.28, 3.36, 3.44) complétées par l'équation de continuité, constitue un système complet de quatre (4) équations à quatre (4) inconnues ρ , ρu , ρv et ρe . Les variables P (Pression) et T (Température) sont reliées à ρ par la loi d'état. La discrétisation temporelle est effectuée à l'aide du schéma d'Euler implicite qui est précis à l'ordre un $O(\Delta t)$ et inconditionnellement stable. On obtient le système suivant:

$$\left(\frac{\Omega_u}{\delta t} - A_{ou}\right)(\rho u)^{n+1} = H'_u(\rho u)^{n+1} - \left(\sum F_u\right)(\rho u)^{n+1} - \Omega_u \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + S_u + \frac{\Omega_u}{\delta t}(\rho u)^n \tag{3.52}$$

$$\left(\frac{\Omega_v}{\delta t} - A_{ov}\right)(\rho v)^{n+1} = H'_v(\rho v)^{n+1} - \left(\sum F_v\right)(\rho v)^{n+1} - \Omega_v \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} + S_v + \frac{\Omega_v}{\delta t}(\rho v)^n \tag{3.53}$$

$$\frac{1}{\delta t}(\rho^{n+1} - \rho^n) + \nabla \cdot (\rho \vec{V})^{n+1} = 0 \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\Omega_P}{\delta t} - B_o\right)(\rho e)^{n+1} &= G'(\rho e)^{n+1} - \left(\sum F_e\right)(\rho e)^{n+1} - \Omega_P \left[\frac{\partial (Pu)^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial (Pv)^{n+1}}{\partial y} \right] \\
&+ J(u^{n+1}) + J(v^{n+1}) + Q + \frac{\Omega_P}{\delta t}(\rho e)^n
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Le coefficient central A_{ou} (respectivement A_{ov} et B_o) a été séparé de l'opérateur H_u (respectivement H_v et G) et la partie restante de cet opérateur est dénotée H'_u (respectivement H'_v et G'). Ceci est nécessaire pour assurer une bonne stabilité à l'algorithme PISO. Les termes sources sont évalués à l'instant (n). Bien que ces deux derniers termes proviennent tous les deux de la discrétisation des flux de convection-diffusion, ils ne sont pas traités de la même façon pour les raisons indiquées dans la section 3.5.1. Le système précédent est non-linéaire, fortement couplé et ne peut donc être résolu directement. Une linéarisation des coefficients est nécessaire et le découplage est effectué grâce à l'algorithme à pas fractionnaire PISO présenté dans la section suivante.

3.7 Algorithme PISO

Nous n'allons pas présenter ici les fondements de la méthode PISO qui sont bien exposés dans la référence [11] mais nous nous contenterons de donner les étapes de l'algorithme tel que nous l'utiliserons ainsi que les modifications que nous y avons apporté pour l'adaptation à notre problème.

Il convient de mentionner que l'algorithme PISO est une méthode à correction de pression (cas compressible) et qu'on utilise donc la pression comme inconnue principale au lieu de la masse volumique ρ . Cette dernière est déduite de la pression par la loi d'état. On peut avec ce type de méthode, simuler les écoulements très faiblement compressibles ($M \ll 1$) qui constituent l'un des objectifs de ce travail.

Dans la structure de nos équations, il apparaît trois (3) différences importantes avec les équations qui ont servi de base à la présentation de l'algorithme PISO [11]:

1. Le terme $\left(\sum F_\phi\right)(\rho\phi)$ constitue une contribution supplémentaire au noeud central.

2. L'inconnue principale est $\rho\phi$ au lieu de ϕ .

3. La masse volumique n'apparaît pas au dénominateur des coefficients A_{ou} , A_{ov} et B_o .

Dû à ces trois différences, les étapes de la méthode de résolution ont été modifiées de la façon suivante :

1. Le terme $(\sum F_\phi)\rho\phi$ qui inclut la variable principale au noeud central nécessite un traitement particulier. Lors des pas correcteurs explicites, il est traité comme le coefficient central si $\sum F_\phi > 0$ ou est inclus dans l'opérateur H' (resp. G') si $\sum F_\phi < 0$. Ceci pour des raisons de stabilité.
2. ρ et ϕ sont incrémentés simultanément dans le terme $\rho\phi$.
3. Les équations n'étant pas exactement similaires à celles qui ont servi de base à la présentation de la méthode PISO l'application de cette dernière n'est pas immédiate. Initialement, nous avons introduit une modification des équations en posant :

$$\begin{aligned} A_{ou} &= \frac{AOU}{\rho_e} \\ A_{ov} &= \frac{AOV}{\rho_n} \\ B_o &= \frac{BO}{\rho_P} \end{aligned} \tag{3.56}$$

Cela permettait l'application directe de l'algorithme PISO. Les étapes obtenues de cette façon ont servi de base à la version initiale du code.

Nous avons apporté un changement en omettant la masse-volumique au dénominateur avec pour conséquences d'importantes simplifications dans les équations et le traitement des conditions aux limites. De plus, ρ et u sont à présent incrémentés simultanément dans le terme ρu . La version obtenue de cette façon a été testée et comparée avec l'ancienne version et a donné des résultats tout à fait similaires, mettant ainsi en évidence sa supériorité. C'est cette version que nous présentons avec les notations adaptées.

3.7.1 Procédure de fractionnement

Afin d'incorporer de façon automatique le traitement particulier du terme $(\sum F_\phi)\rho\phi$ dans les équations, on utilise la décomposition du coefficient $\sum F_\phi$ en une partie négative et une partie positive:

$$\sum F_\phi = F_\phi^+ + F_\phi^- = \max(\sum F_\phi, 0) + \min(\sum F_\phi, 0) \tag{3.57}$$

On a évidemment les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \sum F_\phi \geq 0 &\implies \begin{cases} F_\phi^+ = \sum F_\phi \\ F_\phi^- = 0 \end{cases} \\ \sum F_\phi \leq 0 &\implies \begin{cases} F_\phi^+ = 0 \\ F_\phi^- = \sum F_\phi \end{cases} \end{aligned} \tag{3.58}$$

Dans les différentes étapes qui suivent, les coefficients des inconnues principales sont linéarisés à l'instant (n) excepté lorsqu'il en est spécifié autrement.

I. Schéma à deux pas

a. Pas prédicteur de la quantité de mouvement

Les équations (3.52, 3.53) sont résolues de manière explicite pour calculer $(\rho\vec{\mathbf{V}})^*$ en utilisant les valeurs de ρ et P à l'instant précédent (n):

$$\left(\frac{\Omega_u}{\delta t} - A_{ou} + F_u^+\right)(\rho u)^* = H'_u[(\rho u)^*] - F_u^-(\rho u)^* - \Omega_u \frac{\partial P^n}{\partial x} + S_u^n + \frac{\Omega_u}{\delta t}(\rho u)^n \tag{3.59}$$

$$\left(\frac{\Omega_v}{\delta t} - A_{ov} + F_v^+\right)(\rho v)^* = H'_v[(\rho v)^*] - F_v^-(\rho v)^* - \Omega_v \frac{\partial P^n}{\partial y} + S_v^n + \frac{\Omega_v}{\delta t}(\rho v)^n \tag{3.60}$$

b. 1er pas correcteur de quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement est écrite sous la forme:

$$\left(\frac{\Omega_u}{\delta t} - A_{ou} + F_u^+\right)(\rho u)^{**} = H'_u[(\rho u)^*] - F_u^-(\rho u)^* - \Omega_u \frac{\partial P^*}{\partial x} + S_u^n + \frac{\Omega_u}{\delta t}(\rho u)^n \quad (3.61)$$

$$\left(\frac{\Omega_v}{\delta t} - A_{ov} + F_v^+\right)(\rho v)^{**} = H'_v[(\rho v)^*] - F_v^-(\rho v)^* - \Omega_v \frac{\partial P^*}{\partial y} + S_v^n + \frac{\Omega_v}{\delta t}(\rho v)^n \quad (3.62)$$

On obtient la forme incrémentale en combinant celle-ci avec le pas prédicteur de quantité de mouvement 3.59,3.60:

$$(\rho u)^{**} - (\rho u)^* = -\Omega_u \left(\frac{\Omega_u}{\delta t} - A_{ou} + F_u^+\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x}(P^* - P^n) \quad (3.63)$$

$$(\rho v)^{**} - (\rho v)^* = -\Omega_v \left(\frac{\Omega_v}{\delta t} - A_{ov} + F_v^+\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial y}(P^* - P^n) \quad (3.64)$$

En prenant la divergence de l'équation ainsi obtenue et en tenant compte de l'équation de continuité correspondante

$$\nabla \cdot (\rho \vec{\mathbf{V}})^{**} = -\frac{1}{\delta t}(\rho^{**} - \rho^n) \quad (3.65)$$

on obtient l'équation de Poisson suivante qui permet de déterminer la correction de pression ($P^* - P^n$):

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\Omega_u \left(\frac{\Omega_u}{\delta t} - A_{ou} + F_u^+\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Omega_v \left(\frac{\Omega_v}{\delta t} - A_{ov} + F_v^+\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right] - \frac{1}{rT^n \delta t} \right\} (P^* - P^n) = \nabla \cdot (\rho \vec{\mathbf{V}})^* \quad (3.66)$$

La densité ρ^{**} est déterminée grâce à l'équation d'état

$$\rho^{**} = \frac{P^*}{rT^n} \quad (3.67)$$

Le champ de vitesse $(\rho \vec{\mathbf{V}})^{**}$ est alors donné explicitement par les équations (3.63, 3.64).

c. Pas prédicteur de l'énergie

L'équation de l'énergie 3.55 est résolue sous la forme implicite suivante pour déterminer l'inconnue $\rho^{**} e^*$

$$\left(\frac{\Omega_P}{\delta t} - B_o + F_e^+\right) \rho^{**} e^* = G'[\rho^{**} e^*] - F_e^- \rho^{**} e^* - \Omega_P \left[\frac{\partial P^* u^{**}}{\partial x} + \frac{\partial P^* v^{**}}{\partial y} \right] + J(u^{**}) + J(v^{**}) + Q + \frac{\Omega_P}{\delta t}(\rho e)^n \quad (3.68)$$

La température est obtenue à partir de la relation

$$e^* = c_v T^* + 0.5 \left((u^{**})^2 + (v^{**})^2 \right) \quad (3.69)$$

Remarque (linéarisation):

*Les essais numériques ont montré que pour obtenir une bonne solution, il fallait linéariser les coefficients des opérateurs de convection et diffusion ainsi que le terme source Q à l'instant $(\rho^{**}, \vec{\mathbf{V}}^{**}, P^*)$.*

d. 2ème pas correcteur de quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement est écrite sous la forme suivante

$$\left(\frac{\Omega_u}{\delta t} - A_{ou} + F_u^+\right)(\rho u)^{***} = H'_u[(\rho u)^{**}] - F_u^-(\rho u)^{**} - \Omega_u \frac{\partial P^{**}}{\partial x} + S_u^n + \frac{\Omega_u}{\delta t}(\rho u)^n \quad (3.70)$$

$$\left(\frac{\Omega_v}{\delta t} - A_{ov} + F_v^+\right)(\rho v)^{***} = H'_v[(\rho v)^{**}] - F_v^-(\rho v)^{**} - \Omega_v \frac{\partial P^{**}}{\partial y} + S_v^n + \frac{\Omega_v}{\delta t}(\rho v)^n \quad (3.71)$$

On obtient la forme incrémentale en combinant celle-ci avec le 1er pas correcteur de quantité de mouvement (3.61, 3.62):

$$(\rho u)^{***} - (\rho u)^{**} = \frac{H'_u[(\rho u)^{**} - (\rho u)^*] - F_u^- \{(\rho u)^{**} - (\rho u)^*\} - \Omega_u \frac{\partial}{\partial x}(P^{**} - P^*)}{\left(\frac{\Omega_u}{\delta t} - A_{ou} + F_u^+\right)} \quad (3.72)$$

$$(\rho v)^{***} - (\rho v)^{**} = \frac{H'_v[(\rho v)^{**} - (\rho v)^*] - F_v^- \{(\rho v)^{**} - (\rho v)^*\} - \Omega_v \frac{\partial}{\partial y}(P^{**} - P^*)}{\left(\frac{\Omega_v}{\delta t} - A_{ov} + F_v^+\right)} \quad (3.73)$$

En prenant la divergence de l'équation ainsi obtenue et en tenant compte des équations de continuité correspondantes

$$\nabla \cdot (\rho \vec{\mathbf{V}})^{**} = -\frac{1}{\delta t}(\rho^{**} - \rho^n) \quad (3.74)$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{\mathbf{V}})^{***} = -\frac{1}{\delta t}(\rho^{***} - \rho^n) \quad (3.75)$$

on obtient l'équation de Poisson suivante qui permet de déterminer la correction de pression ($P^{**} - P^*$):

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\Omega_u \left(\frac{\Omega_u}{\delta t} - A_{ou} + F_u^+ \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Omega_v \left(\frac{\Omega_v}{\delta t} - A_{ov} + F_v^+ \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right] - \frac{1}{rT^* \delta t} \right\} (P^{**} - P^*) = \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{\Omega_u}{\delta t} - A_{ou} + F_u^+ \right)^{-1} \left\{ H'_u [(\rho u)^{**} - (\rho u)^*] - F_u^- \{(\rho u)^{**} - (\rho u)^*\} \right\} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\Omega_v}{\delta t} - A_{ov} + F_v^+ \right)^{-1} \left\{ H'_v [(\rho v)^{**} - (\rho v)^*] - F_v^- \{(\rho v)^{**} - (\rho v)^*\} \right\} \right] \\ + \frac{P^*}{\delta t} \left[\frac{1}{rT^*} - \frac{1}{rT^n} \right] \end{aligned} \quad (3.76)$$

La masse volumique ρ^{***} est déterminée par l'équation d'état

$$\rho^{***} = \frac{P^{**}}{rT^*} \quad (3.77)$$

et le champ de vitesse $(\rho \vec{\mathbf{V}})^{***}$ est alors obtenu explicitement à l'aide des équations (3.72, 3.73).

A ce stade les variables ρ^{***} , $\vec{\mathbf{V}}^{***}$, P^{**} et T^* représentent les valeurs du champ de l'écoulement à l'instant (n+1). Afin d'augmenter la précision, on peut ajouter un pas correcteur. On obtient alors le schéma à trois pas suivant:

II. Schéma à trois pas

a. 1er pas correcteur de l'énergie

Le nouveau champ de l'énergie est déterminé de manière explicite en résolvant l'équation suivante pour $\rho^{***} e^{**}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\Omega_P}{\delta t} - B_o + F_e^+ \right) \rho^{***} e^{**} = G'[\rho^{**} e^*] - F_e^- \rho^{**} e^* - \Omega_P \left[\frac{\partial P^{**} u^{***}}{\partial x} + \frac{\partial P^{**} v^{***}}{\partial y} \right] \\ + J(u^{**}) + J(v^{**}) + Q + \frac{\Omega_P}{\delta t} (\rho e)^n \end{aligned} \quad (3.78)$$

En combinant cette équation avec le pas prédicteur de l'énergie 3.68, on obtient la forme incrémentale suivante plus simple pour les calculs:

$$\rho^{***} e^{**} - \rho^{**} e^* = -\Omega_P \left(\frac{\Omega_P}{\delta t} - B_o + F_e^+ \right)^{-1} \left[\frac{\partial (P^{**} u^{***} - P^* u^{**})}{\partial x} + \frac{\partial (P^{**} v^{***} - P^* v^{**})}{\partial y} \right] \quad (3.79)$$

La température T^{**} est obtenue à partir de l'équation suivante:

$$e^{**} = c_v T^{**} + 0.5 \left((u^{***})^2 + (v^{***})^2 \right) \quad (3.80)$$

d. 3ème pas correcteur de quantité de mouvement

L'équation de quantité de mouvement est mise sous la forme suivante:

$$\left(\frac{\Omega_u}{\delta t} - A_{ou} + F_u^+ \right) (\rho u)^{****} = H'_u [(\rho u)^{**}] - F_u^- (\rho u)^{**} - \Omega_u \frac{\partial P^{***}}{\partial x} + S_u^n + \frac{\Omega_u}{\delta t} (\rho u)^n \quad (3.81)$$

$$\left(\frac{\Omega_v}{\delta t} - A_{ov} + F_v^+ \right) (\rho v)^{****} = H'_v [(\rho v)^{**}] - F_v^- (\rho v)^{**} - \Omega_v \frac{\partial P^{***}}{\partial y} + S_v^n + \frac{\Omega_v}{\delta t} (\rho v)^n \quad (3.82)$$

On obtient la forme incrémentale en combinant cette équation avec le 2ème pas correcteur de quantité de mouvement (3.70, 3.71):

$$(\rho u)^{****} - (\rho u)^{***} = -\Omega_u \left(\frac{\Omega_u}{\delta t} - A_{ou} + F_u^+ \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (P^{***} - P^{**}) \quad (3.83)$$

$$(\rho v)^{****} - (\rho v)^{***} = -\Omega_v \left(\frac{\Omega_v}{\delta t} - A_{ov} + F_v^+ \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} (P^{***} - P^{**}) \quad (3.84)$$

En prenant la divergence de l'équation ainsi obtenue et en tenant compte des équations de continuité correspondantes

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V})^{****} = -\frac{1}{\delta t}(\rho^{****} - \rho^n) \quad (3.85)$$

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V})^{***} = -\frac{1}{\delta t}(\rho^{***} - \rho^n) \quad (3.86)$$

on obtient l'équation de Poisson suivante qui permet de déterminer la correction de pression ($P^{***} - P^{**}$):

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\Omega_u \left(\frac{\Omega_u}{\delta t} - A_{ou} + F_u^+ \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\Omega_v \left(\frac{\Omega_v}{\delta t} - A_{ov} + F_v^+ \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \right] - \frac{1}{rT^{***}\delta t} \right\} (P^{***} - P^{**}) = \frac{P^{**}}{\delta t} \left[\frac{1}{rT^{**}} - \frac{1}{rT^*} \right] \quad (3.87)$$

La masse volumique ρ^{****} est déterminée par l'équation d'état

$$\rho^{****} = \frac{P^{***}}{rT^{**}} \quad (3.88)$$

et le champ de vitesse $(\rho \vec{V})^{****}$ est alors obtenu explicitement à l'aide des équations 3.83,3.84.

Le dernier champ calculé ρ^{****} , \vec{V}^{****} , P^{***} et T^{**} représentent les valeurs du champ de l'écoulement à l'instant (n+1), c'est à dire la solution du système original (3.52–3.55).

L'organigramme du code de calcul est donné sur la figure 3.8 qui montre le processus de calcul suivi durant un pas de temps. Puisque l'écoulement est instationnaire, il n'y a pas de test de convergence; le nombre de pas de temps (ou la durée du calcul) est fixé initialement.

3.8 Résolution des systèmes d'équations

A cette étape, un problème important est le choix des noeuds où vont être discrétisés les équations, des noeuds qui seront utilisés comme noeuds fictifs (situés à l'extérieur du domaine de calcul et utilisés pour commodité de calcul) et des noeuds situés sur la frontière.

La figure 3.9 représente le domaine de calcul délimité par la frontière (en trait pointillé gras) ainsi que le maillage utilisé. Pour chaque variable (u , v , $(P-e)$), on indique en trait continu et avec des symboles pleins, les noeuds où les équations correspondantes sont discrétisées. En traits pointillés et coloriés en clair (ou blanc) sont indiqués les noeuds fictifs et les noeuds frontières. En ces noeuds, les valeurs des inconnues principales sont éliminées des équations pentadiagonales grâce aux conditions aux limites. Les plages d'indices (j et k) utilisées sont aussi indiquées sur la figure. Rappelons qu'il s'agit d'une notation indicielle dans le plan physique à ne pas confondre avec les indices des variables programme. Ainsi, l'équation de quantité de mouvement selon x est discrétisée de $j = \frac{3}{2}$ à $jx - \frac{1}{2}$ et de $k = 1$ à $k = kx$ alors que l'équation suivant y est discrétisée de $j = 1$ à jx et de $k = \frac{3}{2}$ à $k = kx - \frac{1}{2}$. L'équation de pression ainsi que l'équation de l'énergie sont discrétisées de $j = 1$ à jx et de $k = 1$ à kx .

Le processus de discrétisation utilisé pour les équations de transport conduit à des systèmes d'équations algébriques linéaires. Les matrices obtenues sont à structure pentadiagonale. Il est donc souhaitable d'utiliser un solveur d'équations adapté qui tire parti de cette particularité. La méthode utilisée dans la version originale du code est la méthode MSI [21] très bien adaptée à la résolution de ce type de problème. Nous avons également testé deux autres solveurs sous forme vectorisée: Un solveur ADI et un solveur SIP. Les trois solveurs ont donné des résultats similaires.

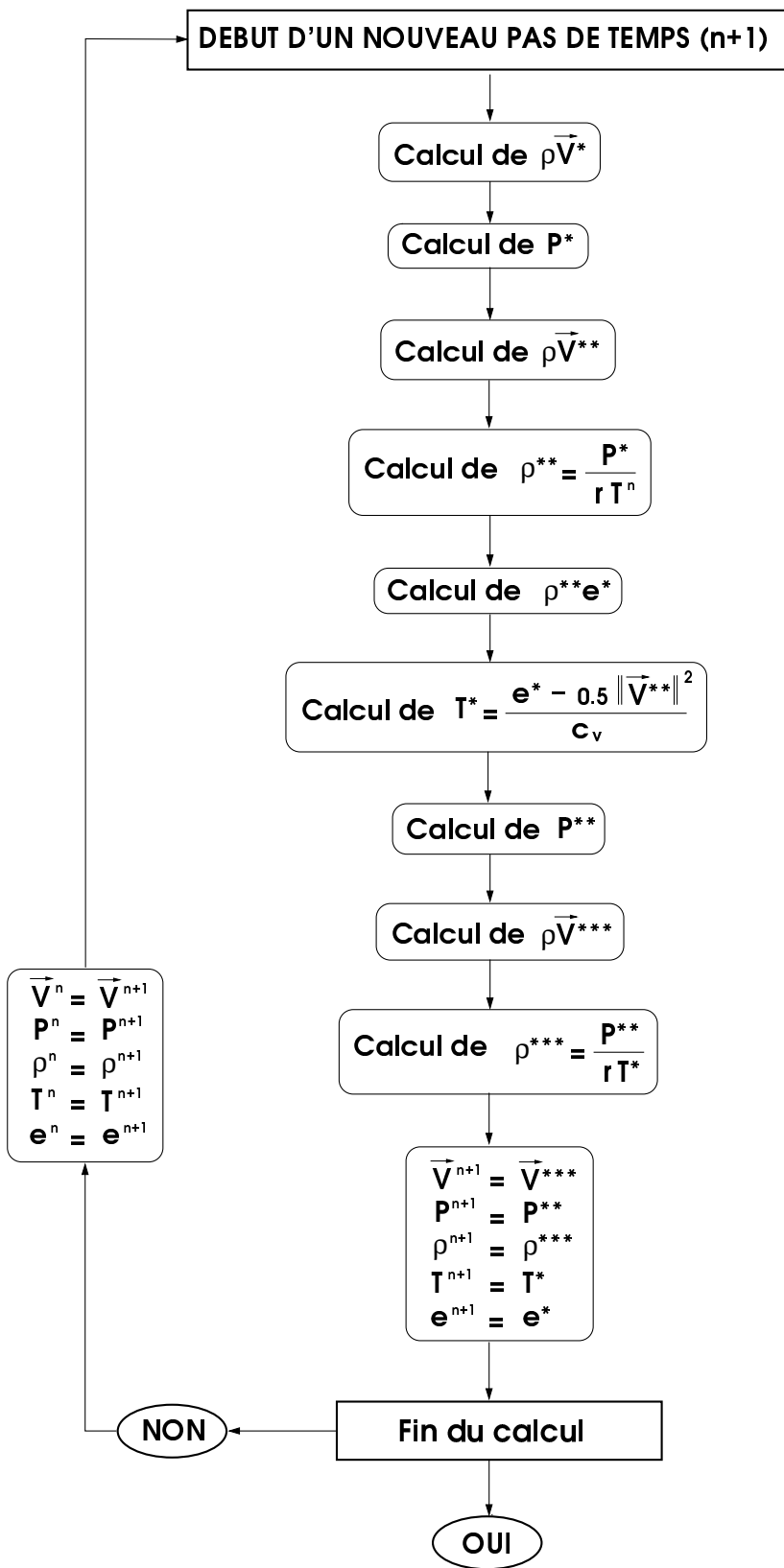


Figure 3.8: Oganigramme du code de calcul: processus suivi au cours d'un pas de temps.

