

# 1 SÉRIE 1 – Énergie, Convolution, Corrélation et Séries de Fourier

## 1.1 Exercice 1 – Signaux porte et triangulaire

### Application physique

Les signaux rectangulaires modélisent des impulsions de déclenchement (*trigger*) en électronique nucléaire – par exemple le signal logique issu d'un discriminateur à seuil dans un détecteur NaI(Tl). L'analyse de leur énergie et de leur corrélation est fondamentale pour concevoir les circuits de coïncidence temporelle en détection gamma.

### Définition des signaux

D'après les figures de l'énoncé :

$$x(t) = \begin{cases} A & \text{si } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} A \left(1 - \frac{2|t|}{T}\right) & \text{si } |t| \leq T/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

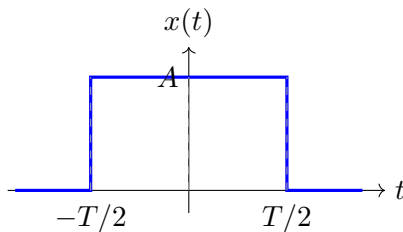


Figure 1 :  $x(t)$  – signal porte

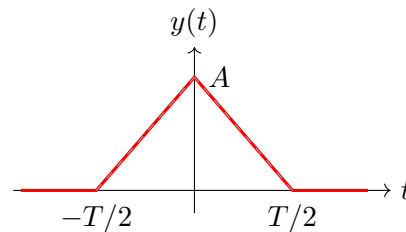


Figure 2 :  $y(t)$  – signal triangulaire

### Question 1 – Énergie totale et puissance totale

#### Définitions fondamentales

$$E_s = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt \quad P_s = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |s(t)|^2 dt$$

Un signal à support borné vérifie  $E_s < \infty$  et par conséquent  $P_s = 0$ .

#### Remarque : Différence cruciale entre $T_0$ et $T$

- $T$  est une **constante fixée** par l'énoncé : c'est la **durée** du signal (largeur du rectangle ou du triangle). C'est une donnée du problème.
- $T_0$  est une **variable** qui tend vers  $+\infty$  dans la définition de la puissance : c'est la **fenêtre d'observation**, qui grandit indéfiniment.
- **Ne jamais les confondre !** Dès que  $T_0 > T$ , l'intégrale vaut  $A^2 T$  (le signal est entier dans la fenêtre), mais on divise par  $T_0 \rightarrow +\infty$ , donc  $P \rightarrow 0$ .

#### 1.a) Énergie de $x(t)$ :

Comme  $x(t) = 0$  en dehors de  $[-T/2, T/2]$ , les bornes se réduisent au support du signal :

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 dt = A^2 \left[ t \right]_{-T/2}^{T/2} = A^2 \left( \frac{T}{2} - \left( -\frac{T}{2} \right) \right) = A^2 \cdot T$$

$$E_x = A^2 T$$

Puissance de  $x(t)$  :

$$P_x = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{1}{T_0} \underbrace{\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |x(t)|^2 dt}_{= A^2 T \text{ (constante pour } T_0 > T)} = \lim_{T_0 \rightarrow \infty} \frac{A^2 T}{T_0} = 0$$

$$P_x = 0$$

1.b) Énergie de  $y(t)$  :

$$E_y = \int_{-\infty}^{+\infty} |y(t)|^2 dt = \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \left(1 - \frac{2|t|}{T}\right)^2 dt = A^2 \int_{-T/2}^{T/2} \left(1 - \frac{2|t|}{T}\right)^2 dt$$

Étape 1 – Utilisation de la symétrie paire :

L'intégrande  $\left(1 - \frac{2|t|}{T}\right)^2$  est une fonction **paire** (car  $|t|$  est pair). On écrit donc :

$$E_y = 2A^2 \int_0^{T/2} \left(1 - \frac{2t}{T}\right)^2 dt$$

(pour  $t \geq 0$ ,  $|t| = t$ , donc le module disparaît.)

