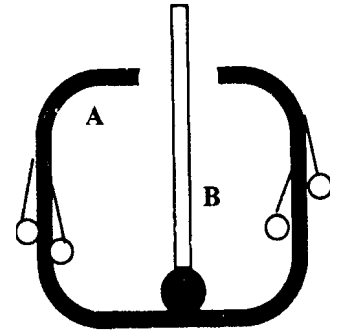


Conducteurs

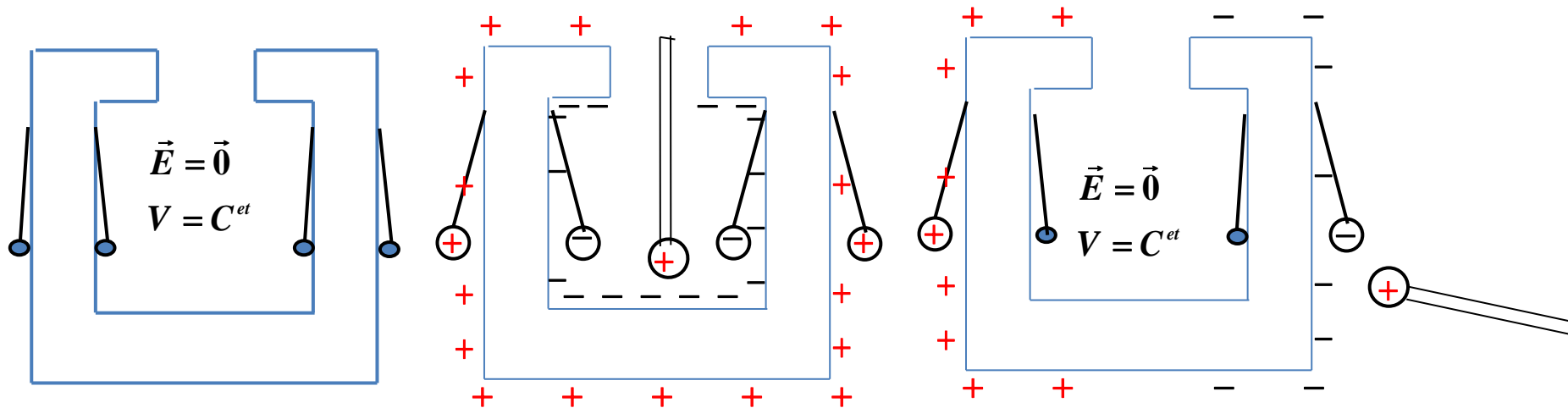
Exercice: 1

Des petits pendules métalliques sont fixés aux parois intérieure et extérieure d'un conducteur A creux, initialement neutre. Un deuxième conducteur B, chargé, est introduit dans A en le tenant par un manche isolant et on réalise le contact.



Représentez, qualitativement, les positions prises par les pendules avant et pendant le contact.