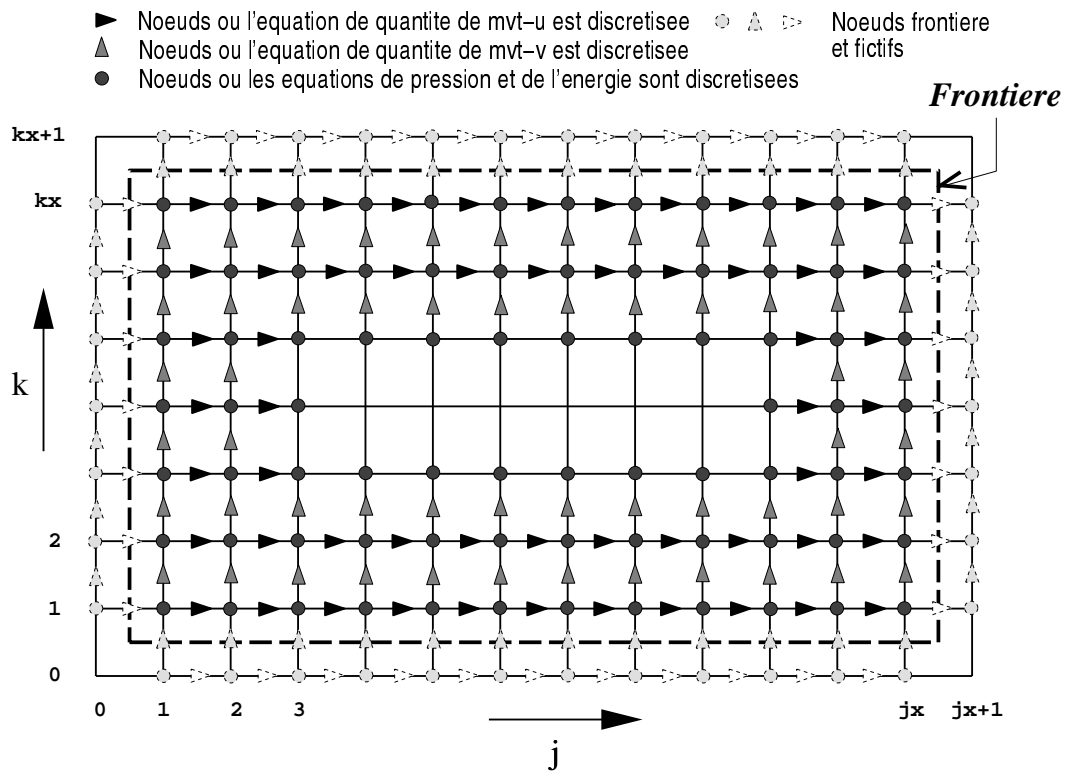


Figure 3.9: Maillage, noeuds de calcul et emplacement où les équations sont discrétisées.

Chapitre 4

VALIDATION DU CODE DE CALCUL

Le présent travail a démarré sur la base d'un code de calcul développé à l'institut de Mécanique des Fluides de Toulouse. Il est bon de rappeler les étapes qui ont mené du code original au programme actuel afin, d'une part, de mettre en évidence notre contribution et, d'autre part, les grandes différences qui existent entre les deux codes. Le dernier point mentionné est là pour rappeler la nécessité d'une validation du nouveau code de calcul. Les étapes du développement du nouveau code de calcul sont les suivantes:

1. Familiarisation avec le code original.
2. Modification des conditions aux limites qui étaient théoriquement erronées : Le code ne convergerait pas (les valeurs moyennes des différentes variables augmentaient de façon monotone dû au fait que les conditions aux limites étaient théoriquement mal posées).
3. modifications de la structure du code (dimension des variables, et ajout de calculs sur les frontières) afin de permettre l'implémentation de conditions aux limites arbitraires.
4. *Reécriture complète du code en maillage non-uniforme.* Cette étape a nécessité de refaire toute la discrétisation. Au cours de cette phase, d'importantes contributions ont été apportées à l'algorithme de calcul: Le traitement des termes sources issus de la discrétisation des flux de convection-diffusion (qui sont nouveaux dû à l'utilisation des variables conservatives) et l'adaptation de la méthode PISO au cas des variables conservatives (Il est bon de rappeler ici que la méthode PISO a été présentée en variables primitives). Cette dernière étape ayant eu le support de l'auteur de la méthode PISO, Dr R. I. Issa.
5. Suppression des obstacles présents dans le code original et adaptation à la configuration du demi-canal plan ainsi qu'à toutes les configurations qui ont fait l'objet de notre étude

Au vu de toutes ces modifications, plusieurs tests ont été effectués. Nous présentons ceux-ci dans les sections qui suivent. Le test le plus important étant bien entendu celui utilisé pour la validation (comparaison avec des résultats publiés).

4.1 Test du nouveau code sur maillage uniforme

Le test le plus élémentaire pour le nouveau code en maillage non-uniforme consiste à simuler le même écoulement que dans le code original en utilisant un maillage à pas constant. Le nouveau code devrait être en mesure de reproduire les résultats de l'ancien code. La configuration utilisée est celle du code original et est décrite sur la figure 4.1.

Il s'agit de l'écoulement dans un demi-canal plan avec obstacles modélisant des rugosités de paroi. Les paramètres utilisés dans les essais sont les suivants :

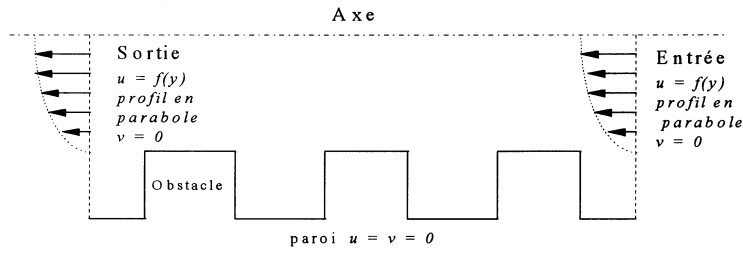


Figure 4.1: Configuration pour la comparaison entre nouveau et ancien code. Ecoulement dans un demi-canal plan avec obstacles.

- Air : Fluide utilisé
 $Pr = 0.71$ (nombre de Prandtl)
 $M = u_{axe}/c = 0.14$ Nombre de Mach (c est la vitesse du son à $T = T_o$)
 $Re = \rho_o u_{axe} h / \mu_o = 15$ Nombre de Reynolds (h est la hauteur des obstacles)
 $T_o = 273.13$ K
 $P_o = 10^5$ Pa
 $\mu_o = 1.7109 \times 10^5$ P1
 $L = 2.88 \times 10^{-5}$ m (Longueur du domaine de calcul)
 $l = 9.996 \times 10^{-6}$ m (largeur)
 $h = 4.7 \times 10^{-6}$ m (hauteur des obstacles)
 $w = 5.029 \times 10^{-6}$ m (largeur des obstacles)
 $\Delta t = 1.77 \times 10^{-9}$ s

Maillage : 49×17 uniforme Cartésien
Schéma d'interpolation : hybride
à l'entrée, le profil de vitesse suivant est imposé:

$$u(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq y < h \\ u_{axe} \frac{y-h}{l-h} \left(2 - \frac{y-h}{l-h} \right) & \text{si } y \geq h \end{cases} \quad (4.1)$$

avec

$$u_{axe} = \frac{\mu Re}{\rho_o l} \quad (4.2)$$

Les essais ont été effectués sur 30000 pas de temps en partant de conditions initiales de fluide au repos.

Les résultats obtenus sont donnés sur les figures 4.2 et 4.3 qui représentent les vecteurs du champ de vitesse. Ceux-ci sont parfaitement identiques. Un zoom sur la cavité donne une meilleur image pour comparaison (figure 4.4 et 4.5).

Les champs de pression sont aussi en très bon accord bien que non représentés ici. Toutefois, les valeurs moyennes de toutes les variables augmentent de façon monotone croissante avec le temps. Cela est dû au fait que les conditions aux limites qui imposent les profils de vitesse aussi bien à l'entrée qu'à la sortie sont mal posées. Ce test n'est donc qu'une comparaison entre deux codes qui donnent tous les deux des résultats erronés mais comparables. On rappelle qu'ici, il s'agit de voir si le nouveau code tourne et donne des résultats semblables à ceux obtenus avec son prédécesseur.

4.2 Test du nouveau code sur maillage non-uniforme

Pour voir comment se comporte le nouveau code avec un maillage variable, on utilise une configuration analogue à la précédente mais avec des dimensions différentes et un maillage non-uniforme

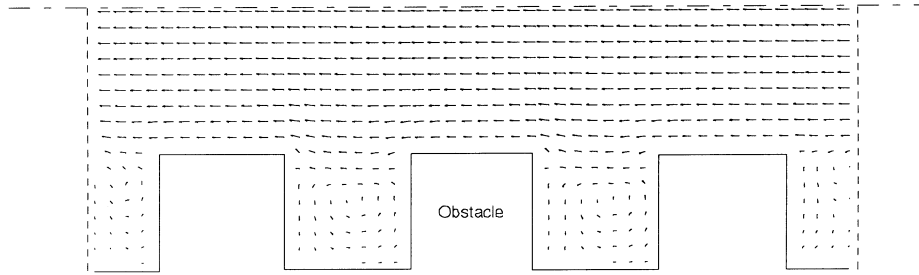


Figure 4.2: Ecoulement dans un demi-canal plan avec obstacles. Champ de vitesse obtenu par l'ancien code MODOBS.

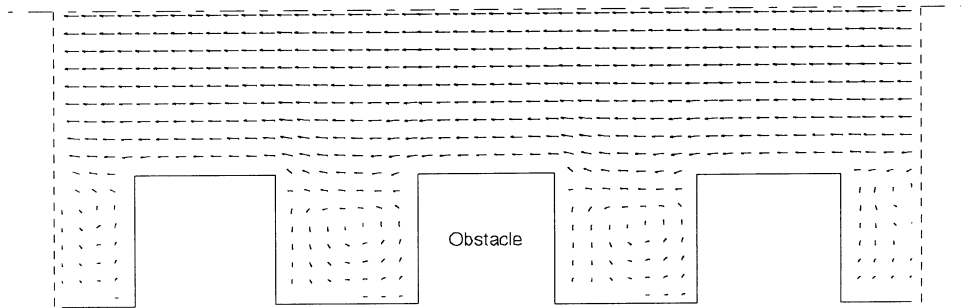


Figure 4.3: Ecoulement dans un demi-canal plan avec obstacles. Champ de vitesse obtenu par le nouveau code NJET.

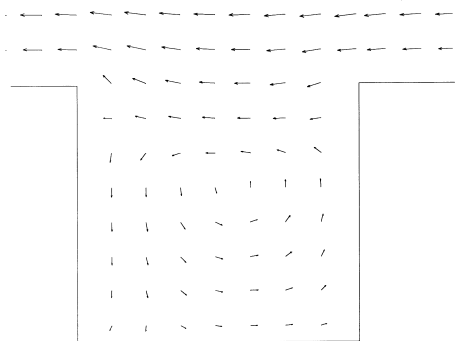


Figure 4.4: Zoom sur cavité. Champ de vitesse. Code MOD-OBS

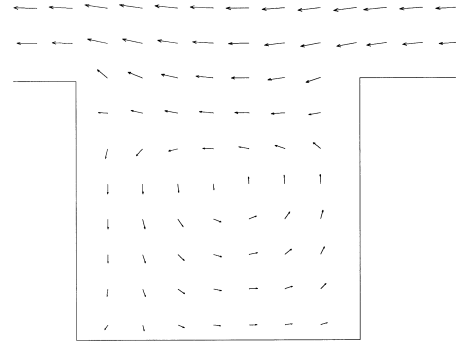


Figure 4.5: Zoom sur cavité. Champ de vitesse. Code NJET

(fig 4.6). A présent, il n'y a plus que deux obstacles, et on s'intéresse à la structure de l'écoulement dans l'unique cavité. La hauteur du domaine est cinq fois celle des obstacles h et sa largeur 4.5 fois (Ce choix est basé sur l'étude de Schen et Floryan [20] qui ont donné les valeurs de ces deux paramètres en fonction du rapport w/h de telle sorte que l'effet de la frontière fictive sur l'écoulement soit négligeable).

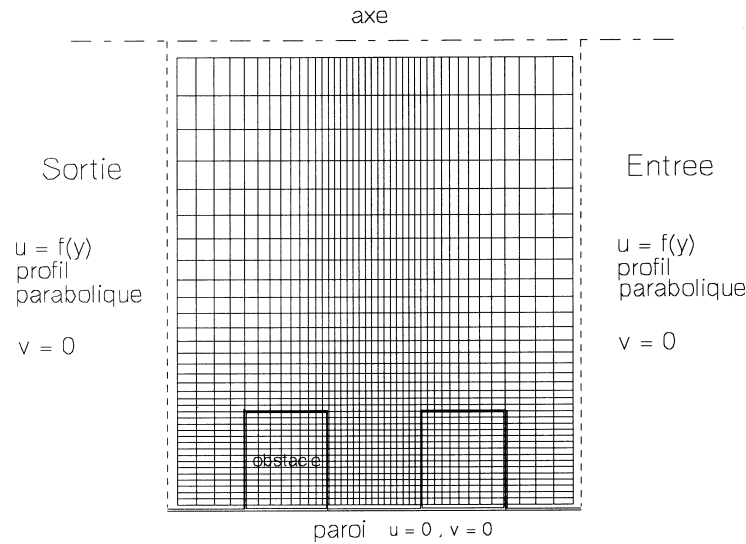


Figure 4.6: Configuration pour test du nouveau code sur maillage non-uniforme. Ecoulement dans un demi-canal plan avec obstacles.

Les paramètres de l'essai sont les suivants:

$$\begin{aligned}
 M &= 0.4 \\
 Re &= 10 \\
 L &= 4.5 \times 10^{-6} \text{ m} \\
 l &= 4.82 \times 10^{-6} \text{ m} \\
 h &= 15 \times \Delta y = 10^{-6} \\
 \Delta t &= 1.77 \times 10^{-9} \text{ s} \\
 \Delta x &= \Delta y = 6.6 \times 10^{-8} \text{ (dans la cavité)}
 \end{aligned}$$

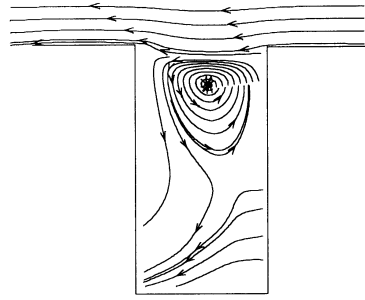
Maillage : 42×36

Le nombre de mailles est fixé à 15 dans la cavité pour plus de précision et le maillage est uniforme dans la cavité. La taille de maille augmente en progression géométrique de raison $r = 1.1$ à l'extérieur. Le nombre de Reynolds maximum autorisé par la taille de maille est $Re = 10$.

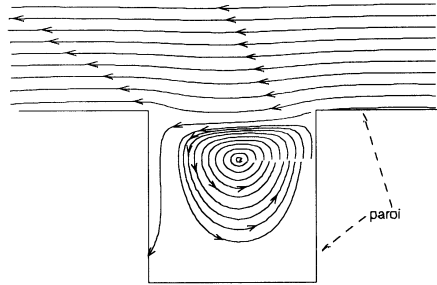
Les essais ont été effectués comme précédemment sur 30000 pas et pour quatre valeurs différentes du rapport de forme w/h . les résultats sont présentés sur la figure 4.7 qui montre les lignes de courant obtenues dans la cavité. Les résultats concordent bien avec ceux de Schen et Floryan [20] que l'on n'a pas représentés ici.

4.3 Suppression des obstacles et changement de conditions aux limites

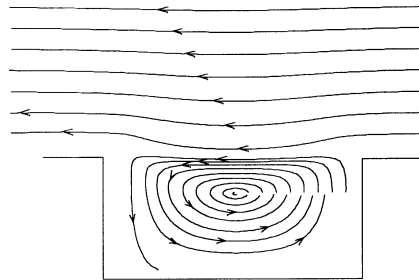
Une autre étape a consisté à supprimer les obstacles de la configuration. Par la suite nous avons entrepris de modifier les conditions aux limites pour résoudre le problème de la divergence des valeurs moyennes de l'écoulement. Cela a nécessité le redimensionnement de beaucoup de variables et l'ajout de certains calculs sur les frontières assez délicats car nécessitant de faire des hypothèses supplémentaires sur la valeur des variables à l'extérieur du domaine de calcul. De plus le solveurs de systèmes d'équations ont dû aussi être adaptés en conséquence. Nous avons ainsi été en mesure



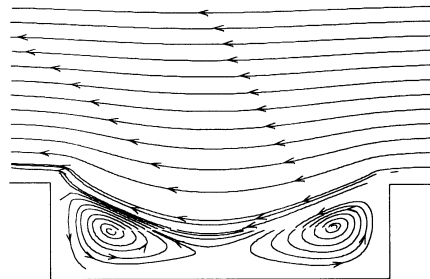
(a)
 $w / h = 0.5$



(b)
 $w / h = 1$



(c)
 $w / h = 2$



(d)
 $w / h = 3$

Figure 4.7: Lignes d'émission dans la cavité pour différentes valeur du rapport de forme w/h . Nouveau code NJET

d'imposer les conditions aux limites correctes: Trois variables imposées à l'entrée (température et les deux composantes de la vitesse) et une imposée à la sortie (la pression).

Le code ainsi obtenu a été prétesté et a donné d'excellents résultats. Les variables convergeaient comme désiré.

4.4 Validation du nouveau code

Une confrontation des résultats obtenus par le nouveau code avec des résultats publiés s'avère indispensable avant de pouvoir attester de la fiabilité du code. Nous envisageons à cet effet un écoulement stationnaire, le cas du canal plan pour lequel une solution analytique existe. On dispose aussi de résultats numériques dans la référence [18].

4.4.1 Solution analytique

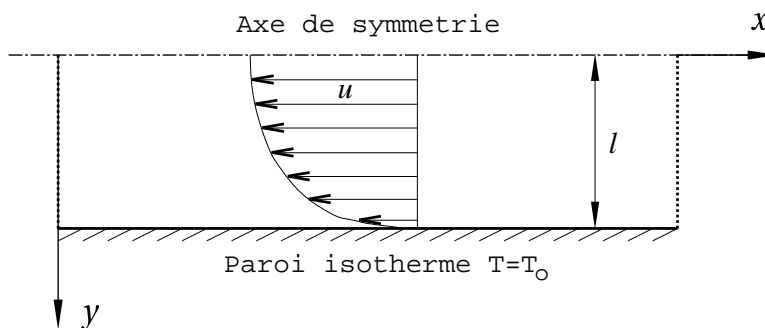


Figure 4.8: Ecoulement dans un demi-canal plan avec parois isothermes.

Vu la symétrie du problème, on peut se limiter au demi-canal. on considère un écoulement incompressible dans un demi-canal à paroi isotherme. La solution établie (indépendante de x) est donnée par :

$$v = 0 \quad (4.3a)$$

$$u = u_m \left(1 - \frac{y^2}{l^2}\right) \quad (4.3b)$$

avec

$$u_m = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) l^2 \quad (4.3c)$$

où u_m représente la vitesse sur l'axe, μ la viscosité dynamique et $\partial P/\partial x$ la valeur du gradient de pression longitudinal qui est constant dans l'écoulement. Avec les conditions aux limites prescrites (voir figure 4.4.1), l'équation de l'énergie associée au problème

$$\kappa \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + u \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0 \quad (4.4)$$

où κ représente la conductivité thermique, admet la solution

$$T(y) = T_o - \frac{\mu u_m^2}{\kappa} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{y}{l}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{l}\right)^4 \right] \quad (4.5)$$

κ et μ étant supposées constantes en première approximation et évaluées en pratique à la température $T = T_o$.

4.4.2 Configuration étudiée

La configuration utilisée pour valider le programme est décrite dans [18, page 123] et représentée sur la figure 4.9. Le domaine de calcul est un demi-canal plan de largeur l et de longueur $L = 10 l$. Le maillage utilisé est uniforme avec 100×10 noeuds. Sur l'axe de symétrie, on impose les conditions

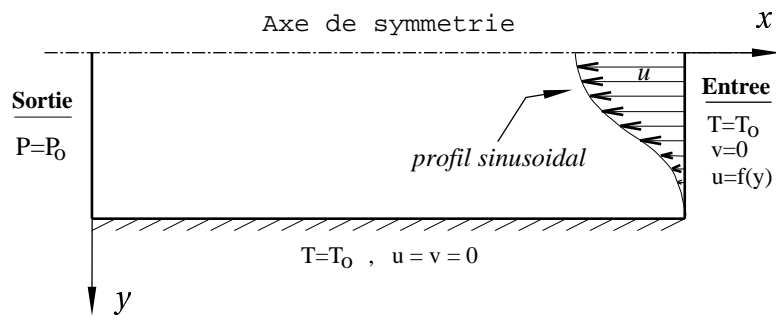


Figure 4.9: Configuration test et conditions aux limites pour la validation du nouveau code: Ecoulement dans un demi-canal plan avec paroi isothermes.

aux limites classiques de symétrie ($v = 0$ et gradient des autres variables égal à zéro). La paroi inférieure est isotherme ($T = T_o$) et on applique les conditions aux limites d'adhérence $u = v = 0$. A l'entrée, la température est fixée à T_o et le profil de vitesse à

$$\begin{aligned} u &= u_o \left[\cos\left(\frac{\pi y}{2l}\right) \right]^2 \\ v &= 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

A la sortie du domaine (frontière Ouest), la pression statique est imposée ($P = P_o$) et on suppose l'écoulement établi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (4.7)$$

Remarque:

Dans leur étude, Poinot et Lelé [18] ont essayé plusieurs types de conditions aux limites à la sortie du domaine. Nous comparons nos résultats à ce qu'ils ont obtenu de meilleur.

4.4.3 Paramètres de l'essai

Les paramètres de base utilisés lors de la simulation numérique sont les suivants:

Fluide utilisé	:	Air
Nombre de Prandtl	:	$Pr = 0.71$
Nombre de Mach	:	$M = u_o/c = 0.1$
Nombre de Reynolds	:	$Re = \rho_o u_o l / \mu_o = 15$
Température de référence	:	$T_o = 273.13 \text{ K}$
Pression de référence	:	$P_o = 10^5 \text{ Pa}$
Densité de référence	:	$\rho_o = 1.2725 \text{ kg/m}^3$
Viscosité de référence	:	$\mu_o = 1.7109 \times 10^{-5} \text{ P1}$
Longueur du domaine	:	$L = 6.072 \times 10^{-5} \text{ m}$
Largeur du domaine	:	$l = L/10$
Maillage	:	100×10 uniforme Cartésien
Pas de temps	:	$\Delta t = 1.833 \times 10^{-9} \text{ s}$
Schéma d'interpolation	:	hybride

Pour une valeur $LM^2/lR_e \ll 1$ (0.007 avec les paramètres ci-dessus), la chute de pression totale le long de la conduite est faible devant la pression moyenne P_o imposée à la sortie et on peut considérer que la masse-volumique ρ reste approximativement constante. On s'attend donc à voir la solution numérique évoluer vers la solution incompressible à la sortie du domaine. De la conservation du débit, il découle par intégration des équations 4.3b et 4.6 que l'on doit avoir

$$u_m = \frac{3}{4} u_o \quad (4.8)$$

d'où le profil de vitesse attendu à la sortie

$$u(y) = -\frac{3}{4} u_o \left(1 - \frac{y^2}{l^2} \right) \quad (4.9)$$

et celui de la température

$$T(y) = T_o - \frac{9}{16} \frac{\mu u_o^2}{\kappa} \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{y}{l}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y}{l}\right)^4 \right] \quad (4.10)$$

avec κ évalué par la formule

$$\kappa = \frac{\mu C_p}{P_r} \quad (4.11)$$

Comme le font remarquer Poinot et Lelé [18], la température décroît en allant de la paroi vers l'axe de symétrie. Cela est dû au gradient de pression négatif dans le sens de l'écoulement retenu dans l'équation de l'énergie.

Le gradient de pression longitudinal est également donné par la solution incompressible. Il est constant et égal à

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{3}{2} \frac{\mu u_o}{l^2} \quad (4.12)$$

4.4.4 Résultats et interprétation

Une solutions stationnaire est recherchée avec le code instationnaire. On considère que la solution stationnaire est atteinte lorsque la variation relative de la solution d'une itération à l'autre reste inférieure à une valeur ϵ prédéfinie. On utilise pour cela la norme Euclidienne et une valeur de ϵ égale à 10^{-5} . Les résultats obtenus sont présentés sous la forme de courbes isovaleurs de pression, température et vitesse, ainsi que de profils transversaux de vitesse longitudinale u et température T . L'évolution longitudinale de la pression est également présentée.

La figure 4.11 représente le champ de pression $100(P - P_o)/P_o$ obtenu par le code NJET. Les résultats concordent avec ceux obtenus par Poinot et Lelé [18] représentés sur la figure 4.10. Pour effectuer la comparaison, il est toutefois nécessaire de se rappeler que les deux écoulements vont en sens contraires et que nous simulons un demi-canal alors que Poinot et Lelé simulent un canal entier.

