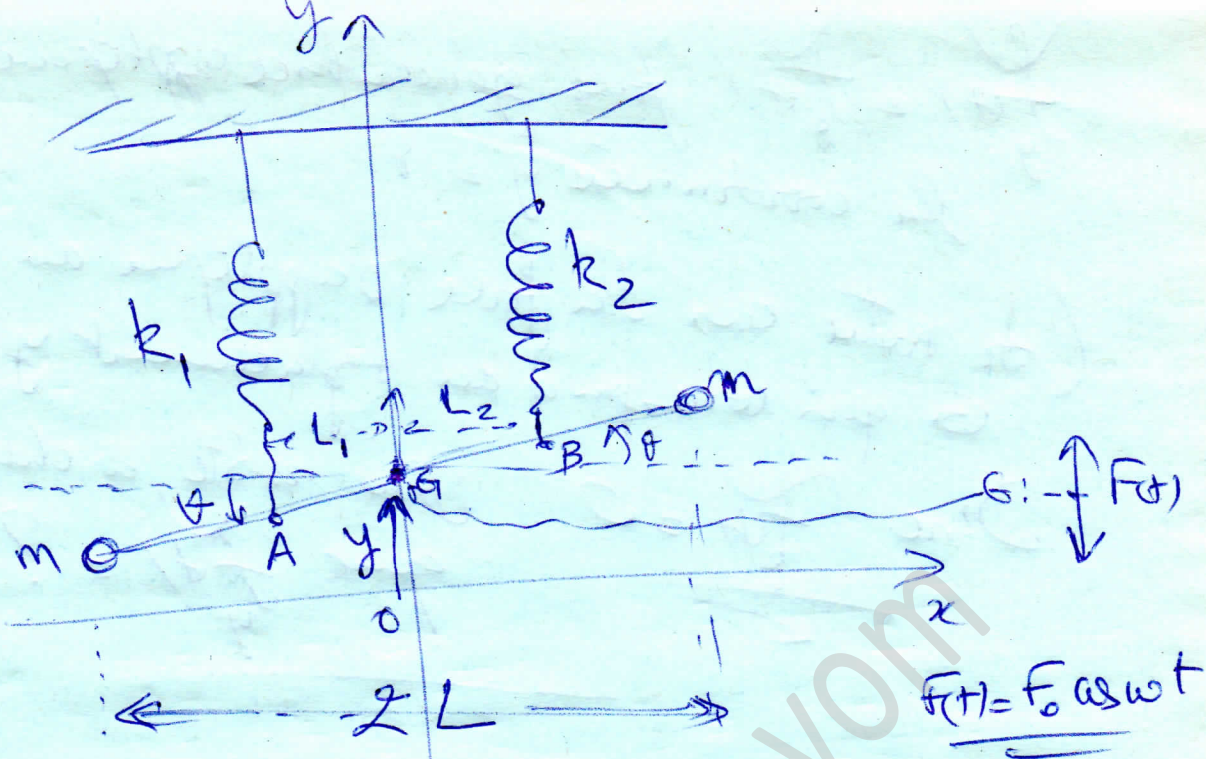


exo.

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= l_1 \\ L_2 &= l_2 \\ 2L &= 2l \end{aligned} \right\}$$



• mvt de faible amplitude.

• syst en équilibre (pour $y=0$ et $\theta=0$)

1°/ vecteurs de A et B à moy.

$$\vec{OA} = \vec{OG} + \vec{GA} = \begin{cases} -l_1 \cos \theta \\ y - l_1 \sin \theta \end{cases}; \quad \vec{OB} = \vec{OG} + \vec{GB} = \begin{cases} l_2 \cos \theta \\ y + l_2 \sin \theta \end{cases}$$

m_g = masse gauche

m_d = " droite

$$\vec{OM}_g = \begin{cases} -l \cos \theta \\ y - l \sin \theta \end{cases}; \quad \vec{OM}_d = \begin{cases} l \cos \theta \\ y + l \sin \theta \end{cases}$$

2°/ faibles mvt (θ et y petits) $\Rightarrow \begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{cases}$

eqs différentielles de mvt:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} + \frac{F(t)}{2} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{F(t)}{\theta} \end{cases}$$

$$L = T - U$$

$D = \int_{\text{toute le système}} \frac{1}{2} \rho \dot{u}^2 dx$ de dissipation (à noter cas $D=0$ si pas d'amortissement)

$\vec{F}_y(t) = \vec{F}_\theta(t)$ force généralisée appliquée sur la coordonnée $y = \theta$:

(dans notre cas la force s'applique au point G qui correspond au déplacement y .)

Donc $\vec{F}_\theta(t) = 0$ il ne reste à chercher que $\vec{f}_y(t) = ?$

* $T = \frac{1}{2} m_d T_{m_g} + T_{m_d}$ g: gauche
d: droite

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}_g}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}_d}{dt} \right)^2$$

* $\frac{d\vec{r}_g}{dt} = \begin{cases} l \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} - l \dot{\theta} \cos \theta \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{r}_g}{dt} \right)^2 = l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 - 2l\dot{y}\dot{\theta} \cos \theta$

dans ce cas on approxime $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$

$$\rightarrow -2l\dot{y}\dot{\theta} \left(1 - \frac{\theta^2}{2} \right) \approx -2l\dot{y}\dot{\theta} + l\dot{y}\dot{\theta}\theta^2$$

ce terme n'est pas quadratique.
 $\dot{y}^1 \dot{\theta}^1 \theta^2 \Rightarrow 1+1+2=4$
 $\Rightarrow$ puissance 4 > 2