Étape 2 – Changement de variable :

On pose :

$$u = 1 - \frac{2t}{T} \quad \Rightarrow \quad du = -\frac{2}{T} dt \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{T}{2} du$$

Nouvelles bornes :

$$t = 0 \Rightarrow u = 1 \quad t = T/2 \Rightarrow u = 1 - \frac{2(T/2)}{T} = 0$$

Étape 3 – Substitution :

$$E_y = 2A^2 \int_{u=1}^{u=0} u^2 \cdot \left(-\frac{T}{2}\right) du = 2A^2 \cdot \frac{T}{2} \int_0^1 u^2 du = A^2 T \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = A^2 T \cdot \frac{1}{3}$$

$$E_y = \frac{A^2 T}{3}$$

**Remarque : Vérification par développement direct**

Sans changement de variable, on développe  $(1 - 2t/T)^2 = 1 - 4t/T + 4t^2/T^2$  :

$$\int_0^{T/2} \left(1 - \frac{4t}{T} + \frac{4t^2}{T^2}\right) dt = \left[t - \frac{2t^2}{T} + \frac{4t^3}{3T^2}\right]_0^{T/2} = \frac{T}{2} - \frac{T}{2} + \frac{T}{6} = \frac{T}{6}$$

$$\text{Donc } E_y = 2A^2 \cdot \frac{T}{6} = \frac{A^2T}{3}. \checkmark$$

**Comparaison :**  $E_y = E_x/3$ . Le triangle a trois fois moins d'énergie que le rectangle de mêmes dimensions  $A$  et  $T$ , car il vaut 0 aux bords et  $A$  seulement au centre.

**Puissance :**  $P_y = 0$  (même raisonnement que pour  $P_x$  : signal à support borné).

**Question 2 – Convolution**  $z(t) = x * y$

Par définition de la convolution :

$$z(t) = (x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau = A \int_{-T/2}^{T/2} y(t - \tau) d\tau$$

**Remarque : Règle sur le support de la convolution**

Si  $x$  a une durée  $T_1$  et  $y$  une durée  $T_2$ , alors  $x * y$  a une durée  $T_1 + T_2$ . Ici  $T_1 = T_2 = T$ , donc le support de  $z$  est  $[-T, T]$ .

Valeur maximale en  $t = 0$  :

$$z(0) = A \int_{-T/2}^{T/2} y(\tau) d\tau = A \times \underbrace{\frac{1}{2} \cdot T \cdot A}_{\text{aire du triangle}} = \frac{A^2T}{2}$$

$z(t)$  est pair, quadratique par morceaux sur  $[-T, T]$ , avec  $z(0) = \frac{A^2T}{2}$  (valeur maximale).

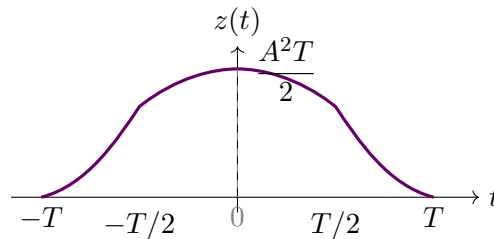


Figure 3 :  $z(t) = x * y$

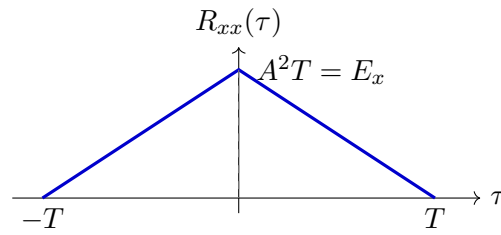
**Question 3 – Autocorrélation de  $x$  :**  $R_{xx}(\tau)$

$$R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t + \tau) dt$$

Le produit  $x(t) \cdot x(t + \tau) = A^2$  uniquement là où les deux rectangles se superposent. La longueur du chevauchement est  $(T - |\tau|)$  pour  $|\tau| \leq T$  :

$$R_{xx}(\tau) = A^2(T - |\tau|) \mathbf{1}_{|\tau| \leq T}$$

C'est un **triangle** de hauteur  $A^2T$  en  $\tau = 0$ , s'annulant en  $\tau = \pm T$ .