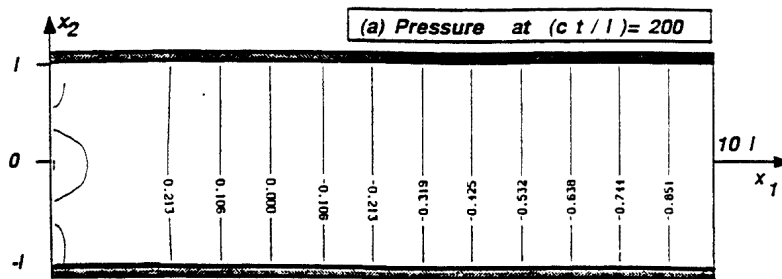


Figure 4.10: Ecoulement dans un canal plan avec parois isothermes. Champ de pression. Ref. [18].

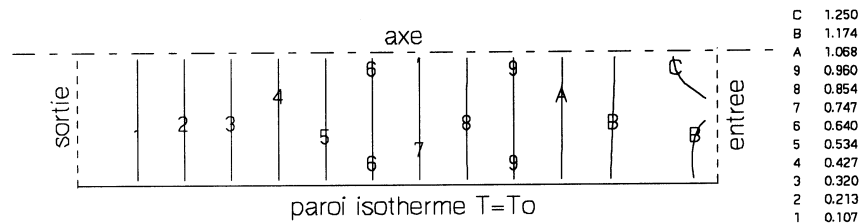


Figure 4.11: Ecoulement dans un demi-canal plan avec parois isothermes. Champ de pression. Code NJET (présente étude).

Les champs de vitesse longitudinale u/u_o sont comparés sur les figures 4.12 (résultats de [18]) et 4.13 (code NJET). La ressemblance des résultats est aussi très claire. On peut constater que les isocontours tendent vers une ligne horizontale en se rapprochant de la sortie. Cela indique que le gradient longitudinal devient nul et donc que l'écoulement devient établi. Notons la rapidité avec

laquelle le vitesse atteint ce régime établi. Nous allons confirmer cela plus loin lors de l'étude du profil transversal de vitesse.

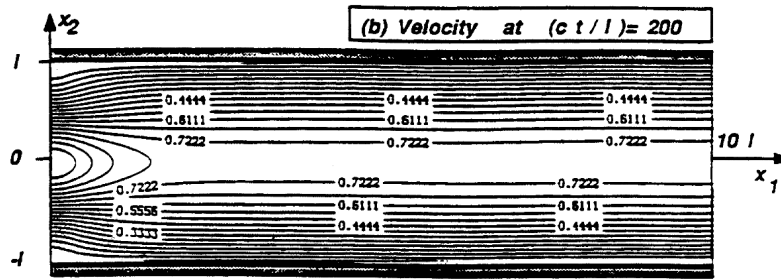


Figure 4.12: Ecoulement dans un canal plan avec parois isothermes. Champs de vitesse u . Ref. [18].

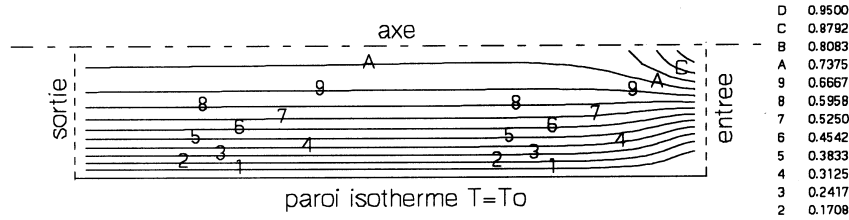


Figure 4.13: Ecoulement dans un demi-canal plan avec parois isothermes. Champ de vitesse u . Code NJET (présente étude).

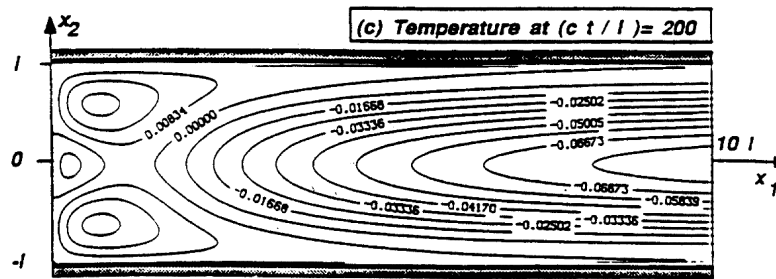


Figure 4.14: Ecoulement dans un canal plan avec parois isothermes. Champ de température. Ref. [18].

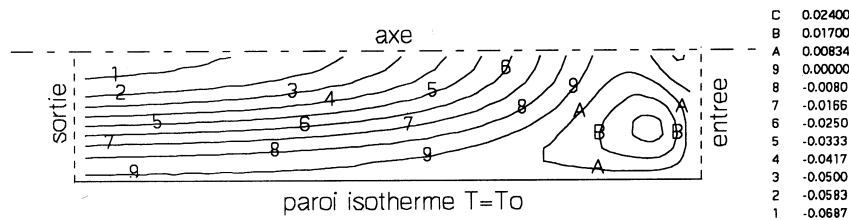


Figure 4.15: Ecoulement dans un demi-canal plan avec parois isothermes. Champ de température. Code NJET (présente étude).

Les champs de température sont donnés sur les figures 4.14 et 4.15. Les deux champs concordent parfaitement. A noter que les mêmes valeurs des isocontours sont utilisées, ce qui permet de faire une comparaison non seulement qualitative mais aussi quantitative (où se situe par exemple l'isotherme $100(T - T_0)/T_0 = -0.0687$ sur les deux courbes ?). On peut aussi noter que les variations de température sont très faibles dans le domaine de calcul justifiant ainsi les comparaisons avec la solution incompressible.

Les figures 4.16 et 4.17 représentent l'évolution du profil transversal de vitesse u le long de la

conduite. On constate qu'en se rapprochant de la sortie du domaine, les profils évoluent vers la solution analytique correspondant au régime établi de l'écoulement de Poiseuille donné par la formule 4.9. La vitesse converge très vite et atteint sa valeur finale à la section $x/L = 0.33$. Nos résultats sont en parfaite concordance avec ceux de la référence [18].

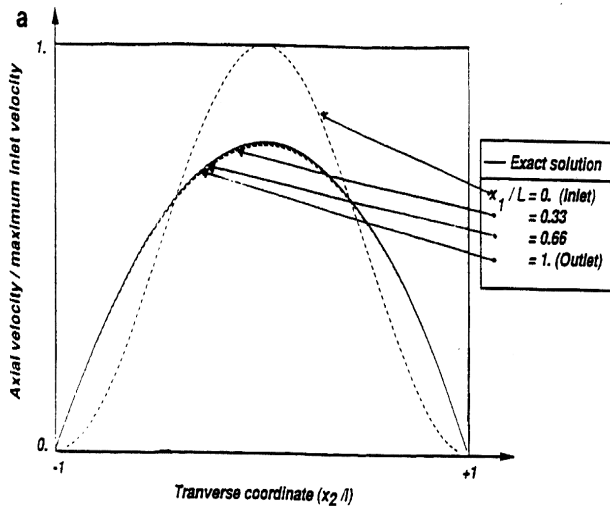


Figure 4.16: Ecoulement dans un canal plan avec parois isothermes. Profil transversal de vitesse u . Ref. [18].

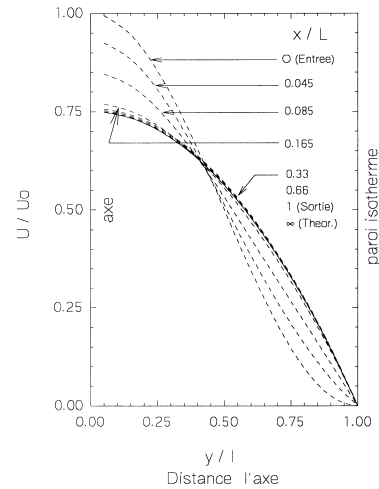


Figure 4.17: Ecoulement dans un demi-canal plan avec parois isothermes. Profil transversal de vitesse u . Code NJET (présente étude).

La figure 4.18 représente une vue éclatée de l'évolution longitudinale du profil transversal de vitesse u .

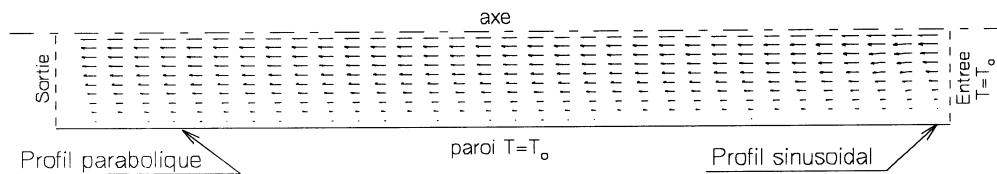


Figure 4.18: Ecoulement dans un demi-canal plan avec parois isothermes. Evolution longitudinale du profil de vitesse u .

L'évolution le long de la conduite du profil transversal de température est donné sur les figures 4.19 et 4.20. Comme pour la vitesse, il y a une bonne concordance avec les résultats de Poinsot et Lelé. Toutefois, le profil de température du régime établi admet un minimum égal à -0.09 dans nos essais alors que ce maximum est de -0.08 pour les résultats de Poinsot et Lelé. En fait, les conditions de l'essai de Poinsot et Lelé sont incomplètement spécifiées (T_0 , κ et le fluide étant indéfinis). Notons aussi que la température n'a pas encore atteint sa solution établie à la sortie de la conduite et que celle-ci est donc trop courte.

La figure 4.21 donne la répartition longitudinale de pression en trois sections ($k = 3, 5$ et 8). On constate que l'évolution est linéaire sur la majeure partie de la conduite avec un gradient de pression égal à $0.9995 \partial P / \partial x_{theorique}$. Cela est en parfaite concordance avec les hypothèses de la théorie. Les profils présentent un pic à l'entrée dû au fait qu'on impose la condition aux limite $\partial P / \partial x = 0$ à l'entrée et que la vitesse v ne peut être nulle proche de l'entrée.

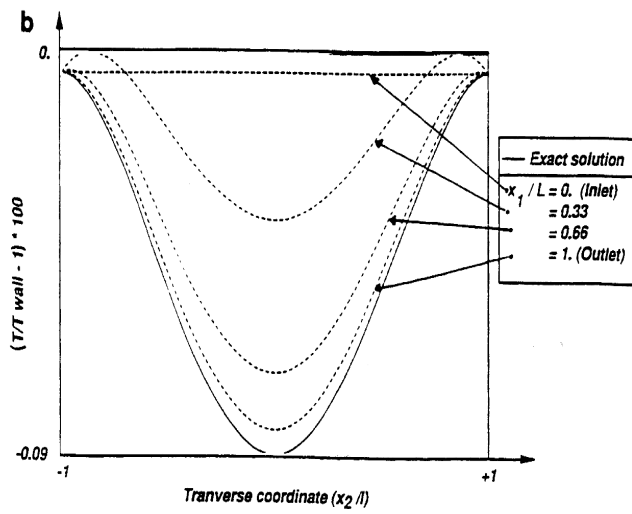


Figure 4.19: Ecoulement dans un canal plan avec paroi isothermes. Profil transversal de température. Ref. [18].

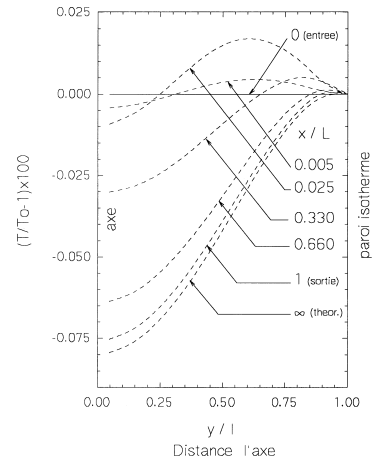


Figure 4.20: Ecoulement dans un demi-canal plan avec parois isothermes. Profil transversal de température. Code NJET (présente étude).

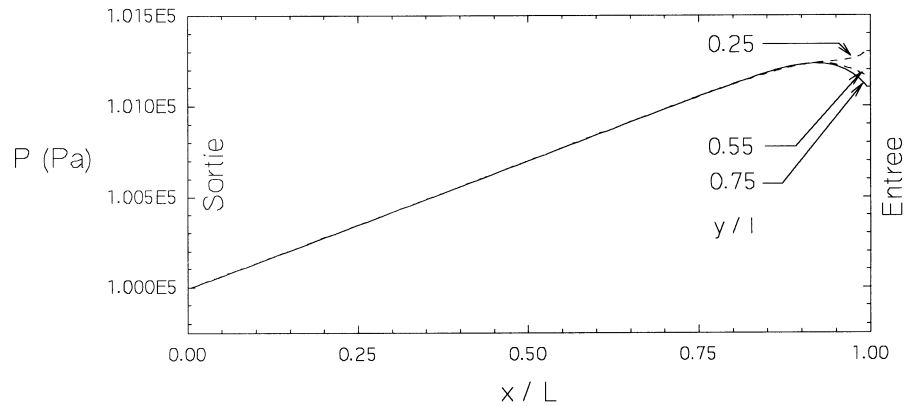


Figure 4.21: Ecoulement dans un demi-canal plan avec parois isothermes. Evolution longitudinale de la pression en trois sections ($k = 3, 5, 8$).

4.5 Conclusion

Les différents tests que nous avons effectués sur le nouveau code de calcul ont été positifs. De plus le code a été validé avec succès et peut donc être utilisé avec confiance pour des investigations ultérieures

Chapitre 5

CONDITIONS AUX LIMITES CARACTERISTIQUES

5.1 Introduction

D'un point de vue mathématique, la résolution d'un problème de Mécanique Des Fluides nécessite des conditions aux limites dites analytiques (ou physiques) qui font de celui-ci un problème bien posé. Cependant, du point de vue numérique, des conditions supplémentaires sur les variables à la frontière doivent être introduites pour le problème discrétisé. Ces conditions, dites numériques, doivent être compatibles avec la physique du problème ainsi qu'avec les conditions aux limites physiques.

La résolution du problème initial par une méthode numérique nécessite la limitation du domaine par des frontières fictives sur lesquelles on ne connaît pas a priori la solution. On est amené à introduire des conditions aux limites artificielles sur ces frontières qui doivent refléter au mieux la physique du problème. Sur les parties perméables de la frontière où l'écoulement est subsonique et localement tourbillonnaire, la spécification des conditions aux limites pose un problème car on ne peut pas utiliser les méthodes locales bien connues appropriées pour les écoulements quasi-parallèles. D'une part, cela aurait pour conséquence une altération de la précision du calcul au voisinage de la frontière et, d'autre part, la réflexion et la génération d'ondes parasites à la frontière pourraient avoir un effet décisif sur l'évolution du phénomène, notamment le développement d'instabilités hydrodynamiques.

Les modèles numériques pour la simulation des équations de la Mécanique Des Fluides requièrent donc des conditions aux limites instationnaires dans ce cas. Pour les systèmes hyperboliques, tels que les équations d'Euler, ou pour ceux de la magnétohydrodynamique, une méthode de spécification des conditions aux limites consiste à intégrer directement les équations de conservation sur la frontière. A cette fin, la méthode des caractéristiques est utilisée pour transformer ces équations en un système d'équations de compatibilité dont l'intérêt principal est de mettre en évidence les différentes ondes qui se propagent à travers la frontière et de permettre ainsi la prescription de conditions aux limites physiques adéquates. Cette méthode a été introduite par Thompson [24] pour les équations d'Euler et par Wu and Hu [26] pour les équations de la magnétohydrodynamique. Plus tard, un formalisme unificateur de prescription de conditions aux limites basé sur la même méthode a été proposé par Thompson [25] pour les systèmes hyperboliques (et en particulier pour les équations d'Euler) et appliqué par Sun, Wu and Dryer [23] dans le cas des équations de la magnétohydrodynamique. Poinso and Lelé [18] ont proposé une extension de ces conditions aux limites aux équations de Navier-Stokes qu'ils ont testé sur différents types d'écoulements avec amélioration dans tous les cas.

Le but de cette étude est d'adapter ce type de conditions aux limites à un code Navier-Stokes compressible, instationnaire, bidimensionnel, en volumes finis et utilisant la méthode à pas fractionnaire PISO [11] pour résoudre le couplage obtenu lors de la discrétisation temporelle par le schéma d'Euler implicite. Ces conditions aux limites devraient apporter des améliorations dans la simulation des instabilités de jet qui sont très sensibles aux ondes acoustiques parasites engendrées par la réflexion des ondes de l'écoulement sur les frontières où des conditions aux limites non adéquates sont utilisées.

5.2 Bases théoriques - Analyse caractéristique pour les équations d'Euler

5.2.1 Cas général - Système hyperbolique multidimensionnel

Considérons le système d'équations aux dérivées partielles quasi-linéaire, homogène, du premier ordre:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}^k \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k} = 0 \quad (5.1)$$

où t (temps) et x_k ($k = 1, \dots, n$) représentent les variables indépendantes, \mathbf{U} le vecteur à m composantes des inconnues ou variables primitives et \mathbf{A}^k des matrices $m \times m$ dont les coefficients sont fonction de t , x_k et \mathbf{U} mais non de ses dérivées. Le système 5.1 est hyperbolique, si pour toute direction $\vec{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n)$, il admet des solutions de la forme onde plane

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}} e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - \omega t)} \quad (5.2)$$

avec ω réel, $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ représentant le vecteur position. Ces solutions correspondent aux ondes se propageant dans la direction $\vec{\kappa}$ à la vitesse de phase $a = \omega/\kappa$ et sont aussi solutions de l'équation d'onde

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \mathbf{U} = 0 \quad (5.3)$$

avec

$$\vec{a} = \frac{\omega}{\kappa^2} \vec{\kappa} \quad (5.4)$$

Les constantes ω sont les valeurs propres de la matrice

$$\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\kappa} = \mathbf{A}^k \kappa_k \quad (5.5)$$

où $\vec{\mathbf{A}}$ représente la matrice

$$\vec{\mathbf{A}} = (\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{A}^n)^T \quad (5.6)$$

Toute solution du système 5.1 peut alors se mettre sous la forme

$$\mathbf{U} = \sum_{\alpha=1}^m \hat{\mathbf{U}}_{\alpha} e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - \omega_{\alpha} t)} \quad (5.7)$$

où les ω_{α} sont les valeurs propres associées à la direction $\vec{\kappa}$ et $\hat{\mathbf{U}}_{\alpha}$ les vecteurs propres associés.

Equations de compatibilité

Le système 5.1 peut-être transformé en un système équivalent composé d'équations de compatibilité obtenues par combinaisons linéaires des équations originales du système 5.1. Ces équations de compatibilité sont caractérisées par le fait qu'elles ne comportent que des dérivées le long de certaines surfaces de dimension n définies dans l'espace à $n + 1$ dimensions $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ qui sont les surfaces caractéristiques associées à la direction $\vec{\kappa}$. Les coefficients de ces combinaisons linéaires sont les composantes des m vecteurs propres à gauche l_j ($j = 1, \dots, m$) associés à la matrice $\mathbf{A}^k \kappa_k$ et définies par les relations

$$\mathbf{l}_j^T (\mathbf{A}^k \kappa_k) = \lambda_j \mathbf{l}_j^T \quad (5.8)$$

avec λ_j désignant la j ème valeur propre de la matrice $\mathbf{A}^k \kappa_k$. En désignant par \mathbf{S}^{-1} la matrice dont les rangées sont les les vecteurs \mathbf{l}_j^T , la forme caractéristique du système 5.1 formée des équations de compatibilité associées à la direction $\vec{\kappa}$, est obtenue en multipliant 5.1 à gauche par la matrice \mathbf{S}^{-1}

$$\mathbf{S}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{S}^{-1} \left(\mathbf{A}^k \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (5.9)$$

Forme caractéristique associée à la direction d'un axe de coordonnées

Lorsqu'on traite les conditions aux limites sur une frontière perpendiculaire à un axe de coordonnées, l'axe des x par exemple, il est intéressant d'écrire les équations de compatibilité associées à la direction $\vec{\kappa} = \vec{x}$, car on peut ainsi dissocier les ondes qui entrent dans le domaine de celles qui en sortent.

Ainsi, dans le cas où $\vec{\kappa} = \vec{x} = (1, 0, \dots, 0)$, la matrice $\mathbf{A}^k \kappa_k$ n'est autre que \mathbf{A}^1 , et en vertu de 5.8, elle est diagonalisable par la transformation

$$\mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S} = \mathbf{\Lambda} = \text{Diag}(\lambda_i) \quad (5.10)$$

où on peut montrer que \mathbf{S} n'est autre que la matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres à droite \mathbf{r}_j associés à la matrice \mathbf{A}^1 . Les équations de compatibilité prennent alors la forme

$$\mathbf{S}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \mathbf{S}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{S}^{-1} \mathbf{C} = 0 \quad (5.11)$$

avec

$$\mathbf{C} = \sum_{k=2}^n \mathbf{A}^k \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_k}$$

ou sous forme scalaire

$$\mathbf{1}_i^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_i \mathbf{1}_i^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{1}_i^T \mathbf{C} = 0 \quad (5.12)$$

Forme monodimensionnelle des équations de compatibilité - Variables caractéristiques

Considérons la forme monodimensionnelle du système précédent 5.12, obtenue en posant $\mathbf{1}_i^T \mathbf{C} = 0$:

$$\mathbf{1}_i^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \lambda_i \mathbf{1}_i^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (5.13)$$

et définissons les variables W_i par

$$dW_i = \mathbf{1}_i^T d\mathbf{U} \quad (5.14)$$

Dans le cas des équations d'Euler monodimensionnelles qui nous intéressent, les variables W_i peuvent être intégrées car les membres de droite de l'équation 5.14 ne contiennent pas plus de deux différentielles. Ces nouvelles variables appelées variables caractéristiques, permettent de réécrire le système 5.13 sous la forme

$$\frac{\partial W_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial W_i}{\partial x} = 0 \quad (5.15)$$

qui est un système découpé d'équations d'ondes se propageant à la vitesse λ_i dans la direction x . Définissons les variables L_i par

$$L_i = \lambda_i \mathbf{1}_i^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \lambda_i \frac{\partial W_i}{\partial x} \quad (5.16)$$

On constate d'après 5.15 que $-L_i$ représente la variation temporelle de l'amplitude W_i de l'onde caractéristique se propageant à la vitesse λ_i dans la direction x . Par référence à la solution théorique de l'équation d'onde, il devient clair que la quantité L_i doit être évaluée numériquement par un schéma décentré amont.

Toutes ces remarques sont à la base de la méthode de prescription des conditions aux limites. Considérons la frontière $x = x_o$ située à la sortie du domaine de calcul (fig.5.1):

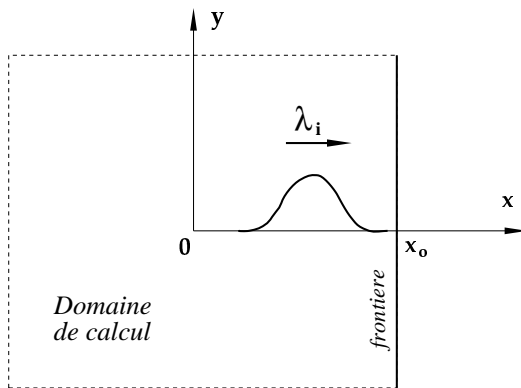


Figure 5.1: Analyse caractéristique à la frontière

- Lorsque la vitesse λ_i de l'onde caractéristique W_i est positive, celle-ci se propage de l'intérieur du domaine de calcul vers l'extérieur. *La valeur de la L_i correspondante est estimée par un schéma décentré amont* qui fait intervenir uniquement les points intérieurs du domaine de calcul.
- Lorsque la vitesse λ_i est négative, l'onde W_i rentre dans le domaine et la quantité L_i ne peut être évaluée par la même méthode qui serait instable. *Il faut donc imposer une condition aux limites* qui remplace l'information inconnue du domaine extérieur.

Deux conséquences importantes découlent de ce qui précède:

1. Le nombre de conditions aux limites à imposer est égal au nombre de caractéristiques entrantes dans le domaine de calcul (valeurs propres λ_i positives à l'entrée du domaine de calcul et négatives à la sortie).
2. La valeur L_i associée à une onde entrante doit être évaluée par la condition aux limites imposée.

Relations LODI

Afin de réaliser le dernier point mentionné (évaluation de la L_i associée à une onde entrante à l'aide de la condition aux limites imposée), les équations de compatibilité 5.13 avec l'introduction de la notation L_i

$$\mathbf{I}_i^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + L_i = 0 \quad (5.17)$$

et dont la forme matricielle est la suivante

$$\mathbf{S}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{L} = 0 \quad (5.18)$$

avec $\mathbf{L} = (L_1, L_2, \dots, L_m)^T$, sont mises sous une forme où les dérivées temporelles des variables primitives sont découplées. On obtient celle-ci en multipliant 5.18 à gauche par \mathbf{S} , ce qui donne

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\mathbf{S}\mathbf{L} \quad (5.19)$$

Ce système, appelé système LODI (Local One-Dimensional Inviscid) par Poinso and Lelé [18], sera utilisé ultérieurement pour la prescription des conditions aux limites dans le cas bidimensionnel.

Le choix des grandeurs primitives est dicté par la nécessité d'imposer des grandeurs mesurables comme conditions aux limites.

