Devoir 2 (VOM) 08 décembre 2018

Nom : **prénoms :** **matricule :**

On suppose que pour tous les exercices, les oscillations sont de faibles amplitudes autour de la position d'équilibre.

Exo 1 : Quelle est l'expression des pulsations propres du système ci-dessous :

On donne $\omega_0^2 = \frac{2k}{m_1}$ et $2m_2 = 7m_1$. [Cocher la bonne réponse] ?

a) $\omega_1^2 = \omega_0^2\,,\, \omega_2^2 = 2\omega_0^2$ [ ]

b) $\omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{7}}, \omega_2^2 = -\frac{\omega_0^2}{\sqrt{7}}$ [ ]

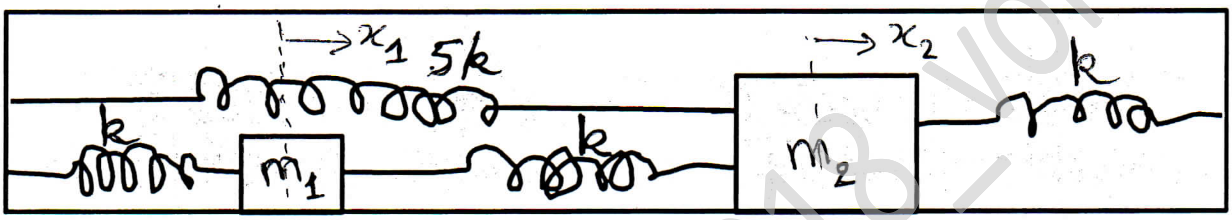
c) $\omega_1^2 = \omega_0^2\frac{\sqrt{14}+1}{\sqrt{14}}, \omega_2^2 = \omega_0^2\frac{\sqrt{14}-1}{\sqrt{14}}$ [ ]

d) $\omega_1^2 = \omega_0^2(\sqrt{7}-1)\,,\, \omega_2^2 = \omega_0^2(\sqrt{7}+1)$ [ ]

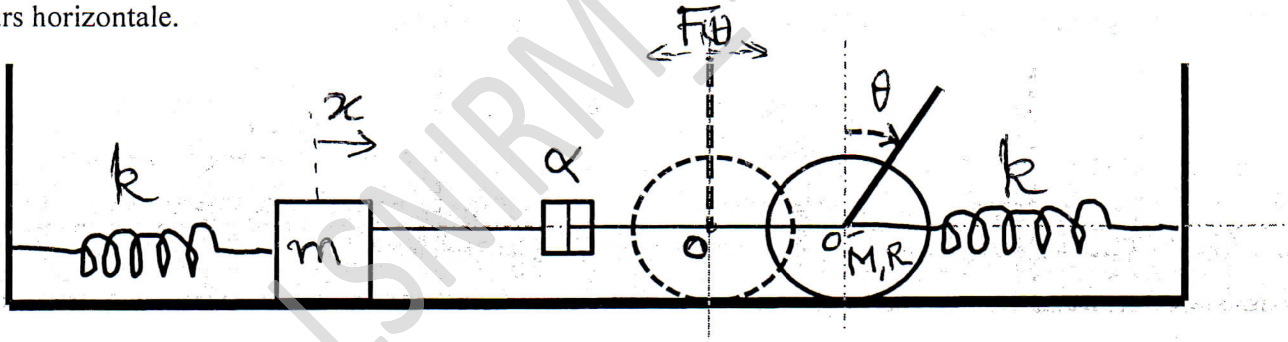
e) $\omega_1^2 = \omega_0^2\frac{\sqrt{14}}{1+\sqrt{14}}, \omega_2^2 = \omega_0^2\frac{\sqrt{14}}{-1+\sqrt{14}}$ [ ]

f) $\omega_1^2 = \omega_0^2\frac{1}{-1+\sqrt{7}}, \omega_2^2 = \omega_0^2\frac{1}{1+\sqrt{7}}$ [ ]

g) Aucune n'est juste : [ ]

