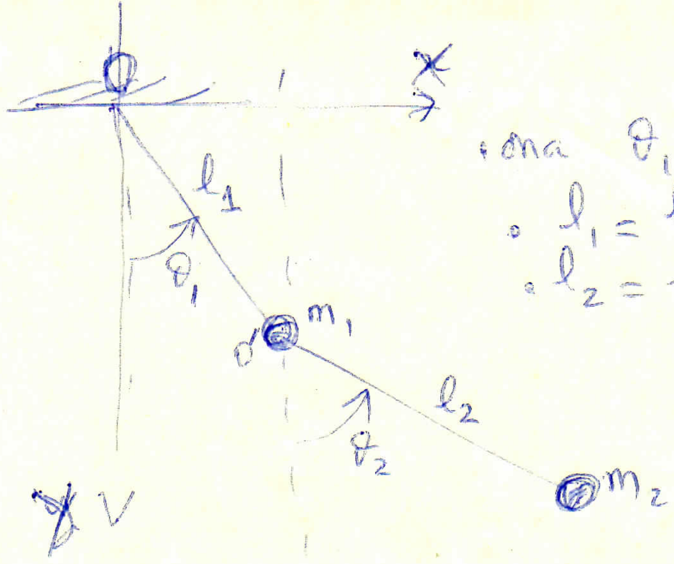
Exo:




- on a $\theta_1$ et $\theta_2$ petits
- $l_1 = l$ ; $m_1 = 2m$
- $l_2 = l$ ; $m_2 = m$

a) eqts différentielles du mvt en $\theta_1$ et $\theta_2$ ?

Système libre :
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$$

$L = T - U$

$T = T_{m_1} + T_{m_2}$ et $U = U_{m_1} + U_{m_2}$

- masse $m_1$ fait un mvt de rotation % à O (repère fixe)
- — $m_2$ — — — quelconque % à O.

Donc $T_{m_1} = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2)\dot\theta_1^2$ et $T_{m_2} = \frac{m_2}{2}\left(\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right)^2$

où $\vec{r}_2$ = vecteur position de $m_2$ % à O.

$$\vec{r}_2 = \vec{Om_1} + \vec{O'm_2} = \begin{cases} l_1 \sin\theta_1 + l_2 \sin\theta_2 \\ l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2 \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{r}_2}{dt} = \begin{cases} l_1\dot\theta_1\cos\theta_1 + l_2\dot\theta_2\cos\theta_2 \\ -l_1\dot\theta_1\sin\theta_1 - l_2\dot\theta_2\sin\theta_2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right)^2 = (l_1\dot\theta_1\cos\theta_1 + l_2\dot\theta_2\cos\theta_2)^2 + (l_1\dot\theta_1\sin\theta_1 + l_2\dot\theta_2\sin\theta_2)^2$$
$$= l_1^2\dot\theta_1^2 + l_2^2\dot\theta_2^2 + 2l_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\cos\theta_1\cos\theta_2 + 2l_1l_2\dot\theta_1\dot\theta_2\sin\theta_1\sin\theta_2$$

Comme $\theta_1$ et $\theta_2$ petits
$\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$
$\sin\theta \simeq \theta$.
et bien sur L = quadratique
Donc puissance doit $\lesssim 2$

$$\left(\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right)^2 = \underbrace{l_1^2\dot{\theta}_1^2}_{} + \underbrace{l_2^2\dot{\theta}_2^2}_{} + 2 l_1 l_2 \underbrace{\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_1\cos\theta_2}_{} + 2 l_1 l_2 \underbrace{\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_1\sin\theta_2}_{}$$

quadratique
$d° = 2$ ($\dot{\theta}_1^2$ ou $\dot{\theta}_2^2$)

? quadratique.

(*) $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos\theta_1\cos\theta_2 \simeq \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\left(1-\frac{\theta_1^2}{2}\right)\left(1-\frac{\theta_2^2}{2}\right)$

$$\simeq \underbrace{\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2}_{} - \underbrace{\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\frac{\theta_1^2}{2}}_{} - \underbrace{\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\frac{\theta_2^2}{2}}_{} + \underbrace{\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\frac{\theta_1^2\theta_2^2}{2}}_{}$$

$\dot{\theta}_1^1 \cdot \dot{\theta}_2^1$ puissance $= 2 = 1+1$

quadratique

Non quadratique ($d° = 4$)

Non quadratique ($d° = 6$)

$$\simeq \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \quad (\text{les autres termes} = 0)$$

(**) $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin\theta_1\sin\theta_2 \simeq \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\theta_1\theta_2 \rightarrow$ (Non quadratique $d° = 4$)

$\simeq 0$

D'où

$$\left(\frac{d\vec{r}_2}{dt}\right)^2 \simeq l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$$

$$= \left(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right)^2$$

Donc $$\boxed{T = \frac{1}{2} m_1 l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2\left(l_1\dot{\theta}_1 + l_2\dot{\theta}_2\right)^2}$$

• Calcul de $U = U_{m_1} + U_{m_2}$ = Énergie potentielle de gravitation

• Pour savoir si $U_{gr}$ est quadratique il suffit de voir la composante des masses selon la verticale...