Lorsqu'on impose une condition aux limites de Dirichlet sur la variable u_j (Composante j du vecteur \mathbf{U}), on peut en déduire la valeur de $\partial u_j / \partial t$ et se servir de la relation 5.19 pour calculer la valeur L_i de l'onde entrante en fonction des valeurs L_i des ondes sortantes. Si la condition aux limites sur u_j est imposée en terme de gradient dans la direction normale à la frontière (qui est celle de propagation des ondes caractéristiques), on obtient également une relation permettant d'exprimer la valeur L_i de l'onde entrante en fonction des valeurs L_i des ondes sortantes en utilisant simplement la relation 5.16 inversée

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{f}(\mathbf{L}) \quad (5.20)$$

Toutefois, l'utilisation des relations LODI 5.19 pour évaluer les variations d'amplitude des ondes caractéristiques dans le cas bidimensionnel n'est pleinement justifiée que dans le cas où l'écoulement admet un caractère localement monodimensionnel, ce qui correspond pour les équations d'Euler à une pression et une vitesse uniformes le long de la frontière:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} \cdot \nabla P &= 0 \\ (\vec{\tau} \cdot \nabla) \vec{\mathbf{V}} &= 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

où $\vec{\tau}$ désigne le vecteur unitaire parallèle à la frontière [10, p.377]. Dans le cas des équations de Navier-Stokes, la justification est encore plus sujette à controverse puisque l'écoulement doit aussi être localement non visqueux. L'expérience numérique a prouvé toutefois, que la méthode donne d'excellents résultats.

Equations de compatibilité avec variables conservatives

Lorsqu'on souhaite obtenir les dérivées temporelles des variables conservatives tout en conservant l'expression des variations d'amplitude L_i des ondes caractéristiques en fonction des variables primitives, il faut transformer le système 5.11 de la façon suivante: Sous forme conservative, le système 5.1 s'écrit

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^k}{\partial x_k} = 0 \quad (5.22)$$

où $\tilde{\mathbf{U}}$ est le vecteur à m composantes des variables conservatives et \mathbf{F}^k le vecteur flux dans la direction x_k . Définissons les matrices \mathbf{P} et \mathbf{Q}^k par

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{ij} &= \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}_i}{\partial \mathbf{U}_j} \\ \mathbf{Q}_{ij}^k &= \frac{\partial \mathbf{F}_i^k}{\partial \mathbf{U}_j} \end{aligned} \quad (5.23)$$

On a alors les relations

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^k &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q}^k \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} &= \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \end{aligned} \quad (5.24)$$

et le système 5.11 peut-être transformé à l'aide de 5.16,5.23 en

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \mathbf{P} \mathbf{S} \mathbf{L} + \tilde{\mathbf{C}} = 0 \quad (5.25)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{C}} = \sum_{k=2}^n \frac{\partial \mathbf{F}^k}{\partial x_k} = \mathbf{P} \mathbf{C} \quad (5.26)$$

Ceci est la forme caractéristique de 5.22 associée à la direction x . On constate que les termes hyperboliques correspondant à la direction de propagation x ont simplement été transformés par la relation

$$\frac{\partial \mathbf{F}^1}{\partial x} = \mathbf{P} \mathbf{S} \mathbf{L} \quad (5.27)$$

C'est cette procédure qui sera utilisée pour les équations d'Euler, ainsi que pour les équations de Navier-Stokes, le terme $\tilde{\mathbf{C}}$ incluant alors les termes visqueux.

Conditions aux limites

Un problème mixte aux valeurs initiales et aux valeurs limites est bien posé si on peut établir l'existence et l'unicité de la solution et sa dépendance continue en fonction des données initiales et aux limites.

Pour un système hyperbolique de la forme 5.1, le nombre de conditions aux limites physiques qu'il faut imposer sur une frontière de normale $\vec{\mathbf{n}}(n_1, n_2, \dots, n_n)$ pour avoir un problème bien posé, dépend du signe des valeurs propres de la matrice $\mathbf{A}^k n_k$. Si la frontière correspond à une sortie (domaine de calcul à gauche de la frontière), le nombre de conditions aux limites à imposer est égal au nombre de valeurs propres négatives et s'il correspond à une entrée, le nombre de conditions aux limites est égal au nombre de valeurs propres positives.

Alors que les conditions aux limites doivent imposer les variables caractéristiques (amplitudes des ondes rentrantes), en pratique, ce sont les variables primitives (grandeurs mesurables) qui sont utilisées pour la spécification des conditions aux limites. Il faut donc que le choix des variables à imposer permette de déterminer l'amplitude des ondes caractéristiques rentrantes. Dans le cas monodimensionnel, l'analyse caractéristique suffit pour vérifier cette condition alors que dans le cas des systèmes multidimensionnels, il faut avoir recours à l'analyse des modes normaux développée par Kreiss [12]. Le cas des équations d'Euler à plus d'une dimension a été traité par Olinger et Sundström [16] ainsi que Olinger [15].

Pour les systèmes à coefficients variables, l'étude du problème bien posé se fait en ayant recours à la technique du gel des coefficients et pour les systèmes non-linéaires, l'étude se fait sur le système obtenu par linéarisation.

En résumé, le nombre de conditions aux limites à imposer est égal au nombre de caractéristiques rentrantes alors que le choix des variables à imposer doit être guidé par l'analyse des modes normaux.

5.2.2 Application - Cas des équations d'Euler bidimensionnelles

Forme conservative

La forme conservative 5.22 pour les équations d'Euler bidimensionnelles est la suivante:

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{U}}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}^1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}^2}{\partial y} = 0 \quad (5.28)$$

avec

$$\tilde{\mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}^1 = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (\rho e + P)u \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}^2 = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho vu \\ \rho v^2 + P \\ (\rho e + P)v \end{pmatrix}$$

ρ désignant la masse volumique, u et v les composantes de la vitesse suivant les coordonnées cartésiennes x et y , e l'énergie totale ($e = c_v T + 0.5(u^2 + v^2)$ pour un gaz parfait) et P la pression. La correspondance avec les notations utilisées précédemment est la suivante : $x^1 = x$, $x^2 = y$, $u_1 = u$ et $u_2 = v$.

Forme primitive

Sous forme primitive, le système précédent s'écrit

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}^1 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}^2 \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} = 0 \quad (5.29)$$

avec

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ P \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^1 = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 1/\rho \\ 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma P & 0 & u \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 1/\rho \\ 0 & 0 & \gamma P & v \end{pmatrix}$$

Matrices de passage

Le passage des variables primitives aux variables conservatives se fait à l'aide des matrices de passage définies par les relations 5.23. On obtient:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 \\ 0.5(u^2 + v^2) & \rho u & \rho v & \frac{1}{\gamma-1} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

$$\mathbf{Q}^1 = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 & 0 \\ u^2 & 2\rho u & 0 & 1 \\ uv & \rho v & \rho u & 0 \\ 0 & \frac{\gamma P}{\gamma-1} & 0 & \frac{\gamma u}{\gamma-1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{Q}^2 = \begin{pmatrix} v & 0 & \rho & 0 \\ uv & \rho v & \rho u & 0 \\ v^2 & 0 & 2\rho v & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\gamma P}{\gamma-1} & \frac{\gamma v}{\gamma-1} \end{pmatrix}$$

Analyse caractéristique suivant la direction x

Valeurs propres et vecteurs propres

Les quatre (4) valeurs propres de la matrice \mathbf{A}^1 sont données par

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u - c \\ \lambda_2 &= u \\ \lambda_3 &= u \\ \lambda_4 &= u + c \end{aligned} \quad (5.31)$$

où $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ désigne la vitesse isentropique du son. Les vecteurs propres associés à gauche

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_1^T &= (0, -\rho c, 0, 1) \\ \mathbf{l}_2^T &= (c^2, 0, 0, -1) \\ \mathbf{l}_3^T &= (0, 0, 1, 0) \\ \mathbf{l}_4^T &= (0, \rho c, 0, 1) \end{aligned} \quad (5.32)$$

forment un ensemble orthonormé avec les vecteurs propres à droite

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c^2} \\ -\frac{1}{2\rho c} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c^2} \\ \frac{1}{2\rho c} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

et les matrices S et S^{-1} sont données par

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -\rho c & 0 & 1 \\ c^2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho c & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2c^2} & \frac{1}{c^2} & 0 & \frac{1}{2c^2} \\ -\frac{1}{2\rho c} & 0 & 0 & \frac{1}{2\rho c} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

Variables L_i

Les variations temporelles L_i des ondes caractéristiques définies par les relations 5.16 sont les suivantes:

$$\begin{aligned} L_1 &= (u - c) \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \rho c \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ L_2 &= u \left[c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right] \\ L_3 &= u \frac{\partial v}{\partial x} \\ L_4 &= (u + c) \left[\rho c \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (5.35)$$

Système LODI

Le système LODI défini par les relations 5.19 prend la forme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{1}{c^2} [L_2 + 0.5(L_1 + L_4)] \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{2\rho c} [L_4 - L_1] \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -L_3 \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= -\frac{1}{2} [L_1 + L_4] \end{aligned} \quad (5.36)$$

ou, sous forme inversée

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{1}{c^2} \left[\frac{L_2}{u} + \frac{1}{2} \left(\frac{L_4}{u+c} + \frac{L_1}{u-c} \right) \right] \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2\rho c} \left[\frac{L_4}{u+c} - \frac{L_1}{u-c} \right] \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{L_3}{u} \\ \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left[\frac{L_1}{u-c} + \frac{L_4}{u+c} \right] \end{aligned} \quad (5.37)$$

Modification des termes hyperboliques

Les termes hyperboliques $\partial \mathbf{F}^1 / \partial x$ correspondant à la direction de propagation x sont modifiés à l'aide de la relation 5.27 ainsi qu'en introduisant la relation

$$\mathbf{d} = \mathbf{S} \mathbf{L} \quad (5.38)$$

et l'on obtient

$$\frac{\partial \mathbf{F}^1}{\partial x} = \begin{pmatrix} d_1 \\ ud_1 + \rho d_2 \\ vd_1 + \rho d_3 \\ 0.5(u^2 + v^2)d_1 + \rho ud_2 + \rho vd_3 + \frac{d_4}{\gamma-1} \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

avec

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c^2} [L_2 + 0.5(L_1 + L_4)] \\ \frac{1}{2\rho c} [L_4 - L_1] \\ L_3 \\ 0.5 [L_1 + L_4] \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Une remarque s'impose ici. Le vecteur \mathbf{d} défini par la relation 5.40 n'est pas identique à celui mentionné dans les références [18, 24, 25]. La différence résulte du choix différent que nous avons fait pour les vecteurs des variables primitives \mathbf{U} et conservatives $\tilde{\mathbf{U}}$. Une simple permutation entre les d_i permet de voir que les résultats sont analogues.

Conditions aux limites pour les équations d'Euler

Dans le cas des équations d'Euler bidimensionnelles 5.29, le nombre de conditions analytiques nécessaires dépend du signe des valeurs propres de la matrice \mathbf{A}^1 qui est identique à la matrice du problème linéarisé. Le signe des valeurs propres dépend du signe de la composante u de la vitesse selon x et du régime d'écoulement (subsonique $u < c$ ou supersonique $u > c$). Le tableau 5.1 résume le nombre de conditions nécessaires pour deux types de frontière (entrée et sortie).

<i>Valeurs propres de \mathbf{A}^1</i>	<i>Frontière</i>	<i>Conditions aux limites physiques</i>	<i>Conditions aux limites numériques</i>
$u, u, u + c, u - c$	Entrée subsonique	3	1
	Entrée supersonique	4	0
	Sortie subsonique	1	3
	Sortie supersonique	0	4

Table 5.1: Nombre de conditions aux limites pour les équations d'Euler bidim.

Les conditions aux limites numériques sont celles qui complètent les conditions analytiques et qui sont nécessaires pour la résolution du problème discrétisé.

Le choix des variables à imposer dépend essentiellement du type de frontière. Pour une sortie subsonique, on obtient un problème bien posé en imposant la pression comme condition analytique.

5.3 Méthode NSCBC

La méthode NSCBC (Navier-Stokes Characteristic Boundary Conditions) introduite par Poinot et Lelé [18] et que nous allons utiliser sur la frontière de sortie dans notre Code de calcul, est une méthode de spécification des conditions aux limites pour les équations de Navier-Stokes, basée sur l'analyse caractéristique des équations d'Euler associées. Elle repose sur les principes suivants:

1. Le nombre de conditions aux limites utilisées pour les équations de Navier-Stokes est celui, nécessaire pour avoir un problème bien posé comme l'indiquent les analyses théoriques effectuées par Strikwerda [22] et Dutt [1].
2. Les conditions aux limites pour Navier-Stokes sont construites à partir des conditions aux limites caractéristiques associées aux équations d'Euler, puis complétées par des conditions aux limites visqueuses supplémentaires, le nombre des conditions aux limites nécessaire pour Navier-Stokes étant supérieur à celui d'Euler (Le terme visqueux se rapporte aux mécanismes spécifiques à Navier-Stokes: Dissipation visqueuse et diffusion thermique).

Exemple:

Une sortie subsonique bidimensionnelle requiert trois (3) conditions aux limites physiques. L'une d'elles sera la condition aux limites non-visqueuse obtenue pour les équations d'Euler et elle sera complétée par deux (2) conditions aux limites visqueuses.

Plus précisément, le rôle des conditions aux limites caractéristiques associées aux équations d'Euler est de :

- (a) Déterminer le nombre de conditions aux limites visqueuses et non-visqueuses d'une part, physiques et numériques d'autre part.

- (b) Indiquer comment modifier les termes hyperboliques des équations de Navier-Stokes correspondant aux ondes se propageant dans la direction normale à la frontière.
 - (c) Montrer comment évaluer ces termes.
3. La détermination des valeurs des inconnues principales sur la frontière à l'instant $(n + 1)$ se fait explicitement en intégrant les équations du mouvement sur la frontière. A cette fin, les équations sont discrétisées selon les règles suivantes:
- (a) Les conditions aux limites visqueuses supplémentaires, qui doivent être compatibles avec les conditions aux limites non-visqueuses, sont implantées directement dans les équations. Pour un choix convenable des conditions aux limites visqueuses, il est possible de se référer aux travaux de Strikwerda [22] et Olinger et Sundström [16].
 - (b) Si une condition aux limites physique impose la valeur de l'une des inconnues principales sur la frontière, il n'est pas nécessaire d'intégrer l'équation correspondante sur la frontière. En général, le choix de l'équation à éliminer est indiqué dans la référence [18, p.111].
 - (c) Les termes hyperboliques (terme L_i des équations 5.16, 5.35) sont évalués en fonction du sens de propagation des ondes:
 - i. S'ils correspondent à des ondes sortantes (selon le signe de λ_i), ils sont évalués, comme pour Euler, à l'aide de schémas décentrés ne faisant intervenir que les points intérieurs du domaine de calcul.
 - ii. S'ils correspondent à des ondes rentrantes, deux cas sont à envisager:
 - A. La connaissance d'une solution approchée à l'extérieur, permet d'estimer les gradients normaux à la frontière des inconnues principales et ceux-ci sont utilisées directement pour le calcul des termes hyperboliques.
 - B. On ne connaît rien sur la solution à la frontière et il faut donc choisir une condition aux limites. Cela est réalisé en considérant l'écoulement localement non-visqueux et monodimensionnel (hypothèse LODI), ce qui permet d'exprimer les termes hyperboliques correspondants aux ondes rentrantes en fonction des termes hyperboliques connus correspondants aux ondes sortantes, une fois la condition aux limites à imposer choisie.
 - (d) Les dérivées normales à la frontière subsistant dans les équations sont évaluées par des schémas décentrés amont.
 - (e) Les reste des termes est discrétisé avec le même schéma qu'à l'intérieur afin de garantir une bonne consistance avec le schéma intérieur.

5.4 Implémentation de la méthode NSCBC dans notre code calcul

5.4.1 Procédure générale

Le nouveau code NJET permet la résolution par la méthode PISO des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles, compressibles, instationnaires, discrétisées par volumes finis et schéma d'Euler implicite. La méthode numérique, qui est implicite, a été décrite de façon détaillée dans le chapitre 3.

Nous nous proposons d'implémenter les conditions aux limites par la méthode NSCBC au code de calcul de la façon suivante:

1. Le champ de l'écoulement étant connu à l'instant (n) , on détermine explicitement la valeur des inconnues principales à l'instant $(n + 1)$ sur la frontière par la méthode NSCBC décrite dans la section 5.3.
2. Le schéma de discrétisation des équations sur la frontière utilisé dans NSCBC, n'est pas le même que celui utilisé à l'intérieur car, d'une part, le schéma intérieur est implicite et, d'autre part, la discrétisation est effectuée par volumes finis et sur des volumes distincts pour les différentes variables. De plus la forme des équations sur la frontière (forme caractéristique) est différente de celle des équations à l'intérieur (forme conservative).

3. Les valeurs ainsi calculées sur la frontière sont utilisées comme conditions aux limites de Dirichlet pour avancer les valeurs de l'écoulement à l'intérieur du domaine de calcul à l'instant $(n+1)$.
4. Les équations sur la frontière utilisent comme inconnues principales les variables conservatives car, on obtient ainsi directement les grandeurs nécessaires pour le domaine intérieur et de plus, un traitement implicite des conditions aux limites pourrait être envisagé.

5.4.2 Modification des équations sur la frontière

On considère une frontière perpendiculaire à l'axe des x . les termes hyperboliques des équations de conservation (2.1–2.4) sont modifiés sur cette frontière à l'aide des relations (5.25–5.27, 5.38–5.40). Le terme \tilde{C} de l'équation 5.25 comprend tous les termes visqueux. On obtient la forme suivante:

Equation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + d_1 + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0 \quad (5.41)$$

Equations de quantité de mouvement

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + u d_1 + \rho d_2 + \frac{\partial \rho u v}{\partial y} = \rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + v d_1 + \rho d_3 + \frac{\partial \rho v v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \quad (5.43)$$

Equation de l'énergie

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)d_1 + \frac{d_4}{\gamma - 1} + \rho u d_2 + \rho v d_3 + \frac{\partial}{\partial y}[(\rho e + P)v] = \\ \frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_{xx} + v\sigma_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(u\sigma_{xy} + v\sigma_{yy}) - \frac{\partial q_x}{\partial x} - \frac{\partial q_y}{\partial y} + \rho u g_x + \rho v g_y \end{aligned} \quad (5.44)$$

où q_x et q_y représentent les flux de chaleur par conduction dans les directions x et y respectivement. Les termes d_i sont définis par les relations 5.35 et 5.40.

5.4.3 Configuration étudiée - Choix des conditions aux limites

La méthode NSCBC est applicable à différents types de frontières. L'objectif de ce travail étant d'apporter une solution au traitement des conditions aux limites à la frontière de sortie, nous nous intéressons plus particulièrement au cas important d'une "sortie subsonique".

Pour les équations de Navier-Stokes bidimensionnelles, le nombre de conditions aux limites physiques nécessaire à une sortie subsonique est égal à trois [1, 22]. Dans la méthode NSCBC, l'une de ces trois conditions aux limites est la condition aux limites non-visqueuse des équations d'Euler associées (table 5.1 et équation 5.29). Les deux autres sont des conditions aux limites supplémentaires dites conditions aux limites visqueuses. L'étude du signe des valeurs propres (éq. 5.31) montre qu'une seule est négative (λ_1) et que les trois autres ($\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$) sont positives. Les variations d'amplitude des ondes caractéristiques sortantes sont donc L_2, L_3 et L_4 . Un schéma décentré utilisant les points intérieurs du domaine est utilisé pour les évaluer. L_1 correspondant à l'onde rentrante doit être évaluée en utilisant la condition aux limites non-visqueuse choisie. Différentes possibilités sont listées dans ce qui suit.

Conditions aux limites classiques

Comme condition aux limite non-visqueuse des équations d'Euler associées, on peut choisir par exemple d'imposer la pression sur la frontière de sortie ($P = P_o$). Il s'ensuit que $\partial P / \partial t = 0$ sur la frontière, ce qui permet d'utiliser les relations LODI 5.36 pour obtenir la relation suivante

$$L_1 = -L_4 \quad (5.45)$$

permettant de déterminer L_1 en fonction de la valeur connue de L_4 .

Conditions aux limites non réfléchissantes

Imposer la pression (ou bien une composante de la vitesse) représente une condition aux limites bien posée pour une frontière de type sortie subsonique. Cependant, cela conduit au problème bien connu de la réflexion des ondes sur la frontière. Pour y remédier, une solution proposée par plusieurs auteurs, consiste à utiliser des conditions aux limites non-réfléchissantes. Engquist et Majda [2] ont proposé ce type de conditions aux limites pour les systèmes linéaires hyperboliques multidimensionnels. Hedström [9] a étudié le cas des systèmes non linéaires monodimensionnels. Wu et Hu [26] ont proposé une extension aux systèmes non-linéaires multidimensionnels, basée sur la méthode de projection des caractéristiques dans le cas des équations de la magnétohydrodynamique. Plus tard, Thompson [24] a généralisé la méthode de Hedström aux équations d'Euler mono et bi-dimensionnelles. Dans le cas bidimensionnel, sa méthode consiste à annuler la variation d'amplitude des ondes rentrantes, en l'occurrence:

$$L_1 = 0 \tag{5.46}$$

Conditions aux limites partiellement réfléchissantes

La condition aux limites non-réfléchissante présente un inconvénient majeur; l'écoulement n'a aucun moyen de déterminer la pression moyenne et cela conduit donc à la dérive des variables avec le temps. Le problème devient mal posé. Poinot et Lelé [18] ont proposé une condition aux limites partiellement non-réfléchissante qui conduit à un problème bien posé. Son principe est d'imposer la pression P à l'infini, ce qui est réalisé en posant

$$L_1 = K(P - P_\infty) \tag{5.47}$$

où K est une constante dont la forme qui suit a été donnée par Rudy et Strikwerda [19]:

$$K = \frac{\sigma(1 - M^2)c}{L} \tag{5.48}$$

avec

σ : Constante.

M : Nombre de Mach de l'écoulement.

c : Célérité du son.

L : Longueur caractéristique de l'écoulement.

et P_∞ est la pression à l'infini. Cette condition aux limites permet la non-réflexion des ondes tout en maintenant la valeur de P sur la frontière proche de P_∞ . Le choix de σ dépend de la configuration. $\sigma = 0$ correspond à une frontière complètement non-réfléchissante. $\sigma = 0.25$ est une valeur recommandée pour une sortie subsonique.

Conditions aux limites visqueuses

Comme indiqué précédemment, les équations de Navier-Stokes nécessitent deux conditions aux limites supplémentaires dites conditions aux limites visqueuses. Pour une sortie subsonique, Poinot et Lelé [18] ont testé plusieurs combinaisons de conditions aux limites visqueuses et ont abouti à la conclusion que l'un des choix les plus approprié est le suivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_x}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Ces conditions aux limites sont implantées directement dans les équations (le terme $\partial q_x / \partial x$ est posé égal à zéro dans l'équation de l'énergie 5.44...). Pour un choix adéquat de conditions aux limites visqueuses, on peut se référer aux travaux de Olinger et Sunström [16] et Strikwerda [22].

5.4.4 Calcul des inconnues principales sur la frontière à l'instant $t = (n + 1)$

La première étape de l'algorithme de conditions aux limites consiste à calculer, par la méthode NSCBC, la valeur des inconnues principales sur la frontière à l'instant $(n + 1)$. La procédure est la suivante:

1. Analyse du signe des valeurs propres. ce qui permet de discerner les ondes sortantes des ondes entrantes. Dans notre cas, trois ondes caractéristiques sont sortantes (L_2 , L_3 et L_4) et une est entrante (L_1).
2. L_1 est évaluée à l'aide de la relation 5.47 qui est la condition aux limites partiellement non-réfléchissante proposée par Poinot et Lelé. L_2 , L_3 , et L_4 sont évaluées par des schémas décentrés n'utilisant que des points intérieurs au domaine de calcul.
3. Les d_i sont obtenues par les relations 5.40
4. Les conditions aux limites visqueuses 5.49 sont implémentées directement dans les équations 5.41–5.44.
5. Ces dernières sont intégrées sur la frontière pour déterminer les valeurs des inconnues principales sur la frontière à l'instant $(n+1)$. Le schéma de discrétisation utilisé est présenté dans la section suivante.

5.4.5 Discrétisation des équations sur la frontière

Comme il a déjà été mentionné dans la section 5.4.1, on ne peut discrétiser les équations sur la frontière par le même schéma que celui utilisé à l'intérieur car l'application de la méthode des volumes finis sur la frontière pose les problèmes suivants:

- Le système d'équations doit être sous forme conservative, ce qui n'est pas le cas après la modification des termes hyperboliques.
- Les volumes d'intégration n'étant pas les mêmes pour les différentes variables, ils ne sont pas tous centrés sur la frontière.
- La discrétisation ferait intervenir des points fictifs extérieurs au domaine de calcul.