Figure 4 :  $R_{xx}(\tau)$ **Remarque : Propriétés fondamentales de l'autocorrélation (toujours vraies)**

- $R_{xx}(0) = E_x = A^2T$  : la valeur en  $\tau = 0$  est **toujours** égale à l'énergie. ✓
- $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$  : l'autocorrélation est **toujours paire**. ✓
- $|R_{xx}(\tau)| \leq R_{xx}(0)$  : le maximum est **toujours** en  $\tau = 0$ . ✓
- Dans le domaine de Fourier :  $\mathcal{F}\{R_{xx}\} = |X(f)|^2$  (densité spectrale d'énergie – théorème de Wiener-Khintchine).

Ces trois propriétés constituent un **outil de vérification** rapide de vos calculs.

**Question 4 – Corrélation croisée de  $x$  par  $y$  :  $R_{xy}(\tau)$** 

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y(t + \tau) dt = A \int_{-T/2}^{T/2} y(t + \tau) dt$$

Valeur en  $\tau = 0$  :

$$R_{xy}(0) = A \int_{-T/2}^{T/2} y(t) dt = A \cdot \frac{AT}{2} = \frac{A^2T}{2}$$

$R_{xy}(\tau)$  est définie sur  $[-T, T]$ , de forme polynomiale par morceaux, avec  $R_{xy}(0) = \frac{A^2T}{2}$ .

**Attention : Différence fondamentale autocorrélation / corrélation croisée**

- $R_{xx}$  est **toujours paire** :  $R_{xx}(\tau) = R_{xx}(-\tau)$ .
- $R_{xy}$  n'est **pas nécessairement paire** car  $x \neq y$ .
- Ici  $x$  est pair (rectangle centré), donc  $R_{xy}$  a la même valeur maximale que  $z$  (convolution), mais leurs formes générales diffèrent.

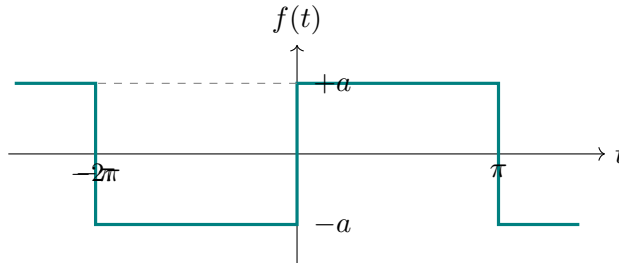
## 1.2 Exercice 2 – Signal carré impair : Série de Fourier

### Application physique

Ce signal créneau modélise une modulation de phase binaire (BPSK) utilisée en télédétection. Son développement en série de Fourier illustre la richesse harmonique des signaux rectangulaires.

Signal  $f$  de période  $2\pi$  :  $f(t) = -a$  sur  $]-\pi, 0[$ ,  $f(t) = +a$  sur  $]0, \pi[$ ,  $a > 0$ .

### Question 1 – Représentation



Signal carré impair de période  $2\pi$

### Question 2 – Caractérisation énergétique

$f$  est **périodique**  $\Rightarrow$  énergie totale infinie  $\Rightarrow$  c'est un **signal de puissance**.

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 a^2 dt + \int_0^{\pi} a^2 dt \right] = \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi a^2$$

$$P = a^2$$

### Question 3 – Développement en Série de Fourier

#### Rappel – Série de Fourier trigonométrique

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt$$

**Calcul de  $a_0$**  :  $f$  est impaire, donc  $a_0 = 0$ .

#### Remarque : Astuce – Utilisation de la parité

$f$  est **impaire** :  $f(-t) = -f(t)$ .

$\cos(nt)$  est **pair**. Donc  $f(t) \cos(nt)$  est **impaire**  $\Rightarrow$  son intégrale sur  $[-\pi, \pi]$  est nulle.

