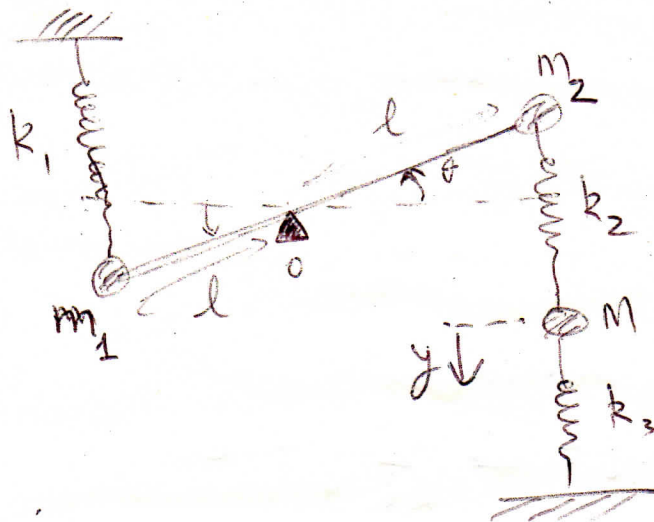


exo



* la tige a une masse negligeable

$$k_1 = k_2 = k_3 = k$$

$$m_1 = m_2 = m$$

$$M = 2m$$

1/2. Syst. libris

• coord. generalisees θ et y .

• et deurt pour faibles oscillations :

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \text{ avec } L = T - U$$

$$T = T_{m_1} + T_{m_2} + T_M = \frac{1}{2} m_1 l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2$$

$$T = \frac{1}{2} (2m l^2) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} (2m) \dot{y}^2$$

$$\begin{aligned} U &= U_{k_1} + U_{k_2} + U_{k_3} \\ &= \frac{1}{2} k_1 (l\theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y - l\theta)^2 + \frac{1}{2} k_3 y^2 \\ &= \frac{1}{2} k [(l\theta)^2 + y^2 + (y - l\theta)^2] \end{aligned}$$

$$U = \frac{1}{2} k [2(l\theta)^2 + 2y^2 + 2y \cdot (l\theta)]$$

U_{m_1} , U_{m_2} et U_M ne sont pas quadratiques, donc disparaissent de la condition d'equilibre

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2m l^2 \ddot{\theta} + 2k l^2 \theta - k l y = 0 \\ 2m \ddot{y} + 2k y - k l \theta = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \ddot{\theta} + \frac{k}{m} \theta - \frac{k}{2m l} y = 0 \\ \ddot{y} + \frac{k}{m} y - \frac{k l}{2m} \theta = 0 \end{array} \right.$$

(I) $\Rightarrow$

2° Pulsations propres - f rapport d'amplitudes...

* On prend des solutions harmoniques: $\theta = A e^{j\omega t}$ & $y = B e^{j\omega t}$
(en notation CR)

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta, \quad \ddot{y} = -\omega^2 y \quad ; \quad \text{je pose } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Les eqs précédentes deviennent:

$$\begin{cases} -\omega^2 \theta + \omega_0^2 \theta + \frac{\omega_0^2}{2l} y = 0 \\ -\omega^2 y + \omega_0^2 y + \frac{\omega_0^2 l}{2} \theta = 0 \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) \theta + \frac{\omega_0^2}{2l} y = 0 \\ -\frac{\omega_0^2 l}{2} \theta + (\omega_0^2 - \omega^2) y = 0 \end{cases}$$

Solutions $\neq 0 \Rightarrow \det = 0$

$$\det = \begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & -\frac{\omega_0^2}{2l} \\ \frac{\omega_0^2 l}{2} & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \left(\frac{\omega_0^2}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left[a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \right] \quad \text{Donc on aura:} \quad \det = \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2}{2} \right) \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{2} \\ \omega_2^2 = \frac{3}{2} \omega_0^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \\ \omega_2 = \omega_0 \sqrt{\frac{3}{2}} \end{cases} \quad \text{pulsations propres.}$$

Donc les solutions vont être une combinaison entre les 2 modes propres:

Sachant que les sols $\theta = A e^{i\omega t}$; $y = B e^{i\omega t}$.

Donc l'éq (II) s'écrit :

$$① \left[(\omega_0^2 - \omega^2) A - \frac{\omega_0^2}{2l} B \right] e^{i\omega t} = 0$$

comme $e^{i\omega t} \neq 0$
Donc le système se réduit à A et B

$$② \left[-\frac{\omega_0^2 l}{2} A + (\omega_0^2 - \omega^2) B \right] e^{i\omega t} = 0$$

On sait aussi que A et B sont $\neq 0$

ssi le $\det = 0$ i.e $\omega = \omega_1$ ou $\omega = \omega_2$

1^o Mode propre : $\omega = \omega_1$:

on prend ② $\Leftrightarrow -\frac{\omega_0^2 l}{2} A + (\omega_0^2 - \omega^2) B = 0$

$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{-\frac{\omega_0^2 l}{2}} \text{ avec } \omega^2 = \omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{2}$$

pour le 1^{er} mode.

Donc $\left(\frac{A}{B} \right)^{(1)} = \frac{A^{(1)}}{B^{(1)}} = +\frac{1}{l}$

2^o Mode : $\omega = \omega_2$

même calcul.

et on obtient $\left(\frac{A}{B} \right)^{(2)} = \frac{A^{(2)}}{B^{(2)}} = -\frac{1}{l}$.

3^o Solution générale $\theta(t)$ et $y(t)$.

$$\begin{cases} \theta(t) = A^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ y(t) = B^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B^{(2)} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

avec $B^{(1)} = +l \cdot A^{(1)}$; $B^{(2)} = -l \cdot A^{(2)}$; $\varphi_1 ; \varphi_2$: 4 inconnues au total.