

# Devoir 1 (VOM) 03 novembre 2018

Nom :

prénoms :

matricule :

On suppose que pour tous les exercices, les oscillations sont de faibles amplitudes autour de la position d'équilibre.

**Exo 1 :** pour le système suivant (une tige de longueur  $l$ , de masse  $m$  et de moment d'inertie  $J_0$  par rapport à l'axe de rotation), l'équation différentielle de mouvement est donnée par la relation suivante :

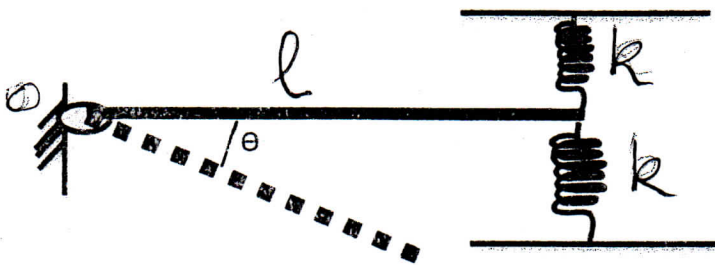
$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Quelle est l'expression de  $\omega_0^2$  [cocher sur la bonne réponse] ?

a)  $\omega_0^2 = \frac{2kl^2 - mgl}{J_0 + ml^2}$  [ ]      b)  $\omega_0^2 = \frac{kl^2}{J_0 + ml^2}$  [ ]      c)  $\omega_0^2 = \frac{2kl^2}{J_0}$  [ ]

d)  $\omega_0^2 = \frac{kl^2 + mgl}{J_0 + ml^2}$  [ ]      e)  $\omega_0^2 = \frac{kl^2}{J_0 + ml^2}$  [ ]      f)  $\omega_0^2 = \frac{2kl^2 + mgl/4}{J_0 + ml^2}$  [ ]

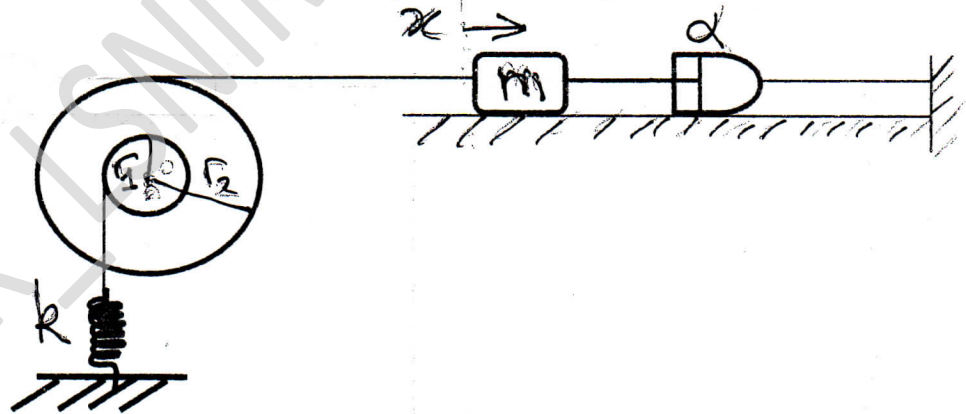
g) Aucune n'est juste : [ ]



**Exo 2 :**

Trouver l'équation différentielle de mouvement du système représenté sur la figure suivante :

$J_0$  :  $\eta$  d'inertie



# Devoir 1 (VOM) 03 novembre 2018

Nom :

prénoms :

matricule :

On suppose que pour tous les exercices, les oscillations sont de faibles amplitudes autour de la position d'équilibre.