D'où $\left(\frac{d\vec{r}_g}{dt} \right)^2 \approx l^2 \dot{\theta}^2 + \dot{y}^2 - 2l\dot{y}\dot{\theta}$

$$= (l\dot{\theta} - \dot{y})^2$$

le même calcul se fait pour la masse de droite.

on aura: $\left(\frac{d\vec{r}_d}{dt} \right)^2 \approx (l\dot{\theta} + \dot{y})^2$

$$\text{Donc } T = \frac{1}{2} m (\dot{l} \dot{\theta} - \dot{y})^2 + \frac{1}{2} m (\dot{l} \dot{\theta} + \dot{y})^2$$

$$T = \frac{1}{2} m [2 (\dot{l} \dot{\theta})^2 + 2 \dot{y}^2]$$

$$U = U_{el} + U_{grav}$$

$$= U_{el} = \frac{1}{2} k_A + U_{k_B}$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 (y - l_1 \theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 (y + l_2 \theta)^2$$

$$U_{grav} = U_{mg} + U_{m_d}$$

position des masses selon la verticale. dépend de y et de $\sin \theta$.

Donc Non quadratique
 $\Rightarrow U_{grav}$ disparaît de la condition d'équilibre

$$\int_y dW = \vec{F}(t) \cdot \frac{d\vec{r}}{dy}$$

$$= F(t) \cdot \frac{dy}{dy}$$

$$= F(t)$$

on $\vec{r}$ = vecteur position de la Force où elle est appliquée.

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

Et le mvt :

$$2m \ddot{y} + (k_1 + k_2) y + (k_2 l_2 - k_1 l_1) \theta = F(t)$$

$$\textcircled{I} \left\{ \begin{aligned} 2m l^2 \ddot{\theta} + (k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2) \theta + (k_2 l_2 - k_1 l_1) y &= 0 \end{aligned} \right.$$

30/ ? ω tel que : G reste immobile. ($\dot{w} = 0$)
 e.a.d. $y = \text{cte} \Rightarrow \underline{\dot{y} = 0}$.

On va résoudre le syst d'eqt en utilisant les notations complexes :

$$\begin{aligned} F(t) &= F_0 \cos \omega t & \longleftrightarrow & \tilde{F}(t) = F_0 e^{j\omega t} \\ y &= A e^{j\omega t} & \theta &= B e^{j\omega t} & A \neq B & \quad \leftarrow A = |A| e^{j\phi} \\ \dot{y} &= j\omega y & \dot{\theta} &= j\omega \theta \\ j\omega \dot{y} = \ddot{y} &= -\omega^2 y & \ddot{\theta} &= -\omega^2 \theta = j\omega \dot{\theta} \end{aligned}$$

le syst (I) devient :

$$\begin{aligned} \text{①} \quad j2m\omega \dot{y} + \left(\frac{k_1 + k_2}{j\omega} \right) \dot{y} + \frac{(k_2 l_2 - k_1 l_1)}{j\omega} \dot{\theta} &= \tilde{F}(t) \\ \text{②} \quad j2ml^2 \omega \dot{\theta} + \left(\frac{k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2}{j\omega} \right) \dot{\theta} + \frac{(k_2 l_2 - k_1 l_1)}{j\omega} \dot{y} &= 0 \end{aligned}$$

comme G est immobile donc $\dot{y} = 0$ (intermédiaire)

$$\text{eqt ②} \Rightarrow \left[j2ml^2 \omega + \left(\frac{k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2}{j\omega} \right) \right] \dot{\theta} = 0$$

comme $\dot{\theta} \neq 0$ (voir eqt ① :
 (bien sûr $k_2 l_2 - k_1 l_1 \neq 0$)

$$\dot{\theta} = \frac{j\omega}{k_2 l_2 - k_1 l_1} \tilde{F}(t)$$

Alors $\Rightarrow : j2ml^2 \omega + \frac{k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2}{j\omega} = 0$

Donc $\omega^2 = \frac{k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2}{2ml^2}$

c'est la pulsation pour laquelle G devient immobile

Dans ce cas $\theta = \frac{\dot{\theta}}{j\omega}$ sera égale

$$\bar{a} \quad \theta(t) = \frac{F_0}{k_2 l_2 - k_1 l_1} \cos \omega t \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{en notation} \\ \text{réelle.} \end{array} \right.$$

N'oubliez pas que $\omega = \frac{k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2}{2ml^2}$

1^{de} L oscillatoire harmonique

40/ $k_1 l_1 = k_2 l_2$

? θ et y ?

lig (I) tenant

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 2m\ddot{y} + (k_1 + k_2)y &= F_0 \cos \omega t \\ \text{b)} \quad 2ml^2\ddot{\theta} + (k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2)\theta &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{b)} \Rightarrow \ddot{\theta} + \Omega_{\theta}^2 \theta = 0 \Rightarrow \theta = \theta_0 \cos(\Omega_{\theta} t + \varphi)$$

$$\Omega_{\theta} = \frac{k_2 l_2^2 + k_1 l_1^2}{2ml^2}$$

$$\text{a)} \Rightarrow \ddot{y} + \Omega_{y}^2 y = \frac{F_0}{2m} \cos \omega t \quad ; \quad \Omega_{y}^2 = \frac{k_1 + k_2}{2m}$$

Syst force non amortie

$$\Rightarrow y = \frac{\frac{F_0}{2m} \cos \omega t}{(\omega_0^2 - \omega^2)}$$