Conclusion :  $a_n = 0$  pour tout  $n$ . On n'a à calculer que les  $b_n$  – gain de temps !

**Calcul de  $b_n$**  : le produit  $f(t) \sin(nt)$  est pair (impair  $\times$  impair). On exploite la symétrie :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} a \sin(nt) dt = \frac{2a}{\pi} \left[ -\frac{\cos(nt)}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{2a}{\pi n} [-\cos(n\pi) + \cos(0)] = \frac{2a}{\pi n} [1 - \cos(n\pi)]$$

Or  $\cos(n\pi) = (-1)^n$ , donc :

$$b_n = \frac{2a}{\pi n} [1 - (-1)^n]$$

- $n$  pair :  $1 - (-1)^n = 1 - 1 = 0 \Rightarrow b_n = 0$
- $n$  impair :  $1 - (-1)^n = 1 - (-1) = 2 \Rightarrow b_n = \frac{4a}{\pi n}$

$$f(t) = \frac{4a}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{4a}{\pi} \left( \sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \dots \right)$$

#### Remarque : Vitesse de décroissance et convergence

Les  $b_n$  décroissent en  $1/n$  : convergence **lente**, car  $f$  est **discontinue** (Théorème de Gibbs).  
 Au point de discontinuité  $t = 0$ , la série converge vers  $\frac{-a+a}{2} = 0$  (Théorème de Dirichlet). ✓

#### Question 4 – Spectre de $f$

Les coefficients complexes  $c_n = b_n/(2j)$  pour  $n$  impair donnent :

$$|c_n| = \frac{2a}{\pi|n|} \text{ pour } n \text{ impair}, \quad |c_n| = 0 \text{ pour } n \text{ pair}$$

Spectre **discret**, **impair**, avec raies uniquement aux harmoniques impairs, décroissant en  $1/n$ .

### 1.3 Exercice 3 – $f(x) = e^x$ périodique : Série de Fourier et sommes

#### Application physique

Ce signal modélise la réponse exponentielle d'un détecteur entre deux impulsions successives. Son développement en série de Fourier permet d'extraire des sommes de séries remarquables.

Signal  $f$  périodique de période  $2\pi$ , défini par  $f(x) = e^x$  sur  $[0, 2\pi[$ .

#### Questions 1 et 2 – Coefficients complexes de Fourier

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^x \cdot e^{-jn x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{(1-jn)x} dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{e^{(1-jn)x}}{1-jn} \right]_0^{2\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi(1-jn)} \left[ e^{2\pi} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1} - 1 \right]$$

#### Remarque : Simplification clé

$e^{-j2\pi n} = \cos(2\pi n) - j \sin(2\pi n) = 1 - 0 = 1$  car  $n \in \mathbb{Z}$  (entier).

Cette égalité est fondamentale et revient très souvent en analyse de Fourier.

$$c_n = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi(1-jn)}, \quad |c_n| = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi\sqrt{1+n^2}}$$

#### Question 3 – Calcul des sommes

Somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$  – par égalité de Parseval :

#### Égalité de Parseval

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Membre gauche :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2x} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{4\pi} - 1}{2} = \frac{e^{4\pi} - 1}{4\pi}$$

Membre droit :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(e^{2\pi} - 1)^2}{4\pi^2(1+n^2)} = \frac{(e^{2\pi} - 1)^2}{4\pi^2} \left[ 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \right]$$

En utilisant  $e^{4\pi} - 1 = (e^{2\pi} - 1)(e^{2\pi} + 1)$  et en égalisant les deux membres :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \coth(\pi) - 1}{2}$$

Somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$  – évaluation en  $x = \pi$  :

En  $x = \pi$  (point de continuité de  $f$ ), la série converge vers  $f(\pi) = e^\pi$ . Comme  $e^{jn\pi} = (-1)^n$  :

$$e^\pi = \frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} + \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1 + n^2} = \frac{\pi}{2 \sinh \pi} - \frac{1}{2}$$

## 1.4 Exercice 4 – Propriété de filtrage de la distribution de Dirac

### Application physique

La distribution de Dirac modélise l'impulsion idéale d'un photon gamma frappant un détecteur : un dépôt d'énergie instantané. Ces intégrales sont fondamentales pour calculer la réponse d'un système à une excitation impulsionnelle en spectrométrie.