$m_1 \begin{cases} x \\ y : l_1 \cos\theta_1 \end{cases}$ ; $m_2 \begin{cases} x \\ y : l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 \end{cases}$

comme $\cos\theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$ Donc quadratique

Alors on peut calculer $U_{m_1}$ et $U_{m_2}$

et $\vec{F} = -\vec{\nabla} U \Leftrightarrow \cancel{U_m} = -\frac{\partial U}{\partial y}$

$\Leftrightarrow +mg = -\frac{\partial U}{\partial y} \Rightarrow U_{m_1} = \int_{l_1}^{l_1\cos\theta_1} -mg\,dy$ ; $U_{m_2} = \int_{l_1+l_2}^{l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2} -m_2 g\,dy$

• $U_{m_1} = m_1 g l_1 (1 - \cos\theta_1) + cte$

• $U_{m_2} = m_2 g \left[ l_1(1-\cos\theta_1) + l_2(1-\cos\theta_2) \right] + cte$

D'où $\boxed{U_m = m_1 g l_1 \frac{\theta_1^2}{2} + m_2 g l_2 \left( \frac{\theta_1^2}{2} + \frac{\theta_2^2}{2} \right) + cte}$

$L = T - U$

et $\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\theta_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}$

Syst de mvt :

$$\begin{cases} m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 + m_1 g l_1 \theta_1 + m_2 g l_2 \theta_1 = 0 \\ m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \end{cases}$$

On remplace $m_1 = 2m$ ; $m_2 = m$ ; $l_1 = l_2 = l$

$$\text{I} \begin{cases} ① \; 3ml^2 \ddot{\theta}_1 + 3mgl\theta_1 + ml^2 \ddot{\theta}_2 = 0 \\ ② \; ml^2 \ddot{\theta}_2 + mgl\theta_2 + ml^2 \ddot{\theta}_1 = 0 \end{cases}$$

b/ on pose $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, Trouver les pulsations propres, $\omega_1 = \omega'$, $\omega_2 = \omega''$

On prend les sols harmoniques c.a.d $\theta = A e^{j\omega t}$ et $\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$,

$$\text{I} \Rightarrow \text{II} \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2)\theta_1 - \frac{\omega^2}{3}\theta_2 = 0 \\ -\omega^2 \theta_1 + (\omega_0^2 - \omega^2)\theta_2 = 0 \end{cases}$$

obtenue en divisant I ① par $3ml^2$, ② — $ml^2$, ensuite on remplace $\ddot{\theta}_1 = -\omega^2 \theta_1$, $\ddot{\theta}_2 = -\omega^2 \theta_2$

cette eqt admet des sols $\neq 0$ ssi le det $= 0$

$$\det = \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{\omega^2}{3} \\ -\omega^2 & (\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix}$$

$$= (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \left(\frac{\omega^2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\frac{\omega^4}{3} = \left(\frac{\omega^2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$= \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega^2}{\sqrt{3}}\right)\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega^2}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

D'où
$$\begin{cases} \omega_0^2 - \omega^2 - \dfrac{\omega^2}{\sqrt{3}} = 0 \\ \omega_0 - \omega^2 + \dfrac{\omega^2}{\sqrt{3}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \omega_0^2 \left( \dfrac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} \right) \\ \omega_2^2 = \omega_0^2 \cdot \left( \dfrac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} \right) \end{cases}$$

⚠ $\omega_1 \geq 0 \; ; \; \omega_2 \geq 0$

c/ Calculs des modes propres (Rapport d'amplitude)

on reprend l'expr (II) $\theta_1 = A e^{j\omega t}$

$\theta_2 = B e^{j\omega t}$

$$\begin{cases} ① \; (\omega_0^2 - \omega^2) A - \dfrac{\omega^2}{3} B = 0 \\ ② \; -\omega^2 A + (\omega_0^2 - \omega^2) B = 0 \end{cases}$$

$$② \Rightarrow \boxed{\frac{B}{A} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2}}$$

Bien sûr ceci est vraie uniquement si A et B $\neq 0$ càd $\omega = \omega_1$ ou $\omega = \omega_2$

1e mode $\omega = \omega_1$

$$\left(\frac{B}{A}\right)^{(1)} = \frac{\omega_0^2 \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} \right)}{\omega_0^2 - \dfrac{\omega_0^2}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}} \Rightarrow \left(\frac{B}{A}\right)^{(1)} = \sqrt{3}$$

2e mode : $\omega = \omega_2$ [m̂ calcul

$$\left(\frac{B}{A}\right)^{(2)} = -\sqrt{3}$$

En prenant les solutions en notation réelle

$$\begin{cases} \theta_1 = A^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} A^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{1}{\sqrt{3}} A^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

$$\left( \left(\frac{A}{B}\right)^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \; ; \; \left(\frac{A}{B}\right)^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$