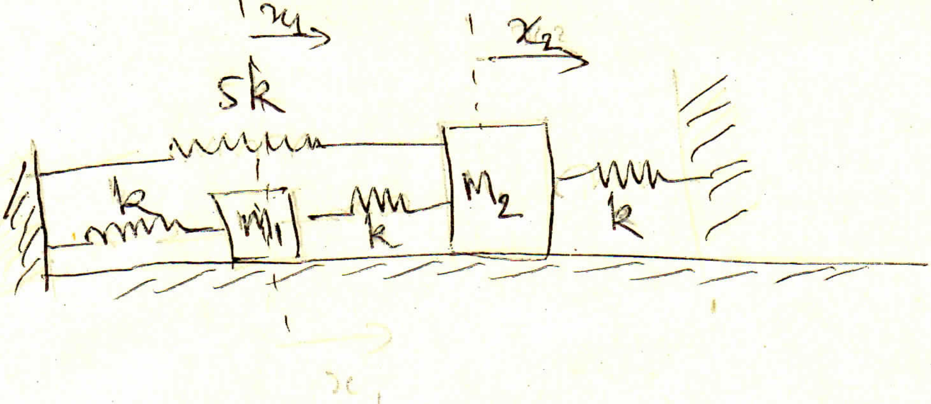


Exo 2 : Le cylindre de masse M et de rayon R, roule sans glisser. Son moment d'inertie est ½ $M\, R^2$
La tige est soudée au cylindre, et a une longueur $l = 2R$ et sa masse est négligeable (sa masse =0)
On applique une force sinusoïdale F(t)=F_0 sin(ωt) à l'extrémité de la tige. On suppose que cette force reste toujours horizontale.



1) Trouver les équations différentielles du mouvement en x et Θ.
2) Pour ω² = k/m ; donner l'expression de Θ(t).

exo



$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} k x_2^2 + \frac{1}{2}(5k) x_2^2$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k x_1 + k(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + 6k x_2 + k(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + 2k x_1 - k x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + 7k x_2 - k x_1 = 0 \end{cases}$$

on a

$m_2 = \frac{7}{2} m_1$

$\frac{2k}{m_1} = \omega_0^2$

$$\ddot{x}_1 + \frac{2k}{m_1} x_1 - \frac{k}{m_1} x_2 = 0$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{7k}{m_2} x_2 - \frac{k}{m_2} x_1 = 0$$

on prend sols harmoniques

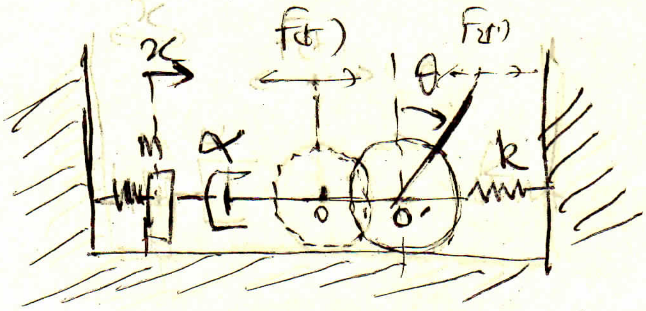
$\ddot{x} = -\omega^2 x$

$$\begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) x_1 - \frac{\omega_0^2}{2} x_2 = 0 \\ -\frac{\omega_0^2}{7} x_1 + (\omega_0^2 - \omega^2) x_2 = 0 \end{cases}$$

Sols $\neq 0 \Leftrightarrow$ det $= 0$, det $= (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \frac{\omega_0^4}{14} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{14}}\right) \\ \omega_2^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{14}}\right) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left(\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{\omega_0^2}{\sqrt{14}}\right)\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{\omega_0^2}{\sqrt{14}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{aligned} \omega_1^2 &= \omega_0^2 \left(\frac{\sqrt{14}+1}{\sqrt{14}}\right) \\ \omega_2^2 &= \omega_0^2 \left(\frac{\sqrt{14}-1}{\sqrt{14}}\right) \end{aligned}}$$



• $l = 2R$

• cylindre roule sans glisser

$$T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot\theta^2 + \frac{1}{2}M(R\dot\theta)^2 + \frac{1}{2}m\dot x^2 = T_{cylindre} + T_m$$