### Propriété de filtrage de Dirac

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \delta(t - t_0) dt = \varphi(t_0)$$

**Méthode :** remplacer  $t$  par  $t_0$  dans la fonction  $\varphi(t)$  qui accompagne  $\delta$ .

$N^\circ$	Intégrale	Évaluation	Résultat
1°	$\int \delta(t - 4) \Gamma(t - 2) dt$	$\Gamma(4 - 2) = \Gamma(2) = 1$	1
2°	$\int e^{j2\pi f_0 t} \delta(t - t_0) dt$	évaluation en $t = t_0$	$e^{j2\pi f_0 t_0}$
3°	$\int \cos(s) \delta\left(s - \frac{\pi}{2}\right) ds$	$\cos(\pi/2) = 0$	0
4°	$\int \delta(k - 5) \cos\left(2\pi k + \frac{\pi}{4}\right) dk$	$\cos(10\pi + \pi/4) = \cos(\pi/4)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
5°	$\int \delta(t - 3) \Pi(t - 2) dt$	$\Pi(3 - 2) = \Pi(1) = 0$	0
6°	$\int \delta(t) \text{sinc}(t) dt$	$\text{sinc}(0) = 1$	1

#### Remarque : Détail du cas 5° – Pourquoi $\Pi(1) = 0$ ?

La porte  $\Pi(t)$  est définie par  $\Pi(t) = 1$  si  $|t| \leq 1/2$ , et 0 sinon.  
On évalue  $\Pi(t - 2)$  en  $t = 3$  :  $\Pi(3 - 2) = \Pi(1)$ . Comme  $|1| = 1 > 1/2$ , la porte vaut 0.

#### Remarque : Détail du cas 6° – Pourquoi $\text{sinc}(0) = 1$ ?

$\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$  pour  $t \neq 0$ , et  $\text{sinc}(0) = 1$  par définition (limite).

Vérification :  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi t)}{\pi t} = 1$  (développement  $\sin u \approx u$  au voisinage de 0).

### 1.5 Exercice 5 – Représentation triangulaire de l'impulsion de Dirac

$$x_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \left( 1 - \frac{|t|}{\tau} \right) \mathbf{1}_{|t| < \tau} \quad (\text{triangle de base } 2\tau, \text{ hauteur } 1/\tau)$$

#### Critères pour une suite approximante de $\delta(t)$

La suite  $(x_\tau)$  représente  $\delta(t)$  si :

1.  $\int x_\tau(t) dt = 1$  (intégrale unité, pour tout  $\tau > 0$ )
2.  $\lim_{\tau \rightarrow 0} x_\tau(t) = 0$  pour tout  $t \neq 0$
3.  $\int x_\tau(t) \varphi(t) dt \xrightarrow{\tau \rightarrow 0} \varphi(0)$  pour toute fonction test  $\varphi$  continue en 0

#### Propriété 1 – Intégrale unité :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_\tau(t) dt = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau \left( 1 - \frac{t}{\tau} \right) dt = \frac{2}{\tau} \left[ t - \frac{t^2}{2\tau} \right]_0^\tau = \frac{2}{\tau} \left( \tau - \frac{\tau}{2} \right) = \frac{2}{\tau} \cdot \frac{\tau}{2} = 1 \quad \checkmark$$

**Propriété 2 – Concentration :** Pour tout  $t \neq 0$  fixé, choisir  $\tau < |t|$  : alors  $t$  est hors du support  $[-\tau, \tau]$  de  $x_\tau$ , donc  $x_\tau(t) = 0$ . Par ailleurs  $x_\tau(0) = 1/\tau \rightarrow +\infty$  quand  $\tau \rightarrow 0$ .