D'autre part, il faut utiliser un schéma explicite en temps sur la frontière alors qu'à l'intérieur le schéma est implicite. Les équations ont donc été discrétisées par différences finies. L'ordre de discrétisation des conditions aux limites est généralement inférieur d'une unité à celui du schéma intérieur [13] car la précision globale n'est pas affectée et aussi, parce que l'utilisation sur la frontière d'approximations du même ordre qu'à l'intérieur conduit parfois à des solutions instables. Dans le domaine intérieur, le schéma temporel est $O(\delta t)$ (schéma d'Euler) et la discrétisation spatiale utilisée est $O(\delta x^2, \delta y^2)$. On utilise donc sur la frontière un schéma d'Euler explicite $O(\delta t)$ alors que les dérivées spatiales sont approximées par des schémas centrés $O(\Delta y^2)$ dans la direction tangentielle y et par des schémas décentrés précis au 1er ordre suivant x .

Le maillage utilisé est rappelons le, un maillage décalé où les noeuds de vitesse se trouvent entre les noeuds de pression. Toutes les équations sont discrétisées sur la frontière aux noeuds de vitesse $u(jx + \frac{1}{2}, k)$ comme indiqué sur la figure 5.2. La rangée $j = jx + 1$ est une rangée de points fictifs, située à l'extérieur du domaine et utilisée pour commodité de calcul (Permet l'utilisation du même schéma de discrétisation à la frontière que dans le domaine intérieur).

On obtient les équations discrétisées suivantes dans lesquelles les conditions aux limites dites visqueuses ont été prises en compte (les termes qui ne comportent pas d'indice supérieur sont pris à l'instant n).

Equation de continuité

$$\rho_{jx+\frac{1}{2},k}^{n+1} = \rho_{jx+\frac{1}{2},k} - \Delta t \left\{ d_1(k) + \frac{(\rho_{jx+\frac{1}{2},k+1} + \rho_{jx+\frac{1}{2},k})v_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (\rho_{jx+\frac{1}{2},k-1} + \rho_{jx+\frac{1}{2},k})v_{jx+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{2 DYV(k)} \right\} \quad (5.50)$$

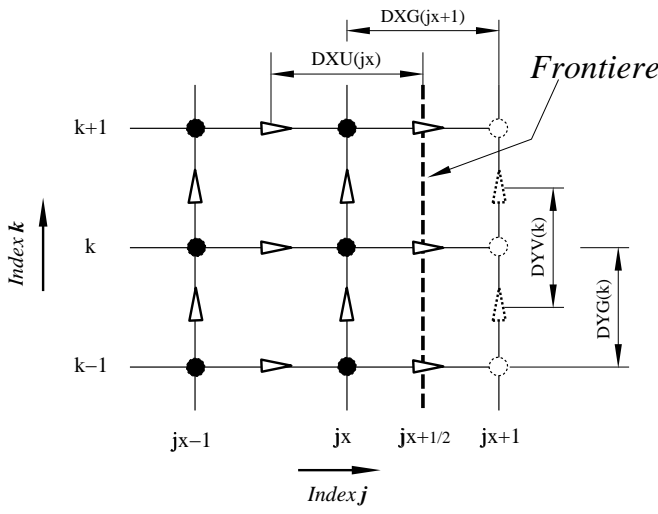


Figure 5.2: Nomenclature des noeuds pour la discrétisation sur la frontière

Equations de quantité de mouvement

$$\begin{aligned}
(\rho u)_{jx+\frac{1}{2},k}^{n+1} &= (\rho u)_{jx+\frac{1}{2},k} + \Delta t \left\{ \rho_{jx+\frac{1}{2},k} g_x - u_{jx+\frac{1}{2},k} d_1(k) - \rho_{jx+\frac{1}{2},k} d_2(k) \right. \\
&\quad + \frac{\sigma_{xx_{jx+\frac{1}{2},k}} - \sigma_{xx_{jx-\frac{1}{2},k}}}{DXU(jx)} + \frac{\sigma_{xy_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} - \sigma_{xy_{jx+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}}{DYV(k)} \\
&\quad \left. - \frac{[(\rho u)_{jx+\frac{1}{2},k} + (\rho u)_{jx+\frac{1}{2},k+1}]v_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - [(\rho u)_{jx+\frac{1}{2},k-1} + (\rho u)_{jx+\frac{1}{2},k}]v_{jx+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{2 DYV(k)} \right\}
\end{aligned} \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned}
(\rho v)_{jx+\frac{1}{2},k}^{n+1} &= (\rho v)_{jx+\frac{1}{2},k} + \Delta t \left\{ \rho_{jx+\frac{1}{2},k} g_y - v_{jx+\frac{1}{2},k} d_1(k) - \rho_{jx+\frac{1}{2},k} d_3(k) \right. \\
&\quad - \frac{(\rho_{jx+\frac{1}{2},k} + \rho_{jx+\frac{1}{2},k+1})v_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^2 - (\rho_{jx+\frac{1}{2},k-1} + \rho_{jx+\frac{1}{2},k})v_{jx+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^2}{2 DYV(k)} \\
&\quad - \frac{(P_{jx+\frac{1}{2},k} + P_{jx+\frac{1}{2},k+1}) - (P_{jx+\frac{1}{2},k-1} + P_{jx+\frac{1}{2},k})}{2 DYV(k)} \\
&\quad \left. + \frac{\sigma_{yy_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} - \sigma_{yy_{jx+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}}{DXU(jx)} \right\}
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Equation de l'énergie

$$\begin{aligned}
(\rho e)_{jx+\frac{1}{2},k}^{n+1} &= (\rho e)_{jx+\frac{1}{2},k} - \Delta t \left\{ \frac{1}{2}(u_{jx+\frac{1}{2},k}^2 + v_{jx+\frac{1}{2},k}^2)d_1(k) + \frac{d_4(k)}{\gamma-1} + (\rho u)_{jx+\frac{1}{2},k} d_2(k) \right. \\
&\quad + (\rho v)_{jx+\frac{1}{2},k} d_3(k) - (\rho u)_{jx+\frac{1}{2},k} g_x - (\rho v)_{jx+\frac{1}{2},k} g_y \\
&\quad - \frac{u_{jx+\frac{1}{2},k} \sigma_{xx_{jx+\frac{1}{2},k}} - u_{jx-\frac{1}{2},k} \sigma_{xx_{jx-\frac{1}{2},k}}}{DXU(jx)} \\
&\quad - \frac{v_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \sigma_{yy_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} - v_{jx+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \sigma_{yy_{jx+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}}{DYV(k)} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sigma_{xy_{jx+\frac{1}{2},k}} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{jx+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2 DYV(k)} \left([(\rho e + P)_{jx+\frac{1}{2},k} + (\rho e + P)_{jx+\frac{1}{2},k+1}]v_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. - [(\rho e + P)_{jx+\frac{1}{2},k-1} + (\rho e + P)_{jx+\frac{1}{2},k}]v_{jx+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad - \frac{(u_{jx+\frac{1}{2},k} + u_{jx+\frac{1}{2},k+1})\sigma_{xy_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} - (u_{jx+\frac{1}{2},k-1} + u_{jx+\frac{1}{2},k})\sigma_{xy_{jx+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}}{2 DYV(k)} \\
&\quad \left. - \frac{\kappa}{DYV(k)} \left[\frac{T_{jx+\frac{1}{2},k+1} - T_{jx+\frac{1}{2},k}}{DYG(k+1)} - \frac{T_{jx+\frac{1}{2},k} - T_{jx+\frac{1}{2},k-1}}{DYG(k)} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{5.53}$$

Dans ces équations le terme $\partial v/\partial x$ est évalué par une dérivée décentrée régressive à trois points précise à l'ordre deux et tenant compte du maillage irrégulier:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \alpha v_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - \beta v_{jx,k+\frac{1}{2}} + \gamma v_{jx-1,k+\frac{1}{2}} \quad (5.54)$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2a+b}{a(a+b)} & \beta &= \frac{a+b}{ab} & \gamma &= \frac{a}{b(a+b)} \\ a &= 0.5 DXU(jx) & b &= DXG(jx) \end{aligned} \quad (5.55)$$

Les contraintes visqueuses doivent être évaluées aux noeuds suivants:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} & & (jx + \frac{1}{2}, k) \text{ et } (jx - \frac{1}{2}, k) & & k = 1, kx \\ \sigma_{xy} \text{ et } \sigma_{yy} & & (jx + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) & & k = 0, kx \end{aligned}$$

La précision est réduite à l'ordre un lorsqu'on utilise un schéma décentré. La discrétisation adoptée pour les contraintes visqueuses est la suivante:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx_{jx+\frac{1}{2},k}} &= \frac{2}{3}\mu \left\{ 2 \frac{u_{jx+\frac{1}{2},k} - u_{jx-\frac{1}{2},k}}{DXU(jx)} - \frac{v_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - v_{jx+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{DYV(k)} \right\} \\ \sigma_{xx_{jx-\frac{1}{2},k}} &= \frac{2}{3}\mu \left\{ \frac{u_{jx+\frac{1}{2},k} - u_{jx-\frac{1}{2},k}}{DXU(jx)} + \frac{u_{jx-\frac{1}{2},k} - u_{jx-\frac{3}{2},k}}{DXU(jx-1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{v_{jx,k+\frac{1}{2}} - v_{jx,k-\frac{1}{2}}}{DYV(k)} + \frac{v_{jx-1,k+\frac{1}{2}} - v_{jx-1,k-\frac{1}{2}}}{DYV(k)} \right) \right\} \\ \sigma_{yy_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} &= \frac{2}{3}\mu \left\{ \frac{v_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}} - v_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{DYV(k+1)} + \frac{v_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - v_{jx+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{DYV(k)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{u_{jx+\frac{1}{2},k+1} - u_{jx-\frac{1}{2},k+1}}{DXU(jx)} + \frac{u_{jx+\frac{1}{2},k} - u_{jx-\frac{1}{2},k}}{DXU(jx)} \right) \right\} \\ \sigma_{xy_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} &= \mu \left\{ \frac{u_{jx+\frac{1}{2},k+1} - u_{jx+\frac{1}{2},k}}{DYG(k+1)} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (5.56)$$

Dans l'expression de σ_{xy} , le terme $\partial v/\partial x$ est évalué par la relation 5.54.

Amplitude L_i des ondes caractéristiques

Les valeurs des L_i nécessaires pour le calcul des d_i qui sont utilisées dans les relations (5.51–5.53) sont discrétisées comme indiqué dans la section 5.4.4. L_2 , L_3 et L_4 sont évaluées par schémas décentrés du type utilisé dans la relation 5.54. L_1 est évaluée directement en utilisant l'expression 5.47. On obtient ainsi:

$$\begin{aligned} L_1 &= K_{jx+\frac{1}{2},k} (P_{jx+\frac{1}{2},k} - P_\infty) \\ L_2 &= u_{jx+\frac{1}{2},k} \left[c_{jx+\frac{1}{2},k}^2 \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{jx+\frac{1}{2},k} - \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{jx+\frac{1}{2},k} \right] \\ L_3 &= \frac{1}{2} u_{jx+\frac{1}{2},k} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{jx+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{jx+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} \right] \\ L_4 &= (u_{jx+\frac{1}{2},k} + c_{jx+\frac{1}{2},k}) \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{jx+\frac{1}{2},k} + \rho_{jx+\frac{1}{2},k} c_{jx+\frac{1}{2},k} \frac{u_{jx+\frac{1}{2},k} - u_{jx-\frac{1}{2},k}}{DXU(jx)} \right] \end{aligned} \quad (5.57)$$

Les différentes dérivées suivant x étant évaluées comme dans la relation 5.54.

5.4.6 Conditions aux limites aux instants intermédiaires

Les valeurs des inconnues principales sur la frontière étant connues à l'instant $(n+1)$, il reste à déterminer comment les utiliser pour obtenir des conditions aux limites pour les variables intermédiaires de la méthode PISO. Les équations du splitting par PISO étant consistantes avec les équations discrétisées de base, il est naturel d'imposer aux différentes variables intermédiaires la condition de Dirichlet à l'instant $(n+1)$ obtenue par NSCBC. Malheureusement, comme cela va apparaître par la suite, il n'est pas possible d'imposer toutes les variables. Il faudra donc se contenter du choix de certaines d'entre elles qui vérifieront les conditions aux limites, les autres étant déterminées par l'algorithme.

La méthode PISO utilise une équation de Poisson pour la pression afin de résoudre le couplage vitesse-pression. Il est donc essentiel de connaître les particularités des conditions aux limites associées à cette équation. La section suivante est un rappel sur ces conditions aux limites, basé sur l'article de Gresho [3]. Bien que l'article traite du cas incompressible, il donne un bon aperçu de ce qu'il faudrait faire dans le cas compressible pour lequel la méthodologie est analogue.

Rappel sur les conditions aux limites pour l'équation de Poisson de la pression

Soit le problème suivant:

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial t} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla \vec{\mathbf{u}} + \nabla P = \nu \nabla^2 \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{f}} \quad (5.58)$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0 \quad (5.59)$$

avec les conditions aux limites ($t > 0$) :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{u}} &= \vec{\mathbf{w}} && \text{sur } \Gamma_D \\ -P + \nu \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial n} &= F_n && \text{sur } \Gamma_N \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$\nu \frac{\partial \vec{\mathbf{u}}}{\partial \tau} = F_\tau \quad \text{sur } \Gamma_N$$

$$\text{si } \Gamma = \Gamma_D, \quad \text{Il faut aussi que } \int_{\Gamma} \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{w}} ds = 0$$

et les conditions aux initiales :

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{u}}(\vec{\mathbf{x}}, 0) &= \vec{\mathbf{u}}_0(\vec{\mathbf{x}}) && \text{dans } \overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \\ \nabla \cdot \vec{\mathbf{u}}_0 &= 0 && \text{dans } \Omega \\ \vec{\mathbf{u}}_0 \cdot \vec{\mathbf{n}} &= \vec{\mathbf{w}}_0 \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{n}} && \text{sur } \Gamma_D \quad (\vec{\mathbf{x}} \in \Gamma, t = 0) \end{aligned} \quad (5.61)$$

où $\vec{\mathbf{x}}$ désigne le vecteur des coordonnées spatiales, t le temps, $\vec{\mathbf{n}}$ et $\vec{\tau}$ les directions normale et tangentielle respectivement, $\vec{\mathbf{u}}$ le vecteur vitesse, P la pression, ν la viscosité cinématique, $\vec{\mathbf{f}}$ le vecteur des forces extérieures, $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D$ la frontière du domaine Ω et F_n et F_τ les contraintes normale et tangentielle sur la frontière.

Le problème précédent est souvent résolu en dérivant une équation pour la pression, obtenue en prenant la divergence de l'équation de mouvement et en utilisant l'équation de continuité; Ce qui donne :

$$\nabla^2 P = \nabla \cdot (\nu \nabla^2 \vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{f}} - \vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla \vec{\mathbf{u}}) \quad (5.62)$$

Les règles suivantes déterminent quelles conditions aux limites sont appropriées lors de l'utilisation de l'équation de pression:

Règles

- Lorsqu'une condition aux limites de Dirichlet $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{w}}$ est imposée sur Γ , la condition aux limites correcte pour l'équation de Poisson de la pression est la condition de Neumann obtenue en appliquant la composante normale de l'équation de mouvement sur Γ :

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \nu \nabla^2 u_n + f_n - \vec{\mathbf{u}} \cdot \nabla u_n - \frac{\partial u_n}{\partial t} \quad (5.63)$$

C'est la seule condition qui assure $\nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$ dans $\overline{\Omega}$. (Note: u_n représente la composante normale de la vitesse $\vec{\mathbf{u}}$ et f_n la composante normale de $\vec{\mathbf{f}}$).

- Lorsque la contrainte est imposée sur la frontière, la condition aux limites pour l'équation de Poisson de la pression est la condition aux limites de Dirichlet

$$P = \nu \frac{\partial u_n}{\partial n} - F_n \quad (5.64)$$

- Si l'on résout l'équation de Poisson de pression avec des conditions aux limites de Dirichlet sur la pression et $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{w}}$ sur Γ , la condition aux limites incorrecte sur la pression entraînera une discontinuité de la composante normale u_n de la vitesse sur la frontière bien que $\nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$. Seule, la condition de Neumann correcte pour la pression permettra d'obtenir une solution régulière et continue vérifiant $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{w}} \cdot \vec{\mathbf{n}}$ sur Γ . Les conditions aux limites de Dirichlet pour la pression sont incorrectes, sauf si elles sont fixées à leur valeur correcte, celle obtenue en résolvant l'équation de Poisson avec la condition aux limites de Neumann appropriée.

- Une remarque similaire s'applique aux conditions aux limites de Neumann homogènes $\partial P/\partial n = 0$ souvent mentionnées dans la littérature. La solution de l'équation de Poisson existe (pour $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$ sur Γ et $\vec{\mathbf{f}} = 0$). On obtient une solution vérifiant $\nabla \cdot \vec{\mathbf{u}} = 0$ dans Ω mais pas sur Γ ce qui est incorrect.
- On ne peut pas vérifier la composante tangentielle de la condition aux limites $\vec{\mathbf{u}} = \vec{\mathbf{w}}$ sur Γ , ce qui est un inconvénient majeur de la méthode utilisant l'équation de Poisson de pression. Cela va être un problème majeur comme nous le verrons par la suite.
- Il n'existe pas de condition aux limites légitime pour l'équation de Poisson de la pression lorsqu'on impose une condition aux limites de Neumann sur u_n telle que $\partial u_n/\partial n = 0$.

Différentes possibilités

Les remarques précédentes montrent les restrictions qui sont associées à l'utilisation d'une équation de Poisson pour la pression. Les conséquences qui en découlent sont mentionnées et utilisées dans ce qui suit. Il n'est pas possible de déduire des équations elles-mêmes des conditions aux limites pour les instants intermédiaires car on obtient ainsi des conditions non-locales inutilisables. La méthode la plus naturelle consiste donc à imposer la condition aux limites de Dirichlet $\phi = \phi^{n+1}$ sur la frontière lorsque cela est possible (ϕ^{n+1} représente la valeur de la variable ϕ prédite par la méthode NSCBC sur la frontière). Les différentes possibilités qui s'offrent à nous pour les instants intermédiaires sont présentées dans ce qui suit et leur implémentation numérique dans la section suivante. A cet effet, on considère à titre d'exemple une frontière parallèle à l'axe des y :

1. Pas prédicteur de quantité de mouvement

- (a) On impose les conditions aux limites de Dirichlet

$$\begin{aligned}(\rho u)^* &= (\rho u)^{n+1} \\ (\rho v)^* &= (\rho v)^{n+1}\end{aligned}$$

qui sont utilisées pour résoudre respectivement les équations 3.59-3.60

2. 1er pas correcteur de quantité de mouvement

- (a) On impose $P^* = P^{n+1}$.

l'EPP (Equation de Poisson pour la Pression) 3.66 est donc résolue avec des conditions aux limites de Dirichlet. Il s'ensuit que les champs de quantité de mouvement obtenus par 3.63-3.64 ne satisfont pas la condition aux limites correspondante à l'instant $(n + 1)$. De même pour ρ^{**} puisque $T^n \neq T^{n+1}$.

- (b) On impose la densité $\rho^{**} = \rho^{n+1}$.

De l'équation d'état 3.67, on déduit la valeur de P^* à la frontière. Celle-ci est utilisée comme condition aux limites de Dirichlet pour résoudre l'EPP et déterminer la correction de pression ($P^* - P^n$). Les champs de quantité de mouvement obtenus par les relations 3.63-3.64 ne vérifient pas leurs conditions aux limites de Dirichlet à $(n + 1)$.

- (c) On impose la quantité de mouvement $(\rho u)^{**} = (\rho u)^{n+1}$.

ce qui permet d'obtenir une condition aux limites de Neumann pour la pression à l'aide de la relation 3.63. Le champ de pression P^* obtenu par l'EPP ne satisfait pas en général sa condition aux limites de Dirichlet à $(n + 1)$. Il y va de même pour $(\rho v)^{**}$.

- (d) On impose la vitesse $u^{**} = u^{n+1}$.

qui est substituée dans l'équation 3.63. La densité ρ^{**} est éliminée à l'aide de la relation 3.67 et l'on obtient ainsi une condition aux limites mixte pour la pression P^* .

$$\frac{P^*}{rT^n}(u)^{n+1} - (\rho u)^* = -\Omega_u \left(\frac{\Omega_u}{\delta t} = -A_{ou} + F_u^+ \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (P^* - P^n) \quad (5.65)$$

3. Pas prédicteur de l'énergie

(a) On impose $T^* = T^{n+1}$.

C'est la seule condition aux limites valide puisque pour le schéma PISO à deux pas, T^* représente la valeur finale de la température. On déduit de la condition aux limites choisie une condition de Dirichlet sur l'énergie:

$$\rho^{**} e^* = \rho^{**} (c_v T^{n+1} + \frac{1}{2} [(u^{**})^2 + (v^{**})^2]) \quad (5.66)$$

4. 2ème pas correcteur de quantité de mouvement

(a) On impose $P^{**} = P^{n+1}$.

Ce qui fournit une condition aux limites de Dirichlet pour résoudre l'EPP 3.76. ρ^{***} satisfait sa condition aux limites de Dirichlet mais pas les composantes de la vitesse u^{***} et v^{***} .

(b) On impose la densité $\rho^{***} = \rho^{n+1}$.

La pression P^{**} à la frontière est obtenue de la relation 3.77 (Note : On obtient en fait P^{n+1} puisque ρ et T vérifient tous les deux leur condition aux limites de Dirichlet.) et est utilisée comme condition aux limites de Dirichlet pour résoudre l'EPP et déterminer $(P^{**} - P^*)$.

(c) On impose la quantité de mouvement $(\rho u)^{***} = (\rho u)^{n+1}$

ce qui permet d'obtenir une condition aux limites de Neumann pour la pression à l'aide de la relation 3.72. Le champ de pression P^{**} obtenu par l'EPP ne satisfait pas en général sa condition aux limites de Dirichlet à $(n+1)$. Il y va de même pour $(\rho v)^{***}$.

(d) On impose la vitesse $u^{***} = u^{n+1}$.

qui est substituée dans l'équation 3.72. La densité ρ^{***} est éliminée à l'aide de la relation 3.77 et l'on obtient ainsi une condition aux limites mixte pour la pression P^{**} .

$$\frac{P^{**}}{rT^{n+1}} (u)^{n+1} - (\rho u)^{**} = -\Omega_u \left(\frac{\Omega_u}{\delta t} - A_{ou} + F_u^+ \right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x} (P^{**} - P^*) \quad (5.67)$$

Implantation numérique

A chaque étape implicite de l'algorithme PISO il faut résoudre un système à structure pentadiagonal. Ce système résulte de la discrétisation de l'équation de transport correspondante en chaque noeud intérieur au domaine de calcul. Si l'on considère la variable générale ϕ , la discrétisation de l'équation correspondante au noeud (j, k) (voir figure 5.3) donne

$$B_{j,k} \phi_{j,k-1} + D_{j,k} \phi_{j-1,k} + E_{j,k} \phi_{j,k} + F_{j,k} \phi_{j+1,k} + H_{j,k} \phi_{j,k+1} = Q_{j,k} \quad (5.68)$$

où les valeurs de ϕ aux cinq noeuds voisins sont les inconnues du problème et les coefficients B , D , E , F , H et Q dépendent du noeud considéré (j, k)

L'écriture de l'équation 5.68 à tous les noeuds intérieurs au domaine de calcul conduit à un système d'équations où le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations. Pour résoudre le problème on utilise les conditions aux limites pour éliminer les inconnues définies aux points fictifs (les points frontière). La procédure générale consiste à exprimer la valeur de l'inconnue au point fictif en fonction des valeurs aux noeuds intérieurs et cela grâce à la condition aux limites. La valeur ainsi obtenue est substituée dans l'équation à la frontière, ce qui élimine la variable au point fictif. Les différents termes sont réarrangés et on obtient un relation identique à 5.68 avec de nouveaux coefficients qu'il faut définir. Dans ce qui suit nous allons présenter quelques exemples sélectionnés pour clarifier cette application. Comme précédemment, on considère une frontière de sortie parallèle à l'axe des y située au noeud $(j_x + 1/2, k)$. La nomenclature des noeuds et indices est donnée sur la figure 5.2.