$T_{rotation} + T_{translation}$

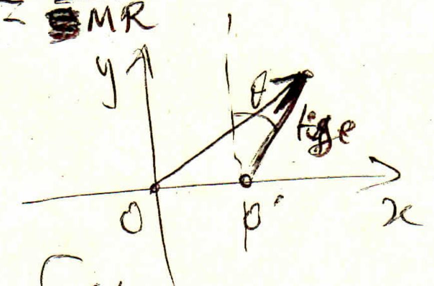
$$U = \frac{1}{2}k(R\theta)^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$D = \frac{1}{2}\alpha(R\dot\theta - \dot x)^2$$

$$\tilde{F}_\theta(t) = F(t).(R+l) = 3R.F(t) = \vec{F}(t)\cdot\frac{d\vec r}{d\theta} \quad (*\alpha)$$

$$\begin{cases} m\ddot x + kx + \alpha(\dot x - R\dot\theta) = 0 \\ \frac{3}{2}MR^2\ddot\theta + kR^2\theta + \alpha R(R\dot\theta - \dot x) = 3F(t).R \end{cases}$$

$$(I)\begin{cases} \ddot x + \frac{k}{m}x + \frac{\alpha}{m}(\dot x - R\dot\theta) = 0 \\ \ddot\theta + \frac{2k}{3M}\theta + \frac{2\alpha}{3MR}(R\dot\theta - \dot x) = \frac{2F(t)}{MR} \end{cases}$$



$(*\alpha)$: $\vec r$ = vecteur position de la force F(t).

$$= \vec{OO'} + \vec{O'tige} = \begin{cases} x : R\theta + l\sin\theta \simeq R\theta + l\theta \\ y : 0 + l\cos\theta \end{cases}$$

$$\vec F(t) = \begin{cases} F_x = +F(t) \\ F_y = 0 \end{cases} \text{(Force horizontale)}$$

$$\vec F(t)\cdot\frac{d\vec r}{d\theta} = F_x\cdot\frac{dr_x}{d\theta} = F(t)\cdot\frac{d(R\theta + l\theta)}{d\theta} = \underline{F(t)(R+l)}$$

2°/ $\omega^2 = \frac{k}{m}$; ? $\theta(t)$:

Sols harmoniques $\ddot{x} = -\omega^2 x$; $\ddot{\theta} = -\omega^2 \theta$

$$(\mathrm{I}) \Leftrightarrow \begin{cases} ① \; -\omega^2 x + \frac{k}{m} x + \frac{\alpha}{m}(\dot{x} - R\dot{\theta}) = 0 \\ ② \; -\omega^2 \theta + \frac{2k}{3M}\theta + \frac{2\alpha}{3MR}\cdot(R\dot{\theta} - \dot{x}) = \frac{2F(t)}{MR} \end{cases}$$

de l'eqt ① : $x\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) + \frac{\alpha}{m}(\dot{x} - R\dot{\theta}) = 0$

$\left(\omega^2 = \frac{k}{m}\right)$ 0

$$\xrightarrow{\text{mama}} \frac{\alpha}{m}(\dot{x} - R\dot{\theta}) = 0$$

Donc $(\dot{x} - R\dot{\theta}) = 0$

de l'eqt ② :

$$\theta\left(\frac{2k}{3M} - \omega^2\right) + \frac{2\alpha}{3MR}(R\dot{\theta} - \dot{x}) = \frac{2F(t)}{MR}$$

0 (voir)

D'ou

$$\theta(t) = \frac{2F(t)}{MR} \cdot \frac{1}{\left(\frac{2k}{3M} - \omega^2\right)}$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{2F(t)}{\frac{2kR}{3} - 3MR.\omega^2}}$$

; n'oubliez pas que $\omega^2 = \frac{k}{m}$

Devoir 2 (VOM) 15 décembre 2018

Nom : **prénoms :** **matricule :**

On suppose que pour tous les exercices, les oscillations sont de faibles amplitudes autour de la position d'équilibre.