**Propriété 3 – Filtrage :** Pour  $\varphi$  continue en 0 et  $\tau$  très petit,  $\varphi(t) \approx \varphi(0)$  sur  $[-\tau, \tau]$  :

$$\int_{-\tau}^\tau \frac{1}{\tau} \left( 1 - \frac{|t|}{\tau} \right) \varphi(t) dt \approx \varphi(0) \cdot \underbrace{\int_{-\tau}^\tau \frac{1}{\tau} \left( 1 - \frac{|t|}{\tau} \right) dt}_{=1} = \varphi(0) \quad \checkmark$$

$x_\tau(t)$  est une suite approximante triangulaire de  $\delta(t)$ .  $\checkmark$

## 1.6 Exercice 6 – Impulsion NaI(Tl) : Énergie, Autocorrélation, Coïncidences

### Application physique

$x(t) = A e^{-t/\tau_1} (1 - e^{-t/\tau_2}) \Gamma(t)$  avec  $\tau_1 = 250$  ns,  $\tau_2 = 50$  ns,  $A = 1$  mA.  
 $\tau_1$  : décroissance de scintillation.  $\tau_2$  : constante RC du photomultiplicateur.

### Question 1 – Énergie totale

On pose  $\alpha = 1/\tau_1$  et  $\beta = 1/\tau_1 + 1/\tau_2$ , d'où  $x(t) = A(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})\Gamma(t)$ .

$$E_x = A^2 \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})^2 dt = A^2 \int_0^{+\infty} (e^{-2\alpha t} - 2e^{-(\alpha+\beta)t} + e^{-2\beta t}) dt$$

En utilisant  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$  pour  $\lambda > 0$  :

$$E_x = A^2 \left[ \frac{1}{2\alpha} - \frac{2}{\alpha + \beta} + \frac{1}{2\beta} \right]$$

$$E_x = A^2 \left[ \frac{1}{2\alpha} - \frac{2}{\alpha + \beta} + \frac{1}{2\beta} \right] \approx 7,44 \times 10^{-14} \text{ J} \quad (\text{énergie finie}) \checkmark$$

### Question 2 – Autocorrélation $R_{xx}(\tau)$

Pour  $\tau \geq 0$  (et  $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$  par symétrie du signal réel) :

$$R_{xx}(\tau) = A^2 \left[ \frac{e^{-\alpha\tau}}{2\alpha} - \frac{e^{-\beta\tau} + e^{-\alpha\tau}}{\alpha + \beta} + \frac{e^{-\beta\tau}}{2\beta} \right]$$

### Remarque : Vérification à $\tau = 0$

$R_{xx}(0) = A^2 \left[ \frac{1}{2\alpha} - \frac{2}{\alpha + \beta} + \frac{1}{2\beta} \right] = E_x \approx 7,44 \times 10^{-14} \text{ J} \checkmark$   
 La propriété fondamentale  $R_{xx}(0) = E_x$  est bien vérifiée.

### Question 3 – Corrélation croisée avec $y(t) = x(t - t_0)$

Propriété générale : si  $y(t) = x(t - t_0)$ , alors  $R_{xy}(\tau) = R_{xx}(\tau - t_0)$ .

Maximum de  $R_{xy}$  atteint en  $\tau = t_0 = 100$  ns.

Le décalage indique le **retard temporel** entre les deux événements détectés : c'est le principe de la coïncidence temporelle en TEP (tomographie par émission de positons).  $\checkmark$

## 1.7 Exercice 7 – Spectre gamma $^{60}\text{Co}$ : NaI(Tl)

### Application physique

Le  $^{60}\text{Co}$  est une source d'étalonnage standard : raies à 1173 keV et 1332 keV.  
 $\sigma = 30$  keV : résolution en énergie du NaI(Tl) ( $\approx 5\%$  à 1332 keV).

$$f(t) = A_1 \exp\left[-\frac{(t - \mu_1)^2}{2\sigma^2}\right] + A_2 \exp\left[-\frac{(t - \mu_2)^2}{2\sigma^2}\right], \quad A_1 = 1, \quad A_2 = 0,85$$

### Question 1 – Énergie totale

Les deux gaussiennes sont très éloignées ( $|\mu_1 - \mu_2| = 159$  keV  $\gg \sigma = 30$  keV), donc  $f_1 \cdot f_2 \approx 0$ .