(1) 1er pas prédicteur de quantité de mouvement

à la frontière de sortie $(j = j_x + 1/2, k)$ on impose

$$(\rho u)_{j_x+1/2,k}^* = (\rho u)^{n+1} \quad (5.69)$$

$$(\rho v)_{j_x+1/2,k+1/2}^* = (\rho v)^{n+1} \quad (5.70)$$

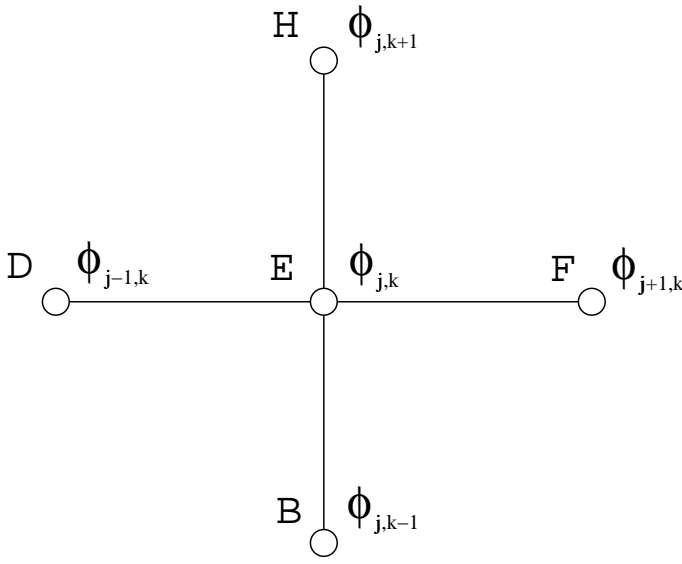


Figure 5.3: Noeuds intervenant dans l'équation discrétisée au noeud (j, k) .

où $(\rho u)^{n+1}$ et $(\rho v)^{n+1}$ sont les valeurs à l'instant $(n + 1)$ calculées par NSCBC sur la frontière. À noter que les deux composantes de la quantité de mouvement ne sont pas imposées aux mêmes noeuds. L'équation de quantité de mouvement pour la composante u au noeud adjacent à la frontière $(jx - 1/2, k)$

$$B(\rho u)_{jx-1/2, k-1}^* + D(\rho u)_{jx-3/2, k}^* + E(\rho u)_{jx-1/2, k}^* + F(\rho u)_{jx+1/2, k}^* + H(\rho u)_{jx-1/2, k+1}^* = Q \quad (5.71)$$

où les indices inférieurs ont été supprimés par convenance, est modifiée en substituant la valeur de $(\rho u)_{jx+1/2, k}^*$ donnée par 5.69. Après réarrangement des termes on obtient

$$B(\rho u)_{jx-1/2, k-1}^* + D(\rho u)_{jx-3/2, k}^* + E(\rho u)_{jx-1/2, k}^* + H(\rho u)_{jx-1/2, k+1}^* = Q - F(\rho u)^{n+1} \quad (5.72)$$

Ce qui est une équation de la forme 5.68 mais avec les coefficients modifiés :

$$\begin{aligned} Q_{mod} &= Q - F(\rho u)^{n+1} \\ F_{mod} &= 0 \end{aligned}$$

L'équation de quantité de mouvement de la composante v est modifiée de façon légèrement différente. Cette équation qui est écrite au noeud $(jx, k + 1/2)$ est donnée par

$$B(\rho v)_{jx, k-1/2}^* + D(\rho v)_{jx-1, k+1/2}^* + E(\rho v)_{jx, k+1/2}^* + F(\rho v)_{jx+1, k+1/2}^* + H(\rho v)_{jx, k+3/2}^* = Q \quad (5.73)$$

À présent, c'est la valeur de $(\rho v)^*$ au point fictif $(jx + 1, k + 1/2)$ qu'il faut éliminer. Une interpolation linéaire est utilisée pour exprimer la valeur de $(\rho v)^*$ sur la frontière $(jx + 1/2)$ en fonction des valeurs aux noeuds (jx) et $(jx + 1)$:

$$(\rho v)_{jx+1, k+1/2}^* = 2(\rho v)^{n+1} - (\rho v)_{jx, k+1/2}^* \quad (5.74)$$

Cette valeur est substituée dans l'équation 5.73 et après réarrangement des termes on obtient

$$B(\rho v)_{jx, k-1/2}^* + D(\rho v)_{jx-1, k+1/2}^* + (E - F)(\rho v)_{jx, k+1/2}^* + H(\rho v)_{jx, k+3/2}^* = Q - 2F(\rho v)^{n+1} \quad (5.75)$$

On obtient donc la forme standard 5.68 avec les coefficients modifiés

$$\begin{aligned} E_{mod} &= E - F \\ Q_{mod} &= Q - 2F(\rho v)^{n+1} \\ F_{mod} &= 0 \end{aligned}$$

(2) 1er pas correcteur de quantité de mouvement

Si on impose la condition aux limites de Dirichlet

$$(\rho u)_{jx+1/2, k}^{**} = (\rho u)^{n+1} \quad (5.76)$$

on peut obtenir une condition aux limites de Neumann pour la pression en substituant cette valeur dans la projection de l'équation de quantité de mouvement selon x (équation 3.63):

$$\frac{\partial}{\partial x}(P^* - P^n) = -\frac{1}{\Omega_u} \left(\frac{\Omega_u}{\delta t} - A_{ou} + F_u^+ \right) [(\rho u)^{n+1} - (\rho u)_{jx+1/2, k}^*] = \delta \quad (5.77)$$

Le gradient de correction de pression δ ainsi déterminé peut aussi être évalué par différences finies. La relation obtenue

$$(P^* - P^n)_{jx+1,k} = \delta \text{DXG}(jx+1) + (P^* - P^n)_{jx,k} \quad (5.78)$$

permet d'exprimer l'inconnue $(P^* - P^n)_{jx+1,k}$ au point fictif en fonction de la valeur à l'intérieur du domaine. Cette valeur substituée dans l'équation de Poisson de la correction de pression

$$\begin{aligned} B(P^* - P^n)_{jx,k-1} + D(P^* - P^n)_{jx-1,k} &+ E(P^* - P^n)_{jx,k} \\ &+ F(P^* - P^n)_{jx+1,k} + H(P^* - P^n)_{jx,k+1} = Q \end{aligned} \quad (5.79)$$

fournit une équation de la forme standard 5.68

$$\begin{aligned} B(P^* - P^n)_{jx,k-1} + D(P^* - P^n)_{jx-1,k} &+ (E + F)(P^* - P^n)_{jx,k} \\ &+ H(P^* - P^n)_{jx,k+1} = Q - F \delta \text{DXG}(jx+1) \end{aligned} \quad (5.80)$$

avec les coefficients modifiés

$$\begin{aligned} E_{mod} &= E + F \\ Q_{mod} &= Q - F \delta \text{DXG}(jx+1) \\ F_{mod} &= 0 \end{aligned}$$

Un traitement analogue s'applique aux autres étapes de l'algorithme PISO et pour les autres choix de conditions aux limites.

Choix des conditions aux limites

Les différentes possibilités qui s'offrent à nous pour le choix des variables à imposer aux instants intermédiaires ont été présentées dans la section précédente. Parmi les combinaisons possibles, nous avons retenu trois cas que nous dénotons CL1, CL2 et CL3:

- CL 1:**
 1. ρu^{n+1} et ρv^{n+1} sont imposés au pas prédicteur de quantité de mouvement.
 2. ρu^{n+1} est imposé au 1er pas correcteur de quantité de mouvement.
 3. T^{n+1} est imposé au pas prédicteur d'énergie.
 4. P^{n+1} est imposé au 2ème pas correcteur de quantité de mouvement.
- CL 2:**
 1. ρu^{n+1} et ρv^{n+1} sont imposés au pas prédicteur de quantité de mouvement.
 2. ρu^{n+1} est imposé au 1er pas correcteur de quantité de mouvement.
 3. T^{n+1} est imposé au pas prédicteur d'énergie.
 4. ρu^{n+1} est imposé au 2ème pas correcteur de quantité de mouvement.
- CL 3:**
 1. ρu^{n+1} et ρv^{n+1} sont imposés au pas prédicteur de quantité de mouvement.
 2. ρ^{n+1} est imposé au 1er pas correcteur de quantité de mouvement.
 3. T^{n+1} est imposé au pas prédicteur d'énergie.
 4. P^{n+1} est imposé au 2ème pas correcteur de quantité de mouvement.

Ces trois cas seront utilisés à la frontière de sortie lors des essais numériques sur les différentes configurations qui font l'objet de notre étude dans le chapitre 6.

Chapitre 6

TEST DES CONDITIONS AUX LIMITES CARACTERISTIQUES

6.1 Introduction

La validation du nouvel algorithme de conditions aux limites est effectuée en procédant à une série de tests élémentaires de difficulté croissante, dont le but est de mettre en évidence les erreurs éventuelles lors de la programmation ainsi que les limitations de la méthode. Quatre tests ont été choisis à cet effet et sont présentés ci-après. Il s'agit des configurations de l'écoulement uniforme, de l'onde entropique, de l'onde acoustique et du vortex. Ces trois dernières étant superposées à un écoulement uniforme.

La qualité d'un algorithme de conditions aux limites peut être évaluée par plusieurs critères basés sur la transmission et la réflexion d'ondes traversant la frontière. Ces critères, évalués à la sortie de l'onde sont les suivants :

1. Distorsion de l'onde (changement de forme).
2. Variation d'amplitude de l'onde.
3. Taux de réflexion.

Les deux premiers indiquent si la condition aux limites influence ou non la solution dans le domaine de calcul. Le troisième critère, qui est par définition le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie à celle de l'onde incidente, mesure la qualité de la transmission. Si ce rapport est faible, l'onde a été transmise correctement et il ne reste pas de perturbations dans le domaine. Si le rapport est élevé (supérieur à 1%), la sortie de l'onde est accompagnée par la génération d'une onde parasite qui remonte l'écoulement en sens inverse. C'est ce phénomène que l'on souhaite éviter lors de la simulation des instabilités de jet car, les ondes parasites générées entretiennent l'instabilité et ne sont pas représentatives de la physique du problème.

Ces critères vont être utilisés pour évaluer l'efficacité des nouvelles conditions aux limites lors des tests présentés dans ce chapitre.

6.2 Ecoulement uniforme

Le test le plus élémentaire consiste à simuler un écoulement uniforme:

$$\begin{aligned} u &= u_0 \\ v &= 0 \\ P &= P_0 \\ \rho &= \rho_0 \\ T &= T_0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Ce test est un moyen efficace pour déceler les erreurs de codage; Toute perturbation de l'écoulement au voisinage de la frontière de sortie indique un mal fonctionnement des conditions aux limites. Les

test effectués ont donné des résultats très satisfaisants. Les perturbations relatives des variables de l'écoulement de l'ordre de 10^{-11} sont attribuables aux erreurs d'arrondis et de troncature.

6.3 Onde entropique

Ce test est destiné à étudier la transmission des ondes thermiques par l'algorithme de conditions aux limites. La configuration d'une onde entropique bidimensionnelle circulaire advecté par un écoulement uniforme est retenue pour le test. Le domaine de calcul est initialisé par un écoulement uniforme

$$\begin{aligned} u &= u_0 \\ v &= 0 \\ P &= P_0 \end{aligned} \tag{6.2}$$

auquel est superposé une onde entropique dont le champ de température est défini par

$$\begin{aligned} T &= T_0 - \lambda \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2R_c}\right\} \\ \rho &= \frac{P}{rT} \end{aligned} \tag{6.3}$$

où R_c représente le rayon de l'onde et λ son amplitude. L'onde est centrée dans la zone de maillage uniforme (fig. 6.1). Les parois latérales glissantes sont modélisées par des axes de symétrie. A l'entrée, on impose un écoulement uniforme et à la sortie, la méthode NSCBC est utilisée pour prescrire des conditions aux limites non-réfléchissantes avec $\sigma = 0$. Le choix CL1 a été retenu pour les conditions aux limites aux instants intermédiaires.

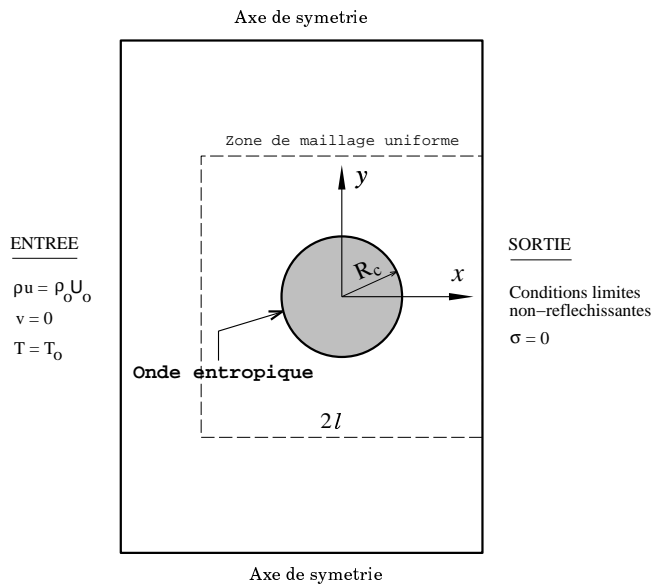


Figure 6.1: Configuration test de l'onde entropique advecté par un écoulement uniforme

6.3.1 Paramètres de l'essai:

$$\begin{aligned} Re &= U_0 l / \nu = 10,000 \\ M &= U_0 / c = 0.1 \\ R_c &= 0.15L \\ \lambda &= 14 \\ T_0 &= 273.15 \text{ K} \\ P_0 &= 10^5 \text{ Pa} \\ 2l &= 1 \text{ (Largeur et Hauteur de la zone de maillage uniforme.)} \end{aligned}$$

Fluide : Air

Maillage : 100×115 avec 96 noeuds dans la zone uniforme. La taille de maille augmente à l'extérieur en série géométrique de raison $r = 1.1$.

Schéma d'interpolation (Flux convection-diffusion) : Centré en espace.

Schéma PISO à deux pas.

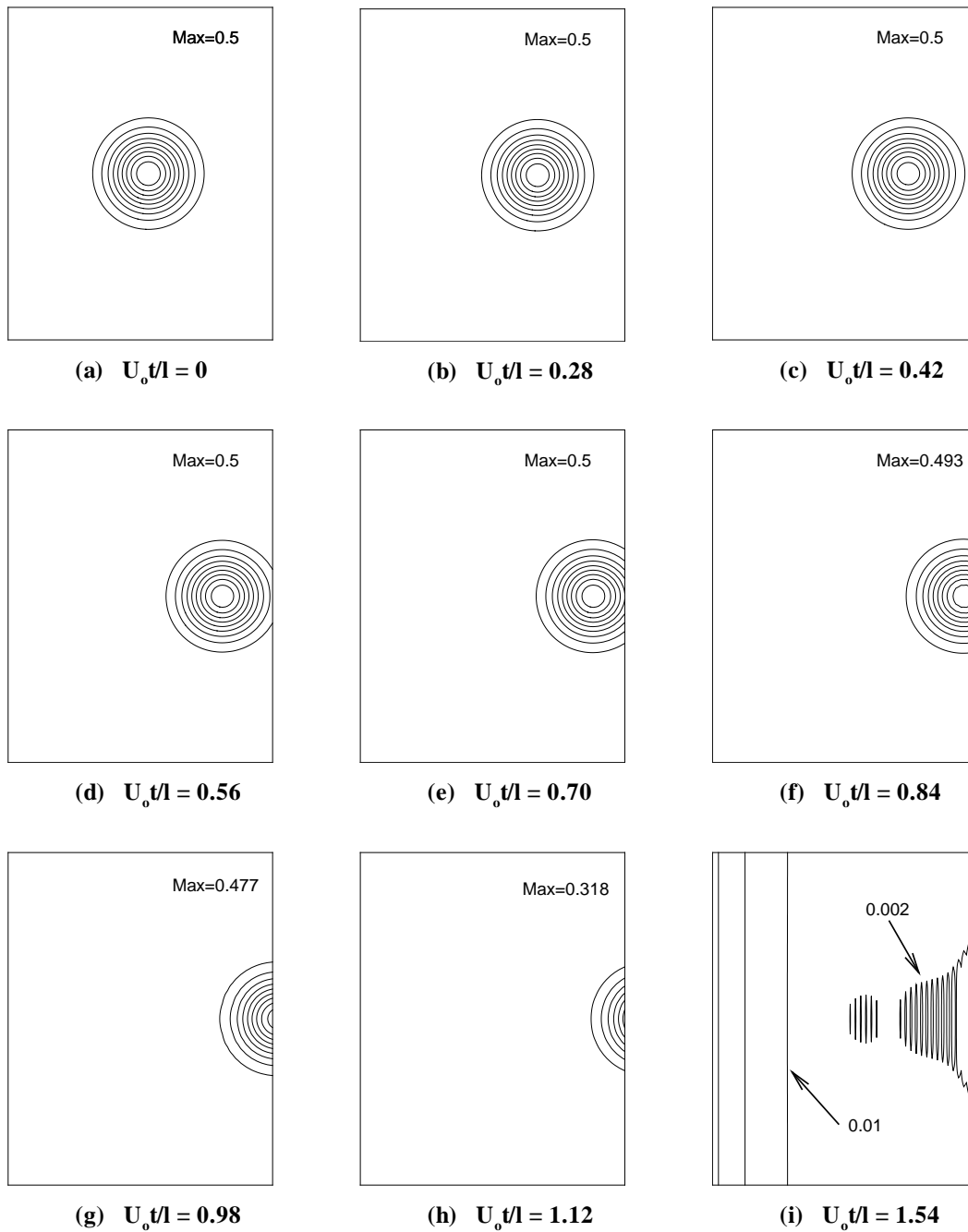


Figure 6.2: Onde entropique: Test avec les conditions aux limites CL1. Contours de température $(T-T_0)/T_0$ à différents instants

6.3.2 Résultats

Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 6.2 qui représente les isocontours de température adimensionnelle $(T - T_0)/T_0$ à différents instants $U_0 t/l$. La figure 6.2(a) met en évidence la structure annulaire du champ initial de température, alors que les figures qui suivent représentent le suivi de

l'onde pendant sa sortie du domaine à travers la frontière. Comme on peut le constater, l'onde ne se déforme pas et se transmet parfaitement. Plus tard, lorsque l'onde a quitté le domaine, il ne reste plus qu'une perturbation d'amplitude 0.01 (2% de l'amplitude initiale qui est égale à 0.5) qui est en réalité générée à la frontière d'entrée où le traitement des conditions aux limites n'utilise pas la méthode NSCBC. La valeur de l'amplitude de l'onde réfléchie à la sortie est en fait 0.002 comme indiqué sur la figure 6.2(i) et est inférieur à 0.1% de l'amplitude de l'onde incidente. Ceci indique que la condition aux limites donne d'excellents résultats.

6.4 Onde acoustique monodimensionnelle

Après avoir testé l'algorithme de conditions aux limites sur le champ thermique (entropique), on procède à un test plus difficile qui fait intervenir le champ de vitesse. Dans un premier temps, par souci de simplicité, on étudie un cas monodimensionnel. La configuration de l'onde acoustique monodimensionnelle est un candidat idéal car il constitue le cas le plus simple possible et permet d'évaluer de façon précise l'effet de la condition aux limites sur l'écoulement. En effet, la solution attendue est connue: l'onde se propage à la vitesse du son c tout en s'atténuant du fait de la dissipation visqueuse et thermique. De plus, on peut évaluer le taux de réflexion d'une composante de Fourier quelconque, puisque le choix de la forme de l'onde est arbitraire (on peut choisir une sinusoïde). Une autre raison importante pour la sélection de ce test est qu'il est possible d'évaluer analytiquement les valeurs des amplitudes des ondes caractéristiques L_i définies par les relations 5.35. Finalement, il est bien connu que les ondes acoustiques sont présentes dans la plupart des écoulements et qu'elles peuvent entretenir des instabilités. Leur simulation correcte (s'assurer qu'elles quittent le domaine de calcul sans réflexion) est donc d'une importance fondamentale. A noter que cet écoulement est irrotationnel. L'étude des ondes de rotationnel est reporté à l'essai suivant.

6.4.1 Configuration

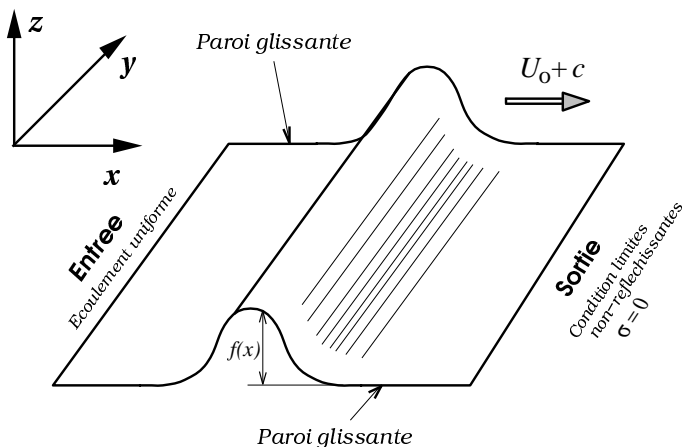


Figure 6.3: Configuration test de l'onde acoustique monodimensionnelle superposée à un écoulement uniforme

On considère un écoulement uniforme ($u = U_o$, $v = 0$, $P = P_o$, $T = T_o$) auquel est superposée une faible perturbation de vitesse $\delta u = f(x)$ sous forme d'onde acoustique monodimensionnelle. En vertu de la théorie linéarisée en fluide parfait (voir par exemple Lighthill [14]) l'écoulement est initialisé comme suit:

$$\begin{aligned}
 u &= U_o + f(x) \\
 v &= 0 \\
 P &= P_o + \rho_o c_o f(x) \\
 \rho &= \rho_o \left(\frac{P}{P_o} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad \text{isentropique} \\
 T &= \frac{P}{\rho r} \quad \text{gaz parfait}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

L'amplitude de la perturbation $\delta u = f(x)$ est faible devant la valeur moyenne U_o :

$$\frac{\delta u}{U_o} \ll 1 \quad (6.5)$$

Le domaine de calcul est de forme rectangulaire, l'onde se propageant dans la direction des x positifs. Les frontières latérales sont modélisées par des axes de symétrie et à l'entrée, on impose un écoulement uniforme ($\rho u = \rho_o u_o$, $T = T_o$, $P = P_o$). A la sortie, les conditions aux limites non-réfléchissantes (avec $\sigma = 0$) sont imposées par la méthode NSCBC.

On peut estimer l'amplitude des perturbations de pression et de température par les formules suivantes qui font intervenir le nombre de Mach de l'écoulement $M = U_o/c_o$:

$$\frac{\delta P}{P_o} \approx \gamma M \frac{\delta u}{U_o} \quad (6.6)$$

$$\frac{\delta T}{T_o} \approx (\gamma - 1) M \frac{\delta u}{U_o} \quad (6.7)$$

La dérivation de ces formules est donnée en annexe2 et repose sur l'hypothèse de faibles perturbations. Ainsi, à faible nombre de Mach ($M \leq 0.2$), la perturbation relative de pression est plus faible que celle de la vitesse (au moins 2 fois plus petite) alors que la perturbation relative de la température est d'un ordre de grandeur plus faible que celle de la pression. Ceci est important car, une légère distorsion du champ de vitesse peut donc entraîner de grosses répercussions sur le champ de température.

On peut aussi, en vertu de la solution théorique, déterminer les valeurs des amplitudes caractéristiques L_i à la sortie du domaine (annexe1):

$$\begin{aligned} L_1 &= 0 \\ L_2 &= 0 \\ L_3 &= 0 \\ L_4 &= 2(U_o + c)\rho_o c_o f'(x) \end{aligned} \quad (6.8)$$

On peut ainsi comparer les valeurs numériques obtenues aux valeurs théoriques.

6.4.2 Paramètres des essais

Les paramètres de base utilisés lors des simulations numériques de l'onde acoustique monodimensionnelle sont les suivants:

$$\begin{aligned} Re &= 1000 \text{ (Nombre de Reynolds).} \\ M &= 0.1 \text{ (Nombre de Mach).} \\ Pr &= 0.7 \text{ (Nombre de Prandtl).} \\ \lambda &= 14 \\ T_o &= 273.15 \text{ K} \\ P_o &= 10^5 \text{ Pa} \\ \rho_o &= 1.2725 \text{ kg/m}^3 \\ \mu_o &= 1.71 \times 10^{-5} \text{ Pl} \\ L &= 8.1 \times 10^{-4} \text{ m (Longueur du domaine suivant } x\text{).} \\ l &= L/10 \text{ (Largeur du domaine suivant } y\text{).} \end{aligned}$$

Fluide : Air.

Maillage : 800×6 uniforme.

Schéma d'interpolation (Flux convection-diffusion) : hybride.

Schéma PISO à deux pas.

La perturbation $f(x)$ sélectionnée est une Gaussienne centrée en $x = \frac{3}{5}L$ et d'écart type $\sigma = 5 \delta x$:

$$f(x) = \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2} \left[\frac{x-a}{\sigma} \right]^2 \quad (6.9)$$

avec

$$\begin{aligned} a &= \frac{3}{5}L \\ \sigma &= 5 \delta x \\ \|f\|_\infty &= \frac{\lambda}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \frac{U_o}{100} \end{aligned} \quad (6.10)$$

La valeur de l'amplitude de la perturbation de vitesse $f(x)$ est prise égale à 1/100 de la valeur U_o de l'écoulement moyen.

Note:

Le pas de temps δt est choisi pour assurer un nombre CFL inférieur à 1. Cela est nécessaire, vu que sur la frontière, un schéma explicite est utilisé pour intégrer les équations. La taille du maillage δx a été choisie de façon à minimiser les erreurs de dispersion et diffusion numériques. Ceci a été réalisé en réduisant systématiquement la taille des mailles jusqu'à obtenir une solution stable (convergée).