Exo 1 : Quelle est l'expression des pulsations propres du système ci-dessous : (le cylindre roule sans glisser). On donne $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $m_1 = m_2 = m$. [Cocher la bonne réponse] ?

a) $\omega_1^2 = \omega_0^2\,,\omega_2^2 = 2\omega_0^2$ [ ]

b) $\omega_1^2 = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{7}}, \omega_2^2 = -\frac{\omega_0^2}{\sqrt{7}}$ [ ]

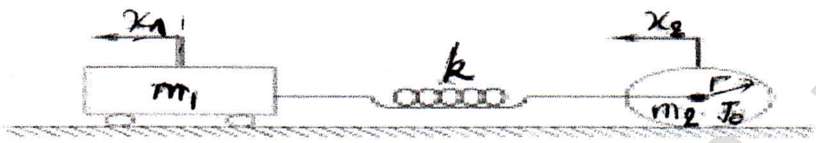
c) $\omega_1^2 = \omega_0^2\frac{5}{3}, \omega_2^2 = -\omega_0^2\frac{5}{3}$ [ ]

d) $\omega_1^2 = \omega_0^2(\sqrt{3}-1)\,, \omega_2^2 = \omega_0^2(\sqrt{3}+1)$ [ ]

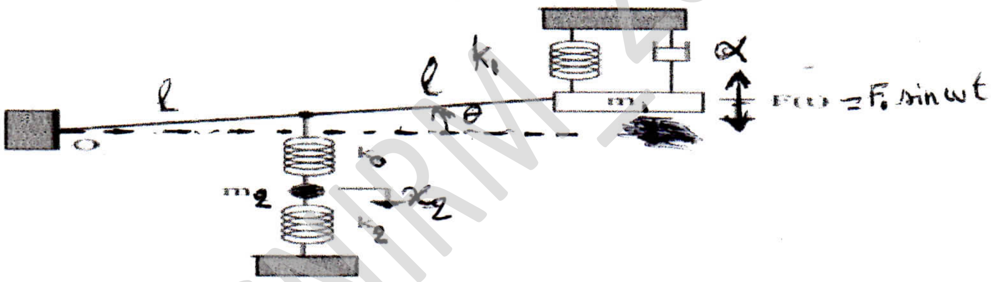
e) $\omega_1^2 = \omega_0^2\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}, \omega_2^2 = \omega_0^2\frac{\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}$ [ ]

f) $\omega_1^2 = 0\,, \omega_2^2 = \frac{5}{3}\omega_0^2$ [ ]

g) Aucune n'est juste : [ ]

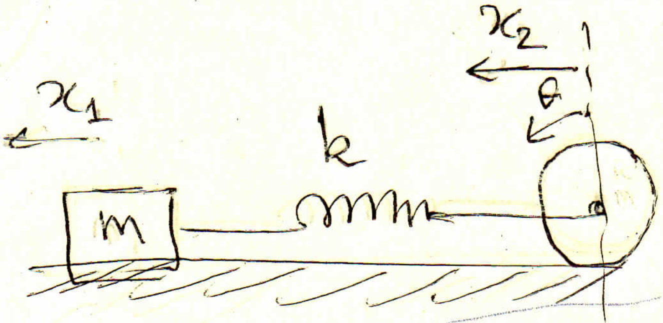


Exo 2 : Pour le système ci-dessous, on suppose que la tige de longueur 2 l a une masse négligeable et qu'elle oscille autour du point O. On applique une force sinusoïdale F(t)=F$_0$ sin(ωt) sur la masse m_1. On suppose que cette force reste toujours verticale.



1) Trouver les équations différentielles du mouvement en x et Θ.
2) Pour $\omega^2 = k_2/m$; donner l'expression de Θ(t).

exO



(Cylindre roule sans glisser)

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} M R^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M (R\dot{\theta})^2$$

Donc Energie cinetique de rotation et de translation

$$U = \frac{1}{2} k (R\theta - x)^2$$

$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 - R\theta) = 0$$

$$\frac{3}{2} M R^2 \ddot{\theta} + kR(R\theta - x) = 0$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + kx_1 - kR\theta = 0 \\ \frac{3}{2} M R^2 \ddot{\theta} + kR^2\theta - kRx_1 = 0 \end{cases} \qquad w_0^2 = \frac{k}{m} \qquad M = m$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + w_0^2 x_1 - R w_0^2 \theta = 0 \\ \ddot{\theta} + \frac{2}{3} w_0^2 \theta - \frac{2 w_0^2}{3R} x_1 = 0 \end{cases}$$