### Intégrale gaussienne fondamentale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A^2 e^{-(t-\mu)^2/\sigma^2} dt = A^2 \sigma \sqrt{\pi}$$

S'obtient par le changement de variable  $u = (t - \mu)/\sigma$  et l'intégrale de Gauss  $\int e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$ .

$$E_f \approx A_1^2 \sigma \sqrt{\pi} + A_2^2 \sigma \sqrt{\pi} = \sigma \sqrt{\pi} (1 + 0,7225) = 30 \sqrt{\pi} \cdot 1,7225 \approx 91,6 \text{ keV}$$

$E_f \approx 91,6$  keV – signal à énergie finie. ✓

### Question 3 – Autocorrélation et interprétation des pics

Position $\tau$	Hauteur	Interprétation
$\tau = 0$	$(A_1^2 + A_2^2) \sigma \sqrt{\pi}$	Somme des autocorrélations
$\tau = +159$ keV	$A_1 A_2 \sigma \sqrt{\pi}$	Corrélation $f_1$ vs $f_2$
$\tau = -159$ keV	$A_1 A_2 \sigma \sqrt{\pi}$	Corrélation $f_2$ vs $f_1$

### Remarque : Intérêt des pics latéraux

La position des pics latéraux ( $\tau = \pm 159$  keV) donne directement l'écart en énergie entre les deux raies. Méthode robuste pour identifier des raies dans un spectre bruité.

## 2 SÉRIE 2 – Représentation Fréquentielle, TF, SLI, Filtres Analogiques

### 2.1 Exercice 1 – Signal porte : TF, Énergie, Autocorrélation

#### Application physique

La porte rectangulaire modélise le fenêtrage temporel d'une mesure (durée  $T$  finie). En tomographie rayons X, c'est le temps d'acquisition d'une projection. L'analyse de sa TF explique pourquoi une acquisition courte dégrade la résolution spectrale.

#### Question 1 – Transformée de Fourier

$$X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} A e^{-j2\pi ft} dt = A \left[ \frac{e^{-j2\pi ft}}{-j2\pi f} \right]_{-T/2}^{T/2} = A \cdot \frac{e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}}{j2\pi f} = A \cdot \frac{2 \sin(\pi fT)}{2\pi f}$$

$$X(f) = AT \operatorname{sinc}(fT) = AT \cdot \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}$$

#### Remarque : Formule d'Euler utilisée

$$\sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}, \text{ donc } \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{j} = 2 \sin \theta. \text{ On factorise ensuite par } T.$$

#### Question 3 – Densité Spectrale d'Énergie

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2 = A^2 T^2 \operatorname{sinc}^2(fT)$$

#### Question 4 – Énergie totale par Parseval

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty} A^2 T^2 \operatorname{sinc}^2(fT) df = A^2 T^2 \cdot \frac{1}{T} = A^2 T \checkmark$$

#### Question 5 – Autocorrélation via la DSE

$$R_{xx}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{|X(f)|^2\} = A^2(T - |\tau|) \text{ pour } |\tau| < T, \quad R_{xx}(0) = A^2 T = E_x \checkmark$$

#### Question 6 – TF de $\operatorname{sinc}(t)$ par dualité

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sinc}(t)\} = \Pi(f) \quad (\text{porte rectangulaire de largeur 1})$$

La TF du sinus cardinal est une porte rectangulaire.

## 2.2 Exercice 2 – Exponentielle complexe, Cosinus, Fenêtrage, Gaussienne

### Application physique

Cet exercice illustre le compromis temps-fréquence :  $\Delta T \cdot \Delta f \geq 1$ . En spectrométrie nucléaire, on ne peut pas avoir simultanément une résolution temporelle et fréquentielle parfaites.