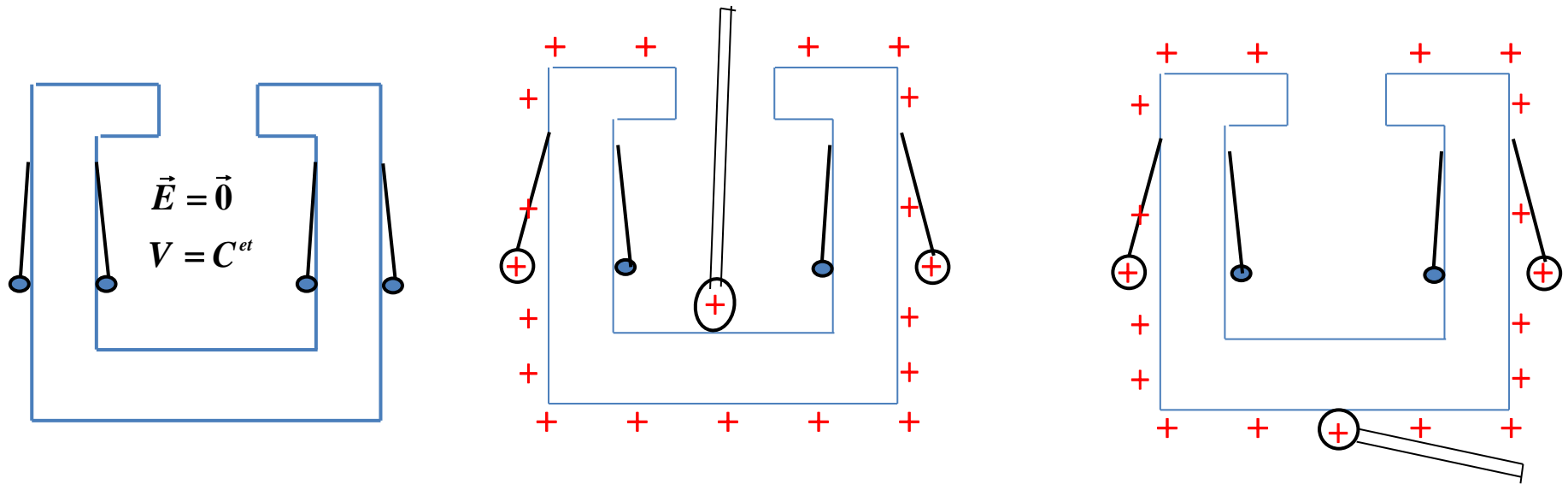
positions prises par les pendules avant le contact.



Si on rapproche le conducteur B du conducteur A, sans contact, il y a influence.

Après contact sur la paroi externe ou interne.

A et B constituent un seul conducteur creux isolé. Les charges se répartissent sur la paroi externe et sur les pendules externe.



Les pendules s'écarteront de la paroi externe par répulsion de leurs charges de même signe que celle de la paroi. Les pendules internes non chargés restent en contact avec la paroi interne qui est neutre. La démonstration se fait en choisissant une surface de GAUSS à l'intérieur du conducteur A où le champ est nul. Le flux de ce dernier à travers cette surface et la charge de celle-ci sont par conséquent nuls.

Exercice: 2

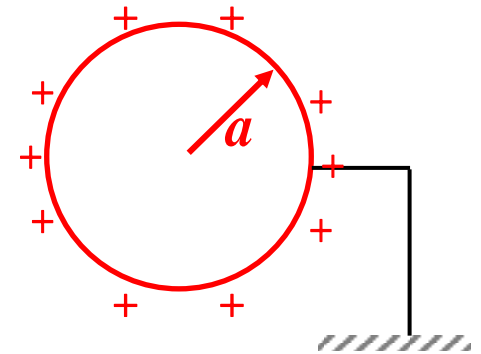
Soit une sphère conductrice, de rayon a , portant une charge Q .

1) Calculer son énergie interne.

$$\left. \begin{array}{l} V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \\ Q = CV \end{array} \right\} C = 4\pi\epsilon_0 a \quad \text{Pour } r=a: \quad E_P = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV$$

$$E_P(r=a) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{a}$$

2) On décharge cette sphère en la reliant à la terre par un fil conducteur. Que devient l'énergie préalablement emmagasinée?



Si on relie la sphère à la terre, les charges vont quitter la sphère pour se neutraliser à la terre, $V=0$ donc $E_P=0$.

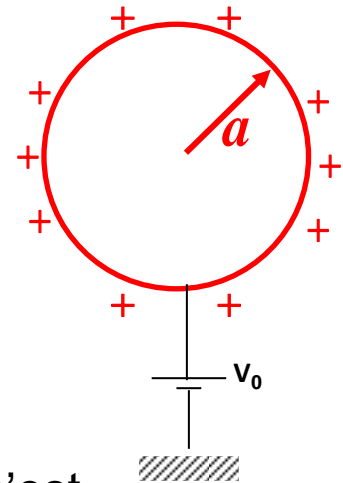
L'énergie emmagasinée s'est dissipée dans le sol (sous forme d'effet joule).

Cette sphère avait été chargée à l'aide d'un générateur de f.e.m. constante V_0

Quelle est l'énergie fournie par le générateur?