6.4.3 Résultats

Investigations préliminaires

Avant de passer aux résultats, nous mentionnons certains points importants. La taille des mailles doit être suffisamment fine pour éviter, d'une part, une trop grande diffusion numérique (l'onde s'aplatit trop vite du fait d'une importante viscosité numérique) et, d'autre part, les erreurs de dispersion qui génèrent une onde parasite en amont de l'onde acoustique à l'instant initial (voir figure 6.4-(a)).

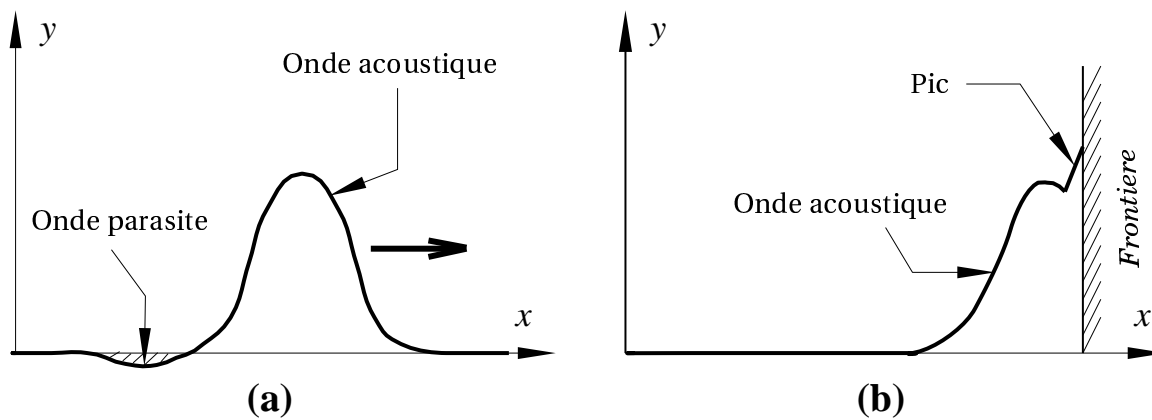


Figure 6.4: Onde acoustique monodimensionnelle. Problèmes rencontrés lors des simulations. (a) Onde parasite générée à $t=0$. (b) Pic sur le profil à la traversée de la frontière.

Cette dernière, qui est de signe opposé à celui de l'onde acoustique, est advectée par l'écoulement à la vitesse U_o . Une autre remarque importante, concerne la linéarisation du terme source Q et des coefficients (de l'opérateur G') dans l'équation de prédiction de l'énergie 3.68. Comme mentionné précédemment, il est nécessaire d'évaluer ces termes à l'instant $(\rho^{**}, \vec{V}^{**}, P^*)$ afin d'éviter la création de l'onde parasite précédente à $t = 0$.

Une autre remarque concerne le comportement à la frontière de sortie. Une anomalie peut être décelée si le profil présente un pic sur l'une des variables comme indiquée sur la figure 6.4-(b). Cela nous a permis entre autres, de corriger un bon nombre d'erreurs dans la phase initiale de développement de l'algorithme de conditions aux limites.

Cas des conditions aux limites CL1 et CL2

Les premiers essais de l'onde acoustique monodimensionnelle ont été faits avec les conditions aux limites CL1 (et CL2 qui donnent des résultats identiques). Les résultats sont présentés sous forme d'un suivi du profil longitudinal de la perturbation de pression à différents instants. La figure (a) est utilisée pour montrer l'onde acoustique se propageant vers la frontière de sortie et son comportement à la traversée de celle-ci. La figure (b) représente l'onde réfléchiée après la sortie de l'onde acoustique du domaine de calcul. Cette dernière se déplace en sens inverse, remontant l'écoulement à la vitesse $(c-U_o)$. Une fois la frontière d'entrée atteinte, cette onde va se réfléchir à nouveau et se propager vers la sortie. Ce mécanisme de *feed-back*, est l'un des principaux détracteurs de simulations numériques

d'instabilités (tels que les configurations de jet, couche limite cisailée,...). En effet, ces perturbations jouent le rôle de catalyseur, auto-entretenant les instabilités et les transformant d'instabilités convectives en instabilités absolues.

La figure 6.5 représente les résultats obtenus pour $\sigma = 0.25$ et $\sigma = 0$ (Les résultats sont identiques). Tout en se propageant vers la sortie fig 6.5-(a), l'onde diminue d'amplitude en s'élargissant (un phénomène typique de diffusion). A la traversée de la frontière, l'amplitude de l'onde augmente brusquement. Ceci n'est pas physiquement acceptable et les conditions aux limites ont donc un problème. Après la sortie de l'onde acoustique, une onde réfléchie fig 6.5-(b) est générée et on peut estimer son amplitude à 20% de l'amplitude de l'onde incidente. Cette grosse perturbation, générée à la sortie de l'onde acoustique, entache les résultats de la simulation d'erreurs grossières complètement inacceptables.

Pour une valeur $\sigma = 3.4$, on obtient les résultats de la figure 6.6. A présent, l'onde diminue brusquement d'amplitude à la sortie du domaine de calcul. De plus, l'onde réfléchie qui est de signe contraire aux résultats précédents atteint 50% de l'amplitude de l'onde incidente.

D'autres valeurs de σ donnent des résultats qui se ramènent à l'un des deux cas exposés. On conclut, d'une part, que les conditions aux limites CL1 et CL2 sont inappropriées et, d'autre part, que le paramètre σ influence considérablement le comportement de la solution à la frontière.

Cas des conditions aux limites CL3

Les résultats de la section précédente montrent que le traitement des conditions aux limites aux instants intermédiaires peut être adéquat pour certaines configurations (onde entropique) mais pas pour d'autres (onde acoustique mono-dimensionnelle). C'est pour cette raison que nous avons envisagé le troisième choix de conditions aux limites CL3. Ces dernières conditions aux limites présentent la particularité d'imposer les variables les plus sensibles P , ρ et T . Les résultats obtenus sont donnés par la figure 6.7 qui représente les perturbations relatives de Pression, température et vitesse longitudinale. Seule la phase de sortie de l'onde est représentée, la phase de réflexion étant traitée plus loin. L'onde sort de façon impeccable. Il est même possible de vérifier qu'elle n'est pas déformée en translatant le profil d'une courbe à la suivante vers la droite et en vérifiant qu'il y a parfaite superposition (au taux de diffusion près). On peut effectuer cela en imprimant le même graphe sur deux feuilles différentes et en les superposant à la lumière du soleil par exemple. Un résultat encore plus indicatif de la qualité des conditions aux limites est l'élimination quasi-totale de l'onde réfléchie qui n'est pas représentée sur la même figure, vu qu'à la même échelle, elle est trop petite pour être visible. Une plus ample discussion est donnée dans la section suivante.

Onde réfléchie. Taux de réflexion

La transmission d'une onde sans distorsion à travers la frontière est un paramètre déterminant. Non moins important est le taux de réflexion. Lorsque l'onde atteint la frontière, elle se réfléchit en une onde plus petite qui remonte l'écoulement en sens inverse. Ce phénomène purement numérique ne peut-être évité. Il faut cependant minimiser autant que possible l'amplitude de l'onde réfléchie. Le taux de réflexion quantifie cela. Il est défini par

$$\text{Taux de réflexion} = T_r = \frac{\text{Amplitude de l'onde réfléchie}}{\text{Amplitude de l'onde incidente}} \quad (6.11)$$

En pratique, un taux de réflexion de l'ordre de 0.1% est considéré adéquat pour des simulations précises.

La figure 6.8 représente une vue agrandie des ondes réfléchies après la sortie de l'onde du domaine de calcul pour le cas précédent des conditions aux limites CL3 avec $\sigma = 0$. Ces ondes se propagent dans le sens des x négatifs comme indiqué sur la figure. A noter la forme sinusoidale de l'onde réfléchie qui contraste avec la forme en cloche de l'onde incidente. On peut aussi noter une onde parasite dans le champ de température au voisinage de la frontière d'entrée. Celle-ci se propage à la

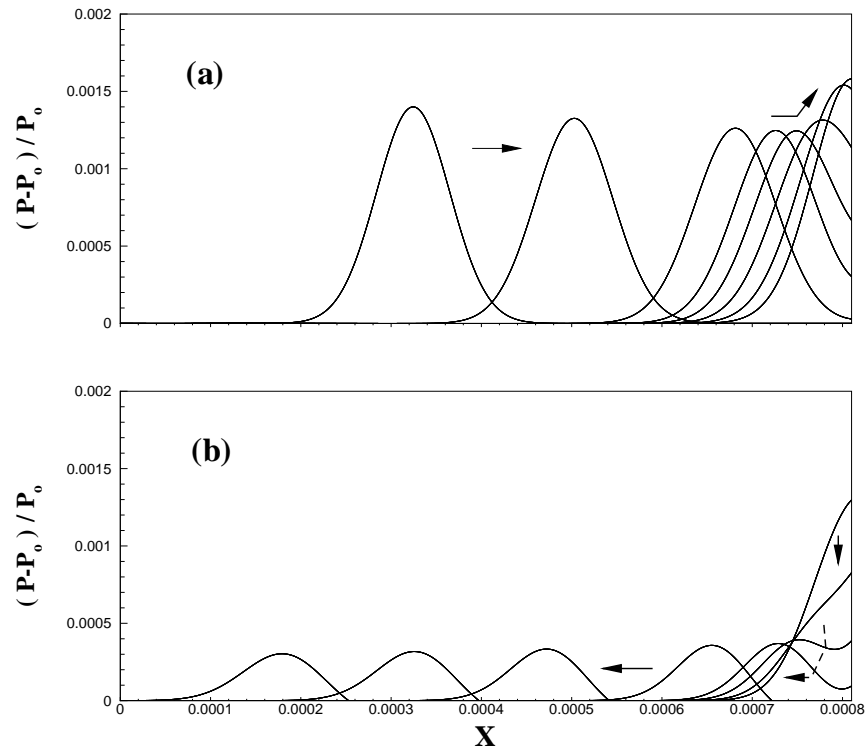


Figure 6.5: Onde acoustique monodimensionnelle. Perturbation de pression à différents instants. (a) Onde incidente (b) Onde réfléchie. Conditions aux limites CL1 avec $\sigma = 0.25$ ou $\sigma = 0$.

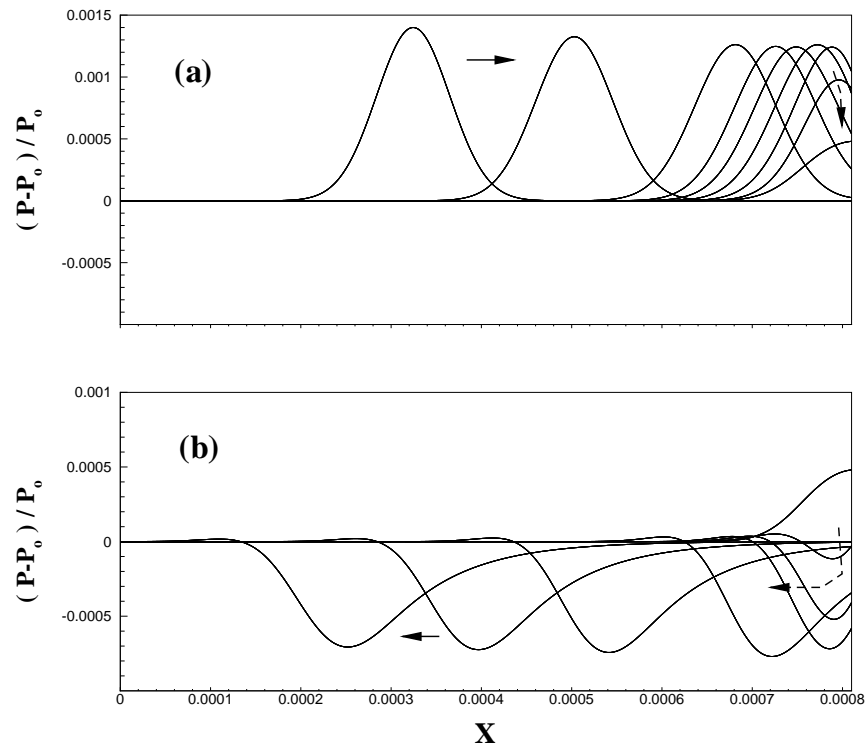


Figure 6.6: Onde acoustique monodimensionnelle. Perturbation de pression à différents instants. (a) Onde incidente (b) Onde réfléchie. Conditions aux limites CL1 avec $\sigma = 3.4$.

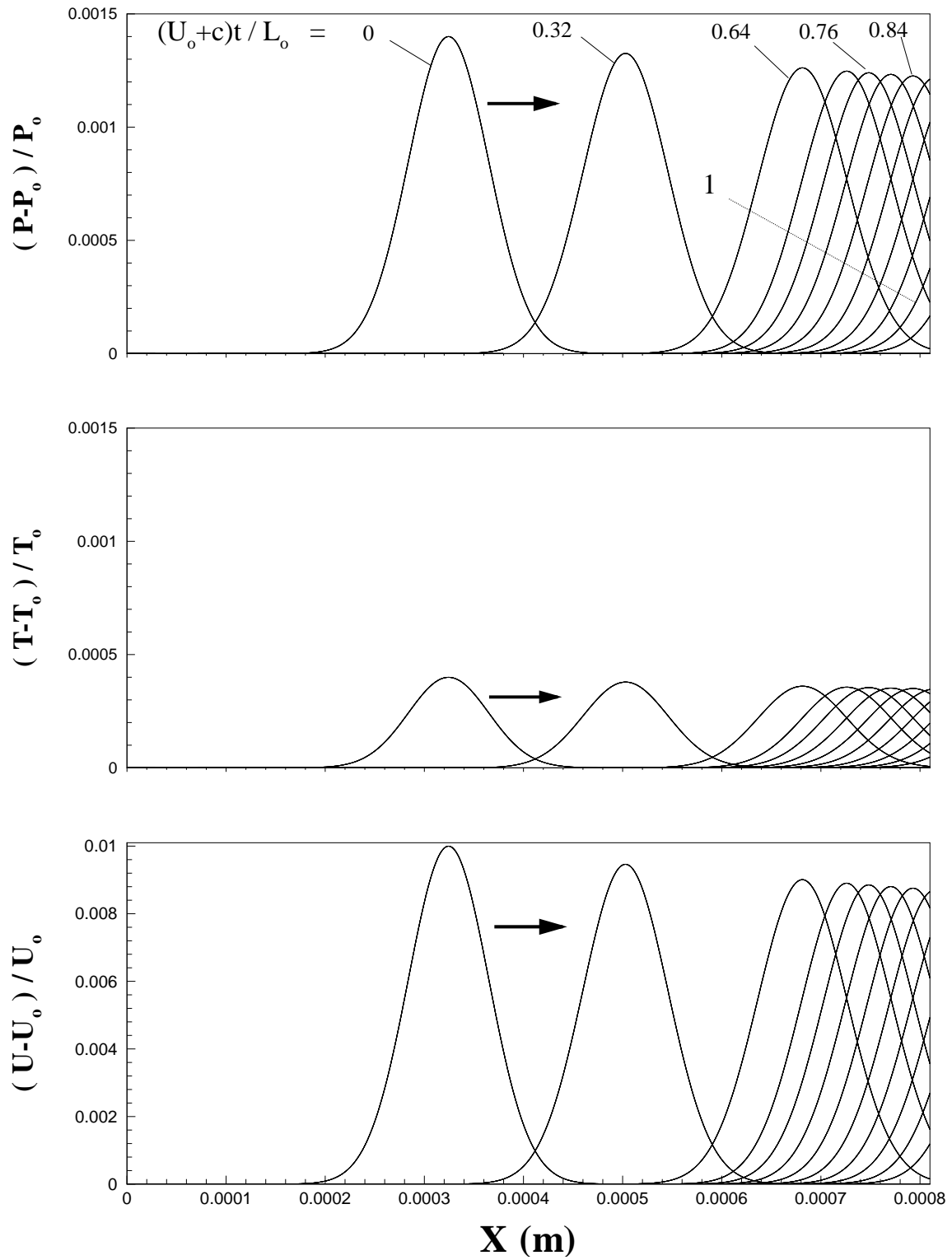


Figure 6.7: Onde acoustique monodimensionnelle. Perturbations de Pression, temperature et vitesse à différents instants. Conditions aux limites CL3 avec $\sigma = 0$.

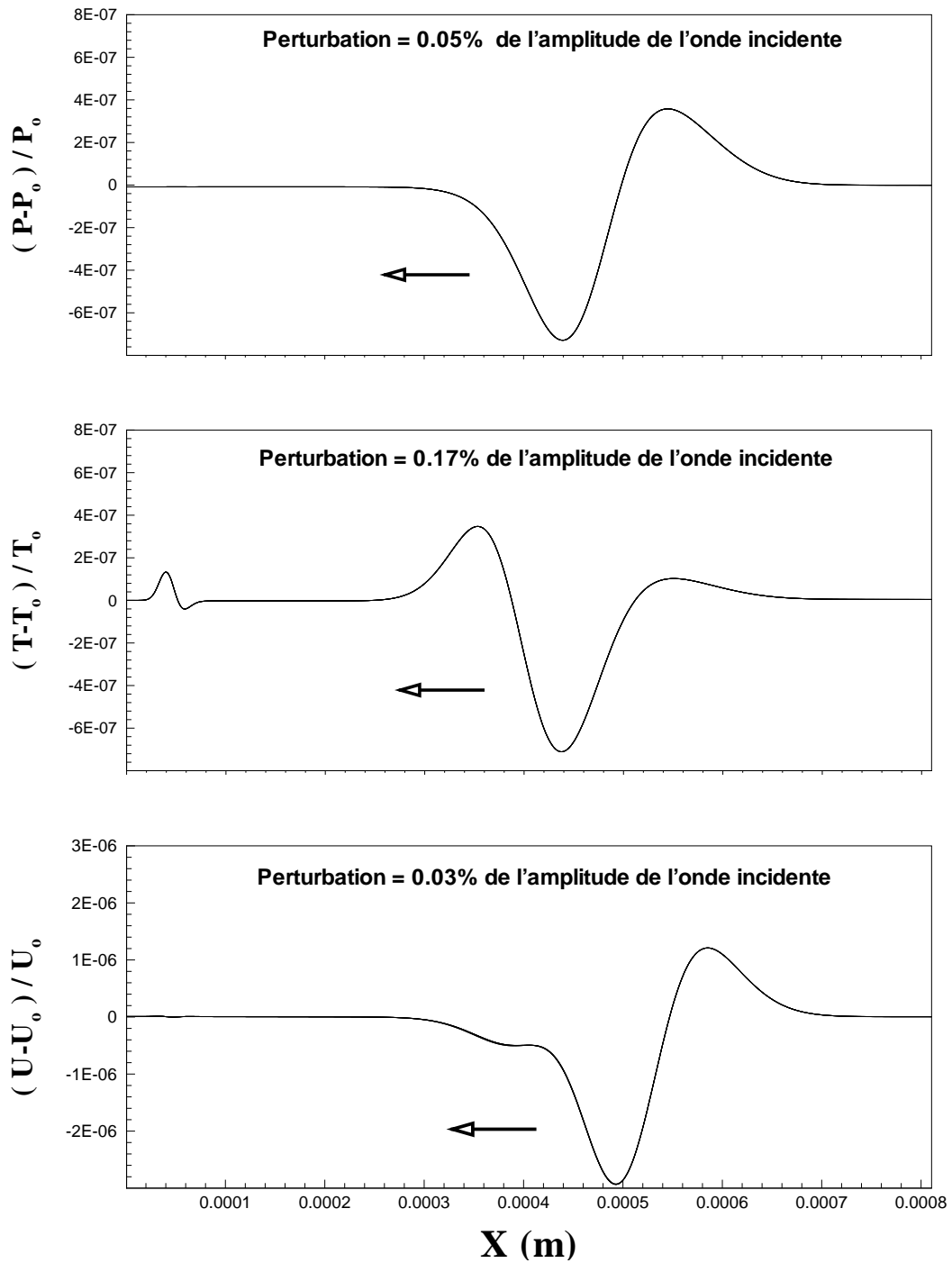


Figure 6.8: Onde acoustique monodimensionnelle. Onde réfléchi à l'instant $(U_o + c)t/L_o = 1.3$ (L_o représente la distance initiale de l'onde à la frontière de sortie) Conditions aux limites CL3 avec $\sigma = 0$.

vitesse de l'écoulement U_o et est générée par le traitement des conditions aux limites à l'entrée qui n'est pas effectué avec NSCBC mais par une méthode classique.

Les taux de réflexion obtenus lors de la simulation avec les conditions aux limites CL3 et $\sigma = 0$ sont résumés dans la table 6.1.

	<i>Amplitude perturbation incidente</i>	<i>Amplitude perturbation réfléchie</i>	<i>Taux de réflexion</i>
<i>Pression</i>	0.0014	7.5×10^{-7}	5×10^{-4}
<i>Température</i>	0.0004	7×10^{-7}	0.0017
<i>Vitesse</i>	0.01	3×10^{-6}	0.0003

Table 6.1: Taux de réflexion de l'onde acoustique monodimensionnelle (Conditions aux limites CL3).

Comme on peut le constater, le taux de réflexion est inférieur à 0.1% et cela pour toutes les variables (P , T et u). On peut donc affirmer que les conditions aux limites assurent une très bonne transmission de l'onde à travers la frontière de sortie.

6.5 Vortex advecté par un écoulement uniforme

Le nouvel algorithme de conditions aux limites a donné d'excellents résultats lors de la simulation d'ondes entropiques et acoustiques. Pour attester de leur bon fonctionnement, il reste à considérer le troisième type d'ondes présent dans les écoulements de fluides qui est l'onde de rotationnel. C'est un niveau de difficulté plus élevé car l'écoulement étant rotationnel, il ne satisfait pas par définition les hypothèses de fluide non-visqueux et mono-dimensionnel qui ont servi à l'élaboration de la méthode NSCBC (hypothèse LODI : Local One Dimensional Inviscid). De plus les interactions vitesse-température deviennent plus importantes du fait de la dissipation. Finalement, c'est le type d'écoulement le plus difficile du point de vue des conditions aux limites comme nous l'avons mentionné à plusieurs reprises. Arriver à obtenir des conditions aux limites qui traitent ce cas de façon précise est l'objectif final de ce travail.

6.5.1 Configuration

La configuration choisie est identique à celle étudiée par Poinso et Lelé [18]. Elle consiste en un écoulement uniforme (eq. 6.1) auquel est superposé un vortex défini par

$$\begin{aligned}
 \psi &= C \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2R^2}\right\} \\
 u &= u_o + \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \psi}{\partial y} \\
 v &= -\frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \psi}{\partial x} \\
 P &= P_o + \rho_o \frac{C}{R^2} \psi \\
 T &= T_o
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

où ψ est la fonction de courant d'un vortex en écoulement incompressible, R le rayon du vortex et C son intensité. L'origine des coordonnées (centre du vortex) est située au centre de la zone de maillage uniforme (voir figure 6.9). L'indice inférieur "o" correspond aux grandeurs de l'écoulement uniforme.

Le domaine de calcul est rectangulaire. Sa taille ainsi que le pas d'espace ont été choisis pour simuler l'écoulement correctement et minimiser l'effet des frontières latérales. Le maillage qui comporte 210×240 noeuds, est composé d'une partie centrale uniforme de 200 mailles avec $\delta y = \delta x$. A l'extérieur de cette region, le maillage croit selon une suite géométrique de raison $r = 1.1$ aussi bien à l'entrée que sur les frontières latérales.

Les frontières latérales sont des parois glissantes modélisées par des axes de symétrie. A l'entrée, les variables suivantes sont imposées : quantité de mouvement $\rho u = \rho_o u_o$, température $T = T_o$ et vitesse $v = 0$. A la sortie, La méthode NSCBC est utilisée. La condition aux limites non-réfléchissante

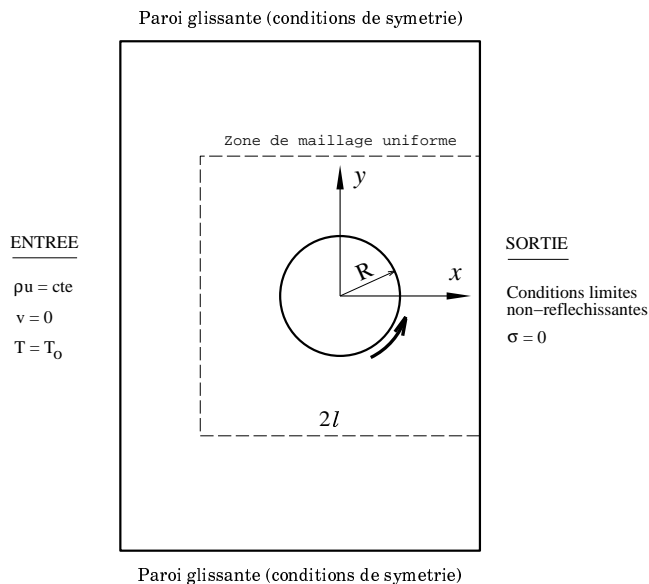


Figure 6.9: Configuration test du vortex advecté par un écoulement uniforme

de Poinso et Lelé [18] avec $\sigma = 0$ est choisie pour spécifier la condition aux limites non-visqueuse nécessaire pour une frontière de sortie subsonique.