**Question 1** –  $\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 t}\} = \delta(f - f_0)$

**Question 2** –  $\mathcal{F}\{\cos(2\pi f_0 t)\} = \frac{1}{2}[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$

**Question 3** – Observation sur durée finie  $T_0$  : multiplication par  $\Pi_{T_0}(t)$  en temporel  $\equiv$  convolution par  $T_0 \text{sinc}(fT_0)$  en fréquentiel :

$$Y_{T_0}(f) = \frac{T_0}{2} [\text{sinc}((f - f_0)T_0) + \text{sinc}((f + f_0)T_0)]$$

### Remarque : Compromis temps-fréquence

$\Delta T \cdot \Delta f \geq 1$ . Pour résoudre deux raies séparées de  $\Delta f$ , il faut observer pendant au moins  $T_{\min} = 1/\Delta f$ .

Analogie quantique :  $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2$  (principe d'incertitude de Heisenberg).

**Question 6** – TF de la gaussienne :

$$\mathcal{F}\{e^{-\pi t^2}\} = e^{-\pi f^2}$$

La gaussienne est invariante par TF. Pas de lobes secondaires  $\Rightarrow$  fenêtre optimale (minimise  $\Delta T \cdot \Delta f$ ).

## 2.3 Exercice 6 – Filtre analogique 3<sup>e</sup> ordre : Simplification pôle-zéro

### Application physique

Ce filtre modélise un circuit de mise en forme (*shaping circuit*) en électronique nucléaire. La simplification pôle-zéro réduit l'ordre effectif du filtre.

### Question 1 – Fonction de transfert $H(s)$

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s - 15}{s^3 + 8s^2 + 17s + 10} = \frac{(s-3)(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+5)} = \frac{s-3}{(s+1)(s+2)}$$

### Attention : Simplification pôle-zéro

La simplification  $(s+5)/(s+5) = 1$  suppose que le pôle et le zéro sont **exactement** au même endroit.

En pratique (tolérances des composants), la simplification est imparfaite : le mode  $e^{-5t}$  reste présent mais non excitable.

### Question 3 – Réponse impulsionnelle $h(t)$

Décomposition en éléments simples :

$$H(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2}$$

$$A = [(s+1)H(s)]_{s=-1} = \frac{-1-3}{-1+2} = -4, \quad B = [(s+2)H(s)]_{s=-2} = \frac{-2-3}{-2+1} = +5$$

$$h(t) = (-4e^{-t} + 5e^{-2t})\Gamma(t)$$

Pôles :  $p_1 = -1, p_2 = -2$  (parties réelles négatives  $\Rightarrow$  filtre **stable** et **causal**).  $\checkmark$

### Question 4 – Sortie pour $x(t) = 4e^{-4t}\Gamma(t)$

$$Y(s) = H(s) \cdot \frac{4}{s+4} = \frac{4(s-3)}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

$$y(t) = \left( -\frac{16}{3}e^{-t} + 10e^{-2t} - \frac{14}{3}e^{-4t} \right) \Gamma(t)$$

## 2.4 Exercice 9 – Détecteur HPGe : Réponse impulsionnelle et TF

### Application physique

HPGe (germanium hyperpure) : résolution  $\approx 0.2\%$  à 1332 keV.

$h(t) = \frac{1}{\tau_c} e^{-t/\tau_c} \Gamma(t)$ ,  $\tau_c = 2 \mu\text{s}$ . Entrée :  $x(t) = Q_0 \delta(t)$ ,  $Q_0 = 1,6 \times 10^{-14} \text{ C}$ .

**Question 1 :**

$$y(t) = Q_0 \delta(t) * h(t) = \frac{Q_0}{\tau_c} e^{-t/\tau_c} \Gamma(t)$$

**Question 2 :**

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f\tau_c} \quad (\text{filtre passe-bas du 1}^{\text{er}} \text{ ordre}), \quad f_c = \frac{1}{2\pi\tau_c} \approx 79,6 \text{ kHz}$$