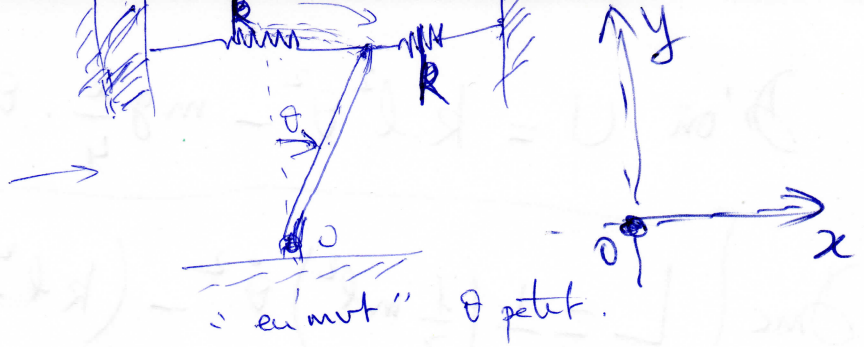
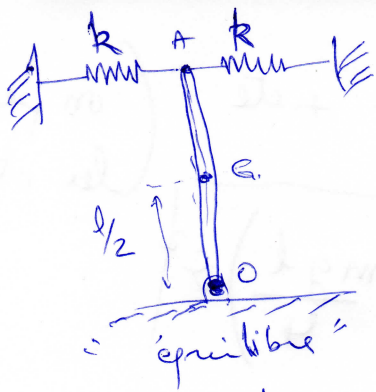


exo :



1er épt ≠ le mort :

le système représenté est libre donc l'épt de mort donnée par la théorie de Lagrange sera (en choisissant θ comme coordonnée généralisée).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad \text{où} \quad L = T - U \quad \text{où} \quad T = \text{énergie cinétique}$$

$$U = \text{potentielle.}$$

* $T = T_{\text{barre qui fait un mt de rotation}} \Rightarrow T = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$

où $J = \int r^2 dm$ d'inertie de la barre $\frac{1}{2}$ à l'axe de rotation (le point O) qui se trouve à l'extrémité de la barre.

$$J = \frac{1}{3} m l^2$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m l^2 \right) \dot{\theta}^2$$

** $U = U_{\text{elan}} + U_{\text{grav}} = U_{k_{\text{gauche}}} + U_{k_{\text{droite}}} + U_m$

(faible oscillation c.a.d θ petit $\Rightarrow \begin{cases} \sin \theta \approx \theta \\ \cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \end{cases}$

- ressort gauche allongée de $l \sin \theta \approx l \theta$
 // droit compressé " $-l \sin \theta \approx -l \theta$.

$$\text{Donc } U_{\text{ela}} = \frac{1}{2} k (l \theta)^2 + \frac{1}{2} k (-l \theta)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 k (l \theta)^2$$

$$U_{\text{el}} = k \cdot l^2 \theta^2$$

• $U_{\text{grav}} = ?$ (on applique le principe $\pm U_{\text{gr}} = \pm m g \Delta h$ on tire $\vec{F} = -\text{grad } U \Leftrightarrow m \vec{g} = -\vec{\nabla} U$)

D'après le choix de axes on a $-m g = -\frac{dU_m}{dy} \Leftrightarrow U_m = \int_{\frac{l}{2} \cos \theta}^{\frac{l}{2}} m g dy$

$$\Rightarrow U_{\text{grav}} = m g \frac{l}{2} \cos \theta - m g \frac{l}{2} + \text{cte}$$

$$U_m = m g \frac{l}{2} (1 - \cos \theta) + \text{cte}$$

$$\left\{ U_m = -m g \frac{l}{2} \frac{\theta^2}{2} + \text{cte} \right\}$$

D'où $U = k.l^2\theta^2 - mg\frac{l}{4}.\theta^2 + cte$ (on peut prendre la cte = 0)

Jmc $L = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} m l^2 \right) \dot{\theta}^2 - \left(k l^2 - \frac{mg l}{4} \right) \theta^2$

opt de met:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$\frac{1}{3} m l^2 \ddot{\theta} + \left(2 k l^2 - \frac{mg l}{2} \right) \theta = 0$ opt de met

$$\ddot{\theta} + \frac{2 k l^2 - \frac{mg l}{2}}{\frac{1}{3} m l^2} \theta = 0$$

b/ la solution de l'opt différentielle dépend des racines de l'opt caractéristique: $r^2 + \frac{2 k l^2 - \frac{mg l}{2}}{\frac{1}{3} m l^2} = 0$

* $\frac{2 k l^2 - \frac{mg l}{2}}{\frac{1}{3} m l^2} > 0 \Rightarrow$ solution harmonique: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$
 on $\omega_0^2 = \frac{2 k l^2 - \frac{mg l}{2}}{\frac{1}{3} m l^2}$: pulsation propre. (ω_0).

* $\frac{2 k l^2 - \frac{mg l}{2}}{\frac{1}{3} m l^2} < 0 \Rightarrow$ solution aperiodique: $\theta(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$
 on $r_1 = \sqrt{\frac{\frac{mg l}{2} - 2 k l^2}{\frac{1}{3} m l^2}}$ & $r_2 = -\sqrt{\frac{\frac{mg l}{2} - 2 k l^2}{\frac{1}{3} m l^2}}$

* $\frac{2 k l^2 - \frac{mg l}{2}}{\frac{1}{3} m l^2} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{constante}$
 $\neq 0 \Rightarrow$ système
 $= 0 \Rightarrow$ système équilibré