6.5.2 Paramètres des essais

Les paramètres suivants sont utilisés pour la simulation numérique:

$$Re = 10,000 = u_o l / \nu$$

$$R = 0.25l$$

$$M = 0.1 = u_o / c$$

$$P_r = 0.7$$

$$C = -0.0163 cl$$

$$T_o = 273.15 \text{ K}$$

$$P_o = 10^5 \text{ Pa}$$

$$\mu_o = 1.71 \times 10^5 \text{ Pl}$$

Fluide : Air.

Maillage : 210×240

Schéma d'interpolation (Flux convection-diffusion) : hybride.

Schéma PISO à deux pas.

6.5.3 Résultats

Les résultats sont présentés sous forme d'isocontours de vorticité et de vitesse longitudinale à quatre instants différents (I) $ct/l = 0$ champ initial (II) $ct/l = 0.6, 0.8$ et 1 lorsque le vortex traverse la frontière de sortie.

Le champ initial 6.10-(a) montre la structure annulaire du champ de vorticité qui consiste en une zone de vorticité négative entourée d'un anneau de vorticité positive. Les valeurs de $(u - u_o)/u_o$ sont utilisées pour la vitesse longitudinale fig 6.10-(e). ainsi, les lignes de contour supérieures correspondent à des valeurs négatives ($u < u_o$), alors que les lignes de contour inférieures indiquent des valeurs positives ($u > u_o$). Le vortex tourne dans le sens trigonométrique.

Les figures 6.10-(b)(c)(d) montrent le champ de vorticité lorsque le vortex quitte le domaine de calcul. Sa structure reste intacte et il n'apparaît pas de discontinuité à la frontière. Cela est certainement un bon résultat car il est impossible d'obtenir quelque chose de semblable avec des conditions aux limites classiques. Les mêmes remarques s'appliquent au champ de vitesse fig 6.10-(f)(g)(h) qui préserve bien sa forme. Néanmoins, la sortie du vortex est accompagnée d'une légère

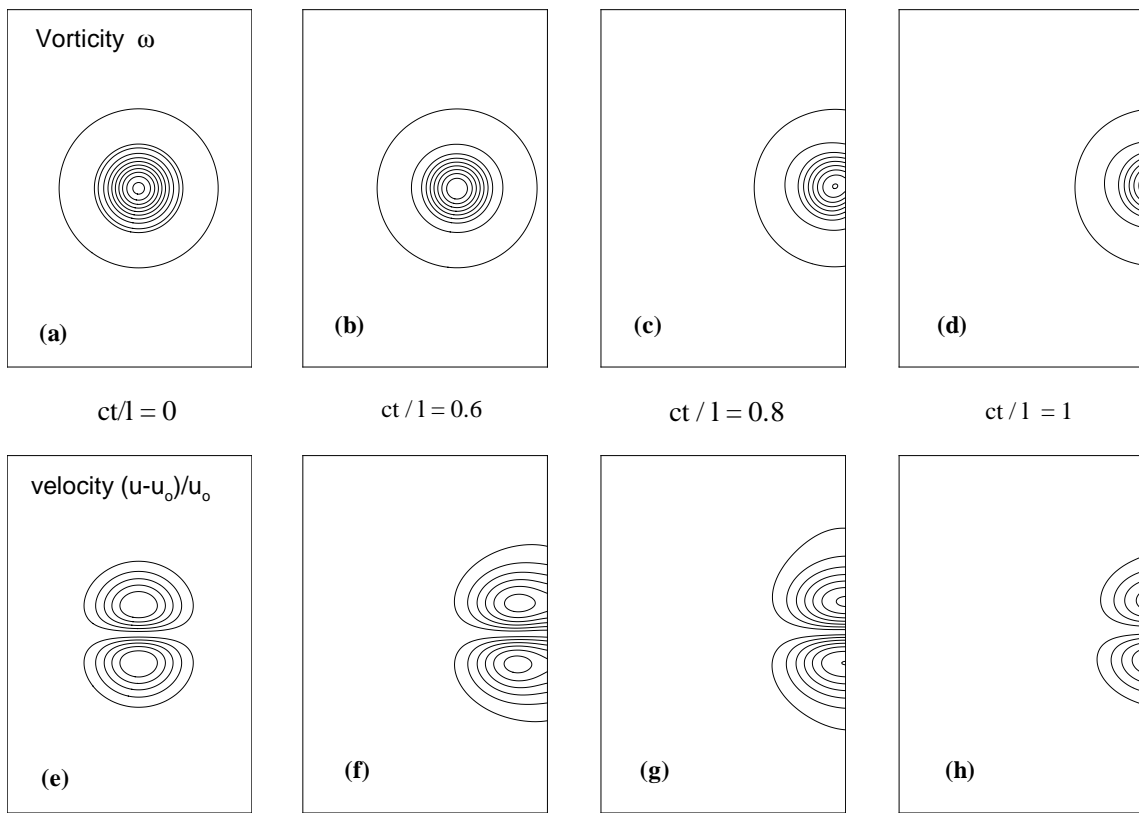


Figure 6.10: Vortex avec les conditions aux limites CL1 et $\sigma = 0$. Champs de vorticité et de vitesse à quatre instants (a-e) $ct/l = 0$ (b-f) $ct/l = 0.6$ (c-g) $ct/l = 0.8$ et (d-h) $ct/l = 1$.

augmentation de l'amplitude du champ de vitesse de 10% (non visible sur la figure). Cela montre que les conditions aux limites ont un problème avec la transmission des ondes de rotationnel.

	<i>Amplitude perturbation incidente</i>	<i>Amplitude perturbation réfléchie</i>	<i>Taux de réflexion</i>
<i>Vorticité</i>	33,372	1,197	0.036
<i>Vitesse u</i>	0.3	0.016	0.053

Table 6.2: Taux de réflexion du vortex superposé à un écoulement uniforme. Conditions aux limites CL3.

Plus tard, à $ct/l = 2$, après la sortie du vortex du domaine de calcul, il subsiste une perturbation générée par les ondes réfléchies. Cette perturbation a une amplitude égale à 5% de la vorticité initiale max et 3.6% de la vitesse initiale (voir table 6.2). Ceci montre que les conditions aux limites ont un taux de réflexion trop élevé et qu'elles ne peuvent par conséquent pas être utilisées pour la simulation des instabilités.

6.5.4 Analyse des résultats - Problèmes rencontrés

Nous essayons dans ce qui suit d'analyser plus en détails les résultats obtenus précédemment lors de la simulation du vortex et ce, afin de déterminer l'origine des nos problèmes.

La figure 6.11 représente l'évolution temporelle du profil longitudinal de vitesse u aux deux sections où $\|u\|$ atteint son maximum ($y = 0.25 l$ et $y = 0.75 l$). Les figures 6.12 et 6.13 représentent les profils longitudinaux à la section médiane $y = 0.5 l$ de v et T respectivement. Dans tous les cas, les conditions aux limites CL1 sont utilisés à la sortie.

On constate que les amplitudes des ondes incidentes augmentent ou diminuent brusquement à la sortie du domaine et ceci, pour toutes les variables. Ce problème a déjà été rencontré lors de

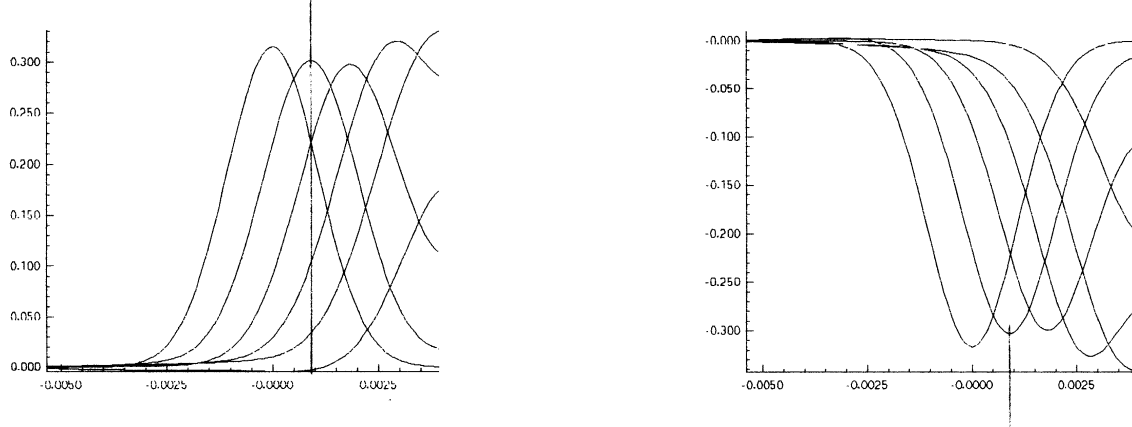


Figure 6.11: Evolution temporelle du profil de vitesse u à deux sections longitudinales $y = 0.75l$ (gauche) et $y = 0.25l$ (droite).

la simulation de l'onde acoustique monodimensionnelle avec les conditions aux limites CL1. Le changement de conditions aux limites (CL3 au lieu de CL1) avait permis d'apporter une solution au problème. On est donc tenté d'essayer les conditions aux limites CL3. Cela a été fait mais les résultats obtenus n'ont pas amélioré la solution.

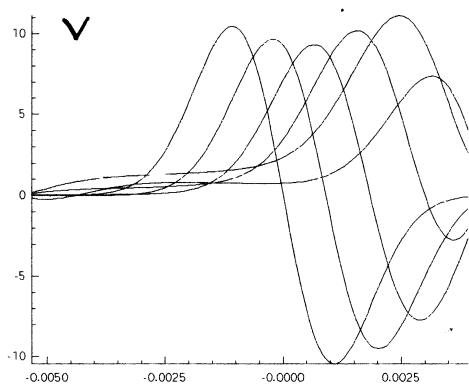


Figure 6.12: Evolution temporelle du profil de vitesse v à la section moyenne $y = 0.5l$

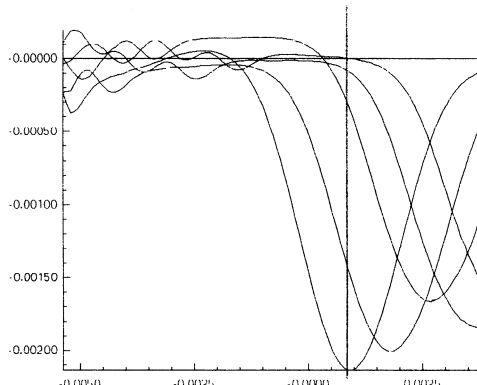


Figure 6.13: Evolution temporelle du profil de température T à la section moyenne $y = 0.5l$

Les profils de u , ρu , v et ρv à la frontière de sortie, obtenus pour les conditions aux limites CL3, sont représentés sur les figures 6.14–6.17. La figure 6.14 montre la valeur ρu^{NSCBC} prédite par l'algorithme NSCBC sur la frontière, et utilisée comme condition aux limites pour les calculs. La valeur ρu^{n+1} , déterminée par les calculs, diffère légèrement et cela est dû au fait que ρu n'est pas imposé au deuxième pas correcteur de quantité de mouvement avec les conditions aux limites CL3. Comme indiqué précédemment, on s'attend donc à ce que la valeur obtenue de ρu ne satisfasse pas sa condition aux limites de Dirichlet. Imposer ρu revient simplement à utiliser les conditions aux limites CL1 ou CL2 qui ont aussi un problème. Des remarques similaires s'appliquent à la vitesse u représentée sur la figure 6.15.

Pour ce qui est du champ de ρv , il faut mentionner une différence importante: La frontière est située au noeud $j = jx + \frac{1}{2}$ alors que l'algorithme de calcul permet la détermination de ρv aux noeuds $j = jx$. On est donc contraint de déterminer ρv sur la frontière par extrapolation (on utilise une extrapolation linéaire). Comme on peut le constater sur la figure 6.16, la valeur de ρv^{n+1} en $j = jx$ obtenue par l'algorithme de calcul coïncide avec la condition aux limites de Dirichlet ρv^{NSCBC} . Cela est dû au fait que l'on a imposé cette condition aux limites au pas prédictor de quantité de

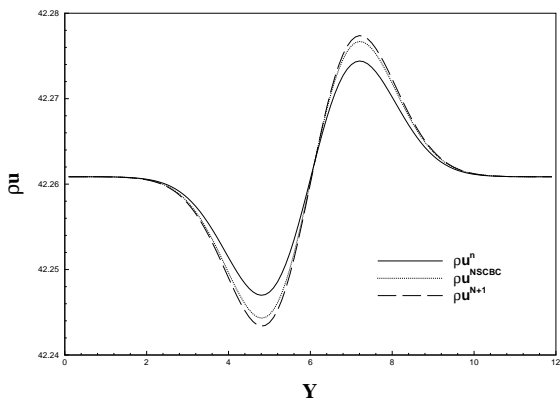


Figure 6.14: Profils de ρu à la frontière de sortie.

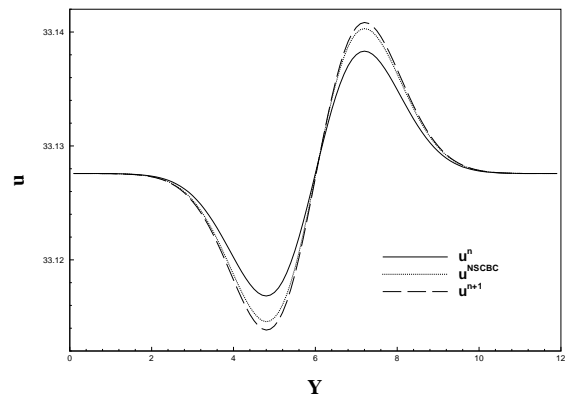


Figure 6.15: Profils de vitesse u à la frontière de sortie.

mouvement. Le champ de vitesse obtenu ρv^* satisfait donc la condition aux limites. Comme, les pas correcteurs n'affectent pas la valeur de la composante tangentielle de vitesse à la frontière, il s'ensuit que les champs finaux aussi satisfont la condition aux limites de Dirichlet ρv^{NSCBC} .

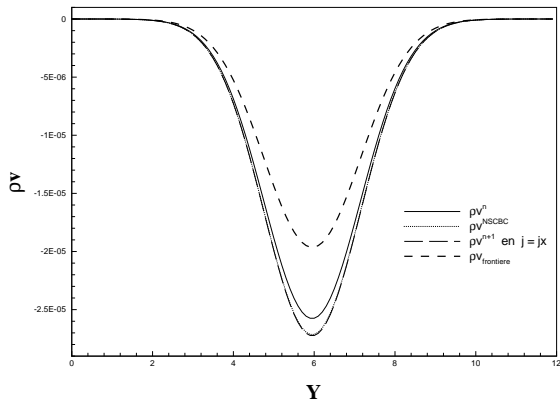


Figure 6.16: Profils de ρv à la frontière de sortie.

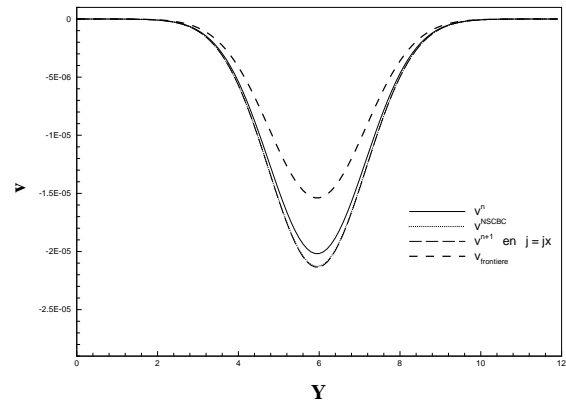


Figure 6.17: Profils de vitesse v à la frontière de sortie.

En revanche, la valeur de ρv sur la frontière obtenue par extrapolation n'est pas bonne. Il semble donc que l'extrapolation ne puisse pas donner de bons résultats. Mais que peut-on utiliser d'autre? Les mêmes remarques s'appliquent aux profils de vitesse v donnés en figure 6.17

On conclut donc qu'il semble difficile d'apporter une solution au problème vu qu'il n'est pas possible d'imposer à la fois toutes les variables durant les instants intermédiaires. D'autres variantes de conditions aux limites pourraient être testées dans ce but.

Chapitre 7

CONCLUSION

Dans le cadre de la présentation du diplôme de Magister, nous avons apporté une contribution au problème de la spécification des limites adéquates aux frontières de sortie lorsque l'écoulement y est fortement perturbé. Ce type de conditions limites permet l'utilisation de domaines plus petits (donc temps de calcul plus courts et moins de mémoire) et surtout la simulation précise de l'écoulement à l'intérieur du domaine de calcul. On espère pouvoir utiliser ces conditions aux limites pour la simulation des instabilités de jet, cependant des améliorations sont encore nécessaires avant de disposer d'un algorithme suffisamment précis.

Durant ce Magister nous avons réalisé les travaux suivants: **1)** Développement d'un code de calcul Navier-Stokes compressible instationnaire bidimensionnel en volumes-finis utilisant la méthode PISO sur maillages non-uniforme (à partir d'un code original en maillage uniforme). Cette étape a nécessité la réécriture complète du code de calcul après avoir refait toute la discrétisation. **2)** Test et validation du nouveau code. **3)** Adaptation de la méthode PISO au cas des variables conservatives. **4)** Développement d'un algorithme de conditions aux limites basé sur la méthode des caractéristiques, applicable aux codes implicites en volumes-finis et utilisant les variables conservatives. Cet algorithme est basé sur la méthode NSCBC développée par Poinot et Lelé [18]. **5)** Test des nouvelles conditions aux limites sur plusieurs configurations destinées à évaluer leurs points positifs et leurs insuffisances. Ces tests ont été choisis de façon à inclure tous les niveaux de difficulté présents dans les écoulements de fluides.

Notre algorithme s'est avéré excellent pour la simulations d'ondes entropiques et acoustiques. Il peut aussi être utilisé avec des vortex mais ses performances sont encore insuffisantes pour une bonne précision. Des améliorations sont encore nécessaires et cela pourrait faire l'objet d'études ultérieures.

Plusieurs aspects du présent travail peuvent être analysés dans le cadre de la poursuite de cette étude. Le choix de conditions aux limites aux instant intermédiaires (variables à imposer lors de la résolution des équations par l'algorithme PISO) offre plusieurs autres possibilités qui n'ont pas été analysées par manque de temps. Des schémas de discrétisation d'ordre plus élevé pourraient être employés sur la frontière ainsi qu'à l'intérieur du domaine. L'emploi d'un arrangement *collocated* pour les noeuds du maillage pourrait résoudre le problème de consistance entre les équations sur la frontière de sortie et les équations à l'intérieur du domaine. De plus cela pourrait rendre possible un traitement implicite des conditions aux limites.

ANNEXE 1

Amplitude des ondes caractéristiques Cas de l'onde acoustique monodimensionnelle

Les equations 5.35 sont combinées avec les relations 6.4 pour obtenir les valeurs théoriques des amplitudes des ondes caractéristiques L_i :

$$\begin{aligned} L_1 &= (u - c) \left[\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_o c_o \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\ &= (u - c) \left[\rho_o c_o \frac{\partial f}{\partial x} - \rho_o c_o \frac{\partial f}{\partial x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2 &= u \left[c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right] \\ &= u \left[c^2 \frac{\rho_o}{P_o^{1/\gamma}} \frac{1}{\gamma} P_o^{1/\gamma - 1} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right] \\ &= u \left[c^2 \rho_o \left(\frac{P}{P_o} \right)^{1/\gamma} \frac{1}{\gamma P} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right] \\ &= u \left[c^2 \frac{\rho}{\gamma P} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right] \\ &= u \left[\frac{c^2}{c^2} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3 &= u \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4 &= (u + c) \left[\rho_o c_o \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial x} \right] \\ &= (u + c) \left[\rho_o c_o \frac{\partial f}{\partial x} + \rho_o c_o \frac{\partial f}{\partial x} \right] \\ &= 2(u + c) \rho_o c_o \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

ANNEXE 2

Approximations des amplitudes relatives de T et P Cas de l'onde acoustique monodimensionnelle

On peut dériver des approximations pour les amplitudes relatives de pression et température en se basant sur l'hypothèse de petites perturbations $\delta u/u_o \ll 1$.

$$\begin{aligned}\frac{\delta P}{P_o} &= \frac{\rho_o c_o \delta u}{P_o} \\ &= \gamma c_o u_o \frac{\rho_o}{\gamma P_o} \frac{\delta u}{u_o} \\ &= \gamma c_o u_o \frac{1}{c_o^2} \frac{\delta u}{u_o} \\ &= \gamma \frac{u_o}{c_o} \frac{\delta u}{u_o} \\ &= \gamma M \frac{\delta u}{u_o}\end{aligned}$$

La perturbation de pression sera donc d'autant plus petite que le nombre de Mach est faible. Similairement pour la température :

$$\begin{aligned}\frac{\delta T}{T_o} &= \frac{T}{T_o} - 1 \\ &= \left(\frac{P}{P_o}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \\ &= \left(\frac{\delta P}{P_o} + 1\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \\ &\approx 1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\delta P}{P_o} - 1 \\ &= \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\delta P}{P_o} \\ &= (\gamma-1)M \frac{\delta u}{u_o}\end{aligned}$$

La formule du binôme suivante a été utilisée

$$(1+x)^p \approx 1 + px + \dots$$

Celle-ci est valide pour x de faible amplitude (petit devant 1).

Bibliographie

- [1] P. Dutt. *SIAM Journal Numerical Analysis* Vol 25 No2 (1988) p 245.
- [2] B. Engquist and A. Majda. *Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves.* *Math. of Computation* Vol 31 No139 (1977) pp 629-651.
- [3] P. M. Gresho. *Incompressible fluid dynamics: Some fundamental issues.* *Annual Review of Fluid Mechanics* Vol 23 (1991) pp 413-453
- [4] N. Hannoun *Modèle et méthode numériques.* *Rapport de Magistère* No1, 1994
- [5] N. Hannoun *Validation du nouveau code de calcul.* *Rapport de Magistère* No3, 1995
- [6] N. Hannoun *Modification de l'algorithme PISO.* *Rapport de Magistère* No4, 1996
- [7] N. Hannoun *Conditions limites caractéristiques.* *Rapport de Magistère* No5, 1997
- [8] F. H. Harlow and J. E. Welsh *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface.* *Physics of Fluids* Vol 8 (1965) pp 2182-2189.
- [9] G. W. Hedström. *Non-reflecting boundary conditions for non-linear hyperbolic systems.* *Journal of Computational Physics* vol 30 (1979) pp 222-237.
- [10] C. Hirsch. *Numerical computation of internal and external flows 2 volumes.* Wiley, New York 1988-90.
- [11] R. I. Issa. *Solution of the implicitly discretized fluid flow equations by operator splitting.* *Journal of Computational Physics* vol 62 (1985) pp 40-65.
- [12] H. O. Kreiss. *Initial boundary value problems for hyperbolic systems.* *Comm. Pure and Appl. Math.* Vol 23 (1970) pp 277-298.
- [13] S. K. Lele. *AIAA Paper* 89-0374
- [14] Sir M. J. Lighthill *Waves in Fluids.* Cambridge university press 1978.
- [15] J. Oliger. *On the initial boundary value problem for the equations of gas dynamics.* *Transactions of the 25th conference of army mathematicians, ARO Report* 80-1.
- [16] J. Oliger and A. Sunström. *Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics.* *SIAM Journal of Numerical Analysis* Vol 35 No3 (1978) p 419.
- [17] Patankar, S. V. . *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow.* Hemisphere Publishing Corporation, New York 1980.
- [18] T. J. Poinso and S. K. Lele. *Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows.* *Journal of Computational Physics* Vol 101 (1992) pp 104-129.
- [19] D. H. Rudy and J. C. Strikwerda *Journal of Computational Physics* Vol 36 (1980) p 55.
- [20] C. Schen and J. M. Floryan. *Low Reynolds number flows over cavities.* *Physics of Fluids* Vol 28 No11 (1985) pp 3191-3202.

- [21] G. E. Schneider and M. Zedan. *A modified strongly implicit procedure for the numerical solution of field problems*. Numerical Heat Transfer Vol 4 (1981) pp 1-19.
- [22] J. C. Strikwerda. *Commun. Pure Appl. Math.* Vol 30 (1977) p 797.
- [23] M. T. Sun, S. T. Wu and M. Dryer. *On the time dependant boundary conditions of magnetohydrodynamics flows*. Journal of Computational Physics Vol 116 (1995) pp 330-342.
- [24] K. W. Thompson. *Time dependant boundary conditions for hyperbolic systems*. Journal of Computational Physics Vol 68 (1987) pp 1-24.
- [25] K. W. Thompson. *Time dependant boundary conditions for hyperbolic systems, II*. Journal of Computational Physics Vol 89 (1990) pp 439-461.
- [26] Y. Q. Hu and S. T. Wu. *A Full-Implicit-Eulerian (FICE) scheme for multi-dimensional transient magnetohydrodynamics MHD flows*. Journal of Computational Physics Vol 55 No1 (1984) pp 33-64.