**Exo 1 :** pour le système suivant (une tige de longueur  $l$ , de masse  $m$  et de moment d'inertie  $J_0$  par rapport à l'axe de rotation), l'équation différentielle de mouvement est donnée par la relation suivante :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

Quelle est l'expression de  $\omega_0^2$  [cocher sur la bonne réponse] ? :

a)  $\omega_0^2 = \frac{2kl^2 - mgl}{J_0 + ml^2}$  ☐

b)  $\omega_0^2 = \frac{2kl^2}{J_0 + ml^2}$  ☐

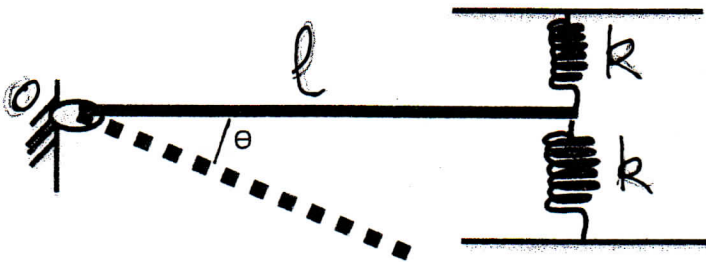
c)  $\omega_0^2 = \frac{2kl^2}{J_0}$  ☐

d)  $\omega_0^2 = \frac{2kl^2 + mgl}{J_0 + ml^2}$  ☐

e)  $\omega_0^2 = \frac{kl^2}{J_0 + ml^2}$  ☐

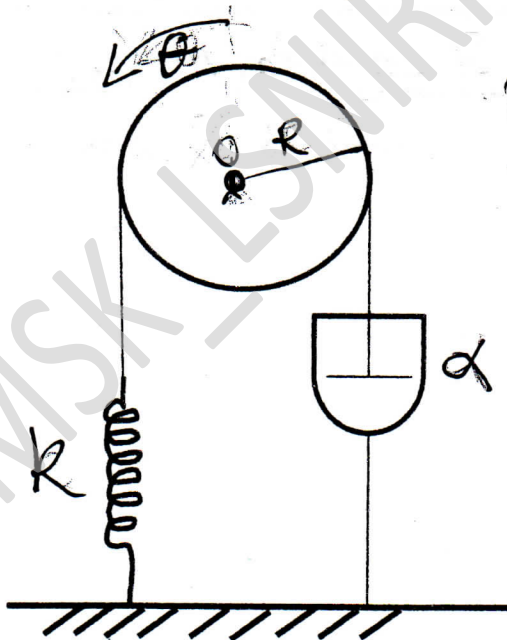
f)  $\omega_0^2 = \frac{2kl^2 + mgl/4}{J_0 + ml^2}$  ☐

g) Aucune n'est juste : ☐

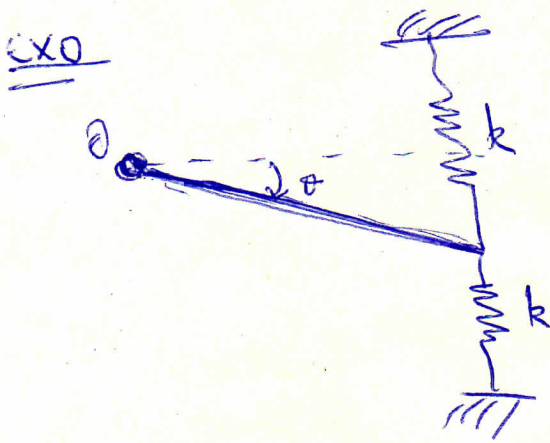


**Exo 2 :**

Trouver l'équation différentielle de mouvement du système représenté sur la figure suivante, et ensuite donner l'expression du coefficient  $\alpha$  de l'amortisseur quand le système se trouve en régime critique.



poulie de masse  $m$ , de rayon  $R$   
 $J = \eta \frac{1}{2} m R^2$  d'inertie % à  $O$ .  
 $\alpha_c = ?$



tige  $\begin{cases} m \\ l \\ J_0 \end{cases}$

eqt différentielle de mot :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

?  $\underline{\underline{\omega_0^2}}$

Syst libre:

eqt de mot:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$

$$L = T - U$$

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k (l\theta)^2 + \frac{1}{2} k (l\theta)^2$$

$$J_0 \ddot{\theta} + 2kl^2 \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2kl^2}{J_0} \theta = 0$$