Sol harmonique $\left(\begin{matrix}\ddot{x} = -w^2 x \\ \ddot{\theta} = -w^2\theta\end{matrix}\right)$

$$(w_0^2 - w^2) x_1 - R w_0^2 \theta = 0$$

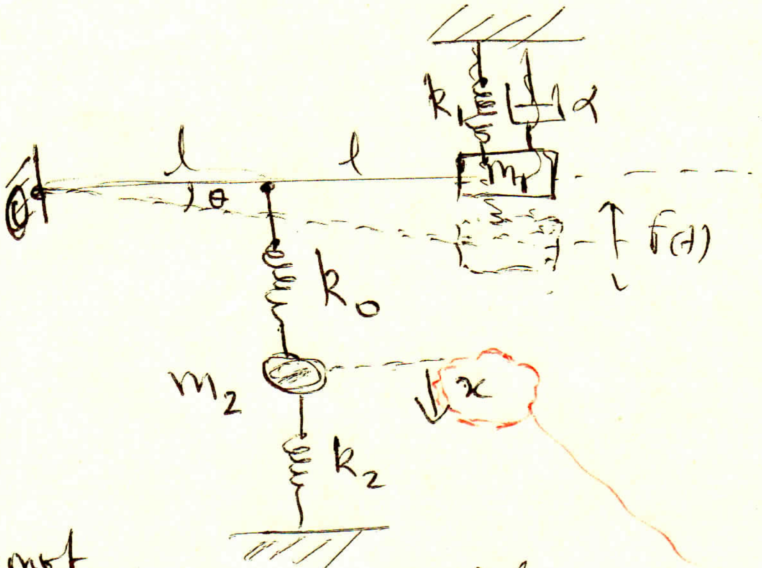
$$-\frac{2}{3R} w_0^2 x_1 + \left(\frac{2}{3} w_0^2 - w^2\right)\theta = 0$$

$\det = 0 \iff$ $(w_0^2 - w^2)\left(\frac{2}{3} w_0^2 - w^2\right) - \frac{2}{3} w_0^4 = 0$

$$\frac{2}{3} w_0^4 - w^2\left(w_0^2 + \frac{2}{3} w_0^2\right) + w^4 - \frac{2}{3} w_0^4 = 0$$

$$w^2 \left[w^2 - \frac{5}{3} w_0^2\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{cases} w_{01}^2 = 0 \\ w_{02}^2 = \frac{5}{3} w_0^2 \end{cases}}$$

exo :



• tige de masse négligeable ⇓ (sa masse = 0 donc pas d'énergie cinétique pour la tige)

dans le sujet c'était noté x_2

1°/ eq^{ns} de mvt

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot\theta}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial D}{\partial \dot\theta} + \tilde{F}_\theta(t) \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x} = -\dfrac{\partial D}{\partial \dot x} + \tilde{F}_x(t) \end{cases}$$

$$T = T_{m_1} + T_{m_2} = \frac{1}{2} m_1 (2l)^2 \dot\theta^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot x^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 (2l\theta)^2 + \frac{1}{2} k_0 (l\theta - x)^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2$$

$$D = \frac{1}{2} \alpha (2l\dot\theta)^2$$

$$\tilde{F}_x(t) = 0 \quad ; \quad \tilde{F}_\theta(t) = \vec{F}(t) \cdot \frac{d\vec r}{d\theta} = F(t) \cdot \frac{d(2l\theta)}{d\theta} = 2l \cdot F(t).$$

$$\begin{cases} ① \ \theta : & m_1 (2l)^2 \ddot\theta + \alpha (2l)^2 \dot\theta + k_1 (2l)^2 \theta + k_0 l (l\theta - x) = 2l F(t) \\ ② \ x : & m_2 \ddot x + k_2 x + k_0 (x - l\theta) = 0 \end{cases}$$

2°/ ? θ(t) ds le cas où $\omega^2 = \dfrac{k_2}{m_2}$

Sols harmoniques : $\ddot x = -\omega^2 x$ et $\ddot\theta = -\omega^2 \theta$.

② ⇒ $x(-m_2\omega^2 + k_2) + k_0(x - l\theta) = 0$ ⇒ $\boxed{k_0(x - l\theta) = 0}$

0

→ on injecte ds ① ⇒ $\boxed{\theta = \dfrac{\dfrac{F(t)}{2l}}{k_1 + j\alpha\omega - m_1\omega^2}}$

n'oublies pas que $\omega^2 = \dfrac{k_2}{m}$