La retrouve-t-on sous forme d'énergie potentielle? Expliquer.

$$W_{\text{gén}} = QV$$



L'énergie emmagasinée par la sphère est $QV/2$, et l'autre moitié s'est dissipée dans le fil (sous forme d'effet joule).

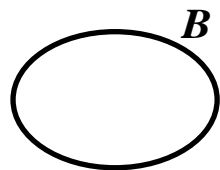
Exercice: 3

Soit une sphère conductrice A portée à un potentiel constant par rapport au sol, par l'intermédiaire d'un générateur.

1) Que doit-on supposer pour admettre que la charge est uniformément répartie sur la sphère? Représenter qualitativement la répartition de la charge.

Pour admettre que la charge est uniformément répartie sur la sphère, il faut supposer qu'elle est parfaitement lisse et isolée de l'extérieur.

2) On approche de A un conducteur B neutre et isolé. Décrire de façon qualitative ce qui se passe sur les conducteurs A, B et dans le générateur pendant le rapprochement.



$$E_A = 0$$

Pas d'influence

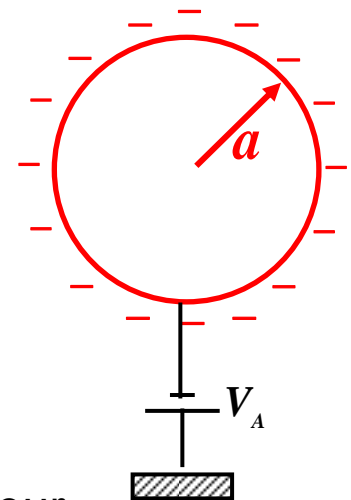
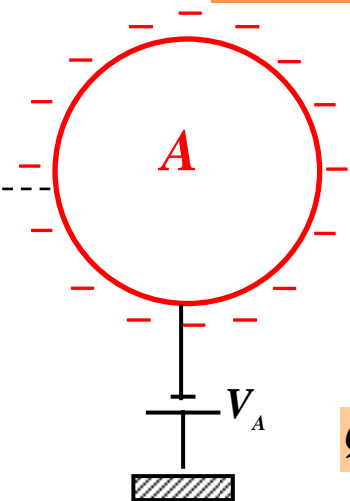
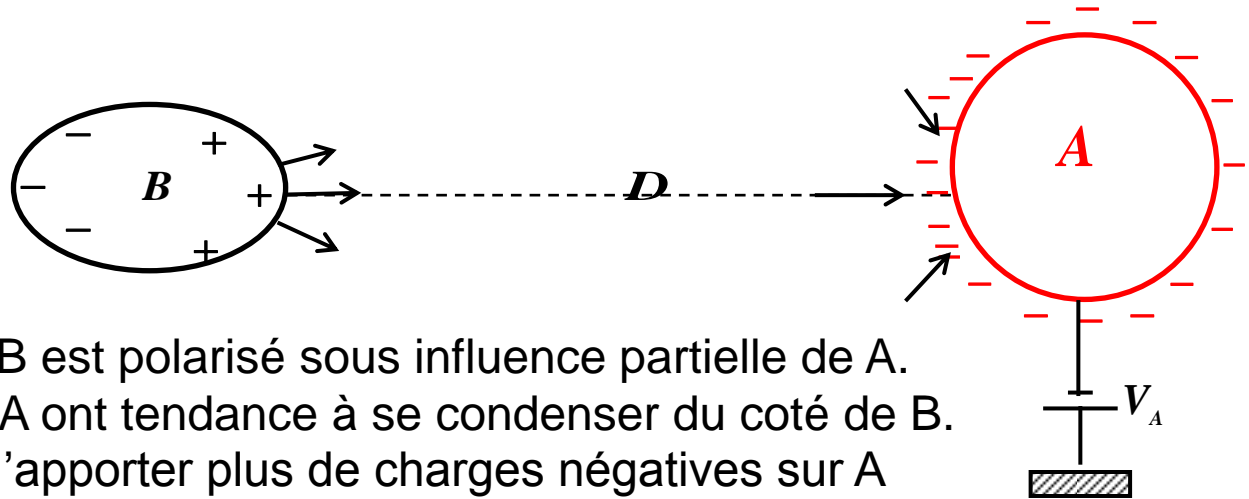


figure a



$$Q_A = Q_1$$

figure b



Le conducteur conducteur B est polarisé sous influence partielle de A.
 Les charges négatives sur A ont tendance à se condenser du côté de B.
 Le rôle du générateur est d'apporter plus de charges négatives sur A
 Les lignes de champ quittant B vers A

$$Q_A = Q_2 > Q_1$$

2°) Les deux conducteurs étant immobiles et distants l'un de l'autre d'une longueur d, on relie B à la terre au moyen d'un fil conducteur.

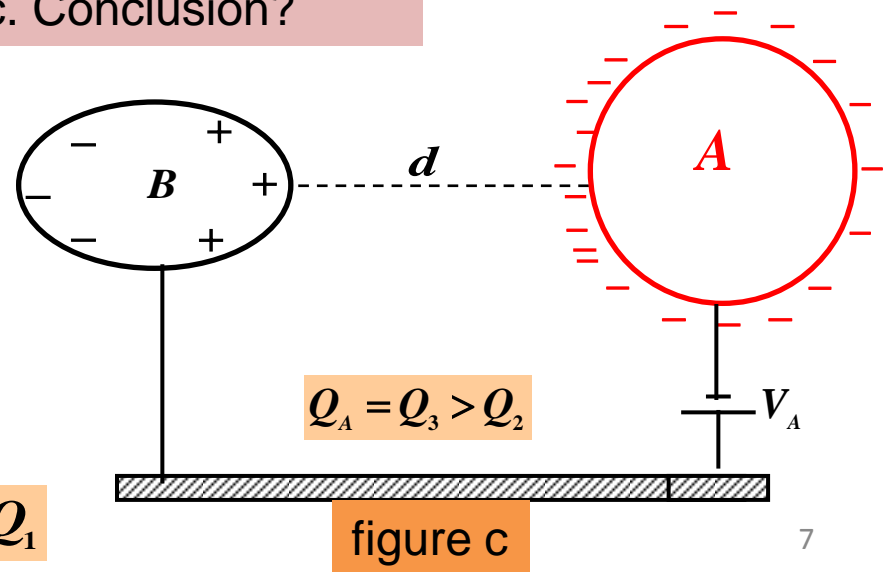
Décrire qualitativement ce qui se passe. Comparer les charges portées par A dans les cas de figures a, b et c. Conclusion?

Les charges négatives de B s'écoulent dans la terre, il ne reste que les charges positives maintenues par influence partielle.

Au fur et à mesure que B se rapproche de A, les charges sur A augmentent.

$$V_A = C^{te} \text{ et } C = Q/V_A : Q \nearrow \Rightarrow C \nearrow$$

$$Q_3 > Q_2 > Q_1$$



$$Q_A = Q_3 > Q_2$$

3°) On se propose maintenant de reprendre le problème précédent dans un cas particulier qui permet l'évaluation des charges et donc, une conclusion quantitative.

- A est une sphère conductrice de rayon R_1 , portée au potentiel V .

- B est une sphère creuse, de rayons intérieur R_2 et extérieur R_3 , concentrique à la sphère A.

On donne: $V = 1000 \text{ V}$; $R_1 = 10\text{cm}$; $R_2 = 11 \text{ cm}$ et $R_3 = 20\text{cm}$.

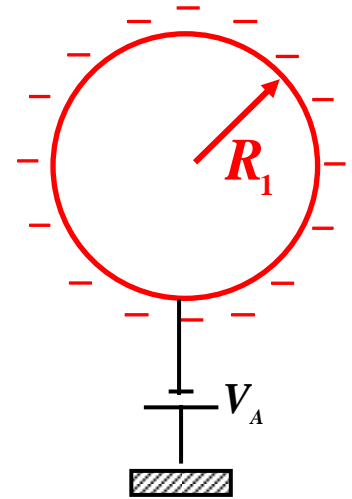


figure d

$$Q_0 = 4\pi\epsilon_0 R_1 V_A$$

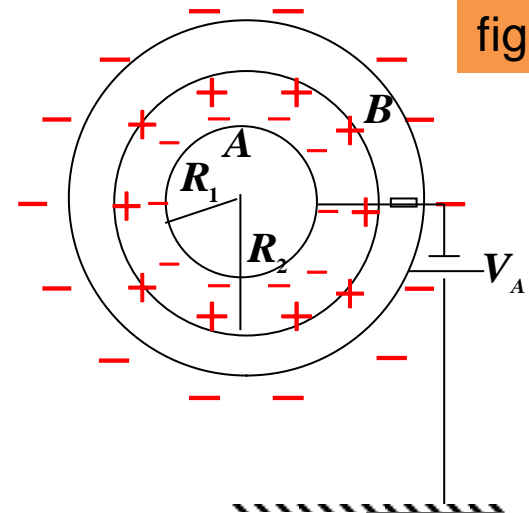


figure e

a) Calculer la charge Q_0 de A dans le cas de la figure d.

b) Calculer la charge Q_1 de A dans le cas de la figure e et déterminer, en fonction de Q_1 , les charges Q_2 et Q_3 portées par les deux faces de B

b)-Exprimer, toujours en fonction de Q_1 , les champs électriques \vec{E}_e et \vec{E}_i créés dans les régions: $r > R_3$, et $R_1 < r < R_2$, respectivement en faisant circuler \vec{E}_e et \vec{E}_i entre les bornes où ils sont définis, en déduire Q_1

$R_1 < r < R_2$: E_i ? et V ?

Théorème de GAUSS: $\phi_{S_g} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{Q_1}{\epsilon_0} = E 4\pi r^2 \Rightarrow E_i = \frac{Q_1}{4\pi r^2 \epsilon_0}$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dr \Rightarrow \int_{V_A}^{V_B} dV = - \int_{R_1}^{R_2} E_i dr \Rightarrow V_B - V_A = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right)_{R_1}^{R_2}$$

$$V_B - V_A = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$R_3 < r < \infty$: E_i ? et V ?

Théorème de GAUSS: $\phi_{s_g} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{Q_1}{\epsilon_0} = E 4\pi r^2 \Rightarrow E_e = \frac{Q_1}{4\pi r^2 \epsilon_0}$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dr \Rightarrow V_\infty - V_B = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right)_{R_3}^\infty \Rightarrow V_B = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$V_B = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_3}$$

$$V_B - V_A = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$\Rightarrow V_A = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} \right)$$

\Downarrow

$$Q_1 = \frac{V_A 4\pi\epsilon_0}{\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}}$$

$$Q_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 V_A}{1 - \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}} \Rightarrow$$

$$Q_1 = \frac{Q_0}{1 - \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_3}} = -1,88 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

c) Calculer la charge Q'_1 portée par A dans le cas où B est relié au sol par un fil conducteur (utiliser la même méthode), figure f.

$$V_B = 0$$

$$V_B - V_A = \frac{Q'_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

$$Q'_1 = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 V_A}{1 - \frac{R_1}{R_2}} = \frac{Q_0}{1 - \frac{R_1}{R_2}}$$

$$Q'_1 = \frac{Q_0}{1 - \frac{R_1}{R_2}} = -12,2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

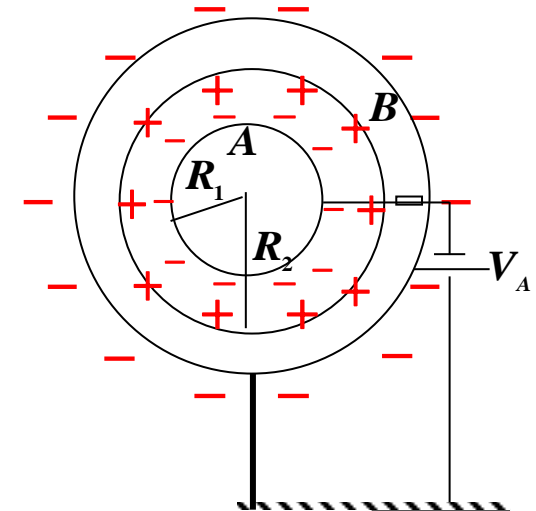


figure f

$$Q'_1 > Q_1 > Q_0$$

Pour augmenter Q'_1 , il faut jouer sur la distance qui sépare les deux conducteurs. Si R_1 et V_A restent les mêmes, **il faut diminuer R_2 .**

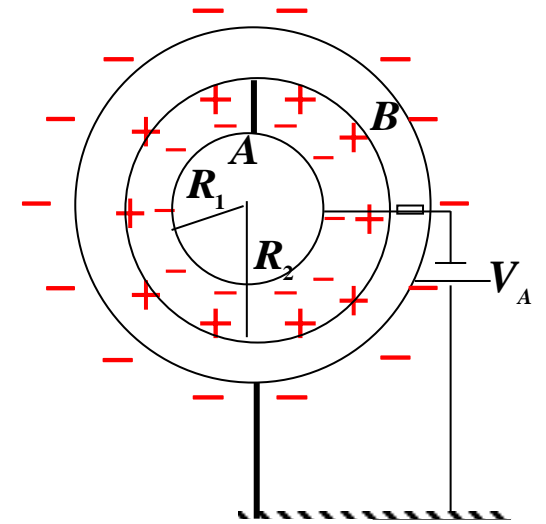
e) Décrivez qualitativement ce qui se passerait, si, à partir du cas précédant, on reliait A et B par un fil conducteur. Quelle charge circulerait dans chacun des cas? Faire le calcul numérique des charges et des potentiels finaux de A et B, de même que les énergies libérées dans chacun des cas?

on relie A et B par un fil conducteur.

A et B forment un conducteur au potentiel V_A

$$V_A = \frac{Q''}{4\pi\epsilon_0 R_3} \Rightarrow Q'' = 4\pi\epsilon_0 R_3 V_A = \frac{Q_0}{R_1/R_3}$$

$$E_{P_i} = \frac{1}{2} Q' V_A = 6,110^{-5} J \quad E_{P_f} = 0 J$$



L'énergie qui s'est emmagasinée dans le condensateur est dissipée par effet joule.

Exercice: 4

Une sphère A, reliée au sol, est placée au centre d'une coquille sphérique B portée à un potentiel V_B par rapport au sol.

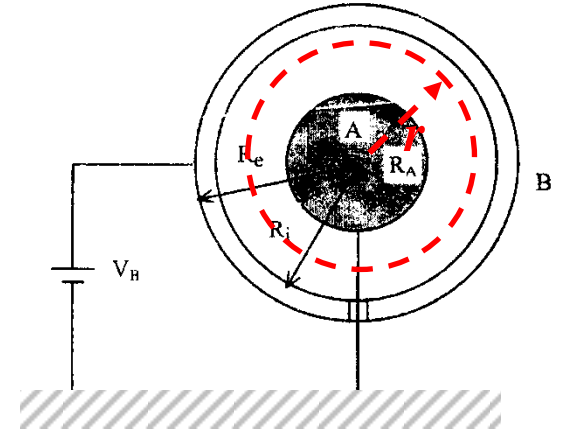
1°) Donner les expressions du champ et du potentiel électriques:

On choisie une surface de GAUSS sphérique (Sg)

$$\phi_{S_g} = \int \vec{E} \cdot \vec{dS} = E 4\pi r^2$$

a) dans la région comprise entre les deux sphères ($R_A < r < R_i$);

$$\frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_A}{\epsilon_0}$$



Théorème de GAUSS: $\phi_{S_g} = \frac{Q_A}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{Q_A}{\epsilon_0} = E 4\pi r^2 \Rightarrow E_i = \frac{Q_A}{4\pi r^2 \epsilon_0}$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dr \Rightarrow \int_{V_A}^{V(r)} dV = - \int_{R_