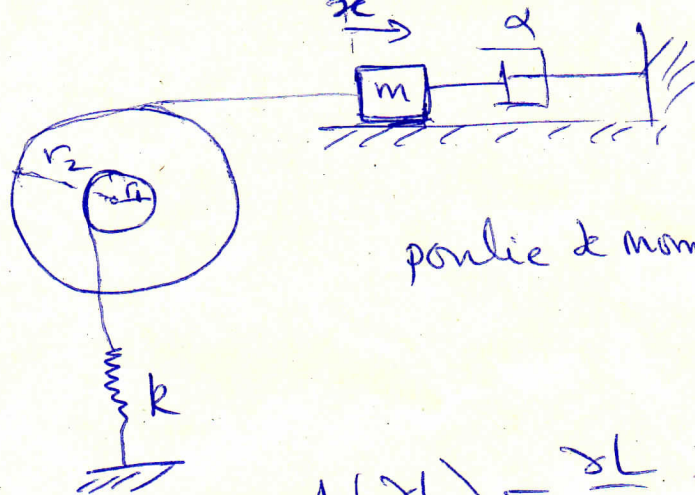
d'où

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{2kl^2}{J_0}}$$

$U_{grav}$  est non quadratique  
donc disparaît de  
la condition d'équilibre



exo



poulie de moment d'inertie  $J_0$

eqt d'équilibre:  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = - \frac{\partial D}{\partial x}$

on cherche:  $T, U$  et  $D$ .

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k (r_1 \theta)^2$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

il faut trouver une relation entre  $\theta$  et  $x$ .

on a:  $x = r_2 \theta$

D'où  $T = \frac{1}{2} J_0 \frac{\dot{x}^2}{r_2^2} + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} \left( m + \frac{J_0}{r_2^2} \right) \dot{x}^2$

$$U = \frac{1}{2} k \left( r_1 \frac{x}{r_2} \right)^2 = \frac{1}{2} k \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 x^2$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$$

l'éq d'équilibre:

$$\left( m + \frac{J_0}{r_2^2} \right) \ddot{x} + k \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 x = - \alpha \dot{x}$$

$$\left( m + \frac{J_0}{r_2^2} \right) \ddot{x} + \alpha \dot{x} + k \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2 x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec  $\left( 2\delta = \frac{\alpha}{\left( m + \frac{J_0}{r_2^2} \right)} \right) ; \left( \omega_0^2 = \frac{k \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^2}{m + \frac{J_0}{r_2^2}} \right)$

exo:



pendule  $\left\{ \begin{array}{l} m \\ R \\ J_0 \end{array} \right.$

eq diff deurt

$$17/ \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} \right.$$

$$T = \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}^2$$

$$U = \frac{1}{2} k (R\theta)^2$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha (R\dot{\theta})^2$$

Rappel:  $J_0 = \frac{1}{2} m R^2$

$$\rightarrow J_0 \ddot{\theta} + k R^2 \theta = - \alpha R^2 \dot{\theta}$$

$$J_0 \ddot{\theta} + \alpha R^2 \dot{\theta} + k R^2 \theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha R^2}{J_0} \dot{\theta} + \frac{k R^2}{J_0} \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + 2\delta \dot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

on  $\delta = \frac{\alpha R^2}{2J_0}$  ;  $\omega_0^2 = \frac{k R^2}{J_0}$

20/ regime critique:

$$\omega_0 = \delta \Leftrightarrow \sqrt{\frac{k R^2}{J_0}} = \frac{\alpha R^2}{2J_0}$$

$$\Rightarrow \alpha_c = \frac{2J_0}{R^2} \sqrt{\frac{k R^2}{J_0}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_c = 2 \sqrt{\frac{k J_0}{R^2}}}$$

critique

Si on remplace  $J_0 = \frac{1}{2} m R^2$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_c = \sqrt{2 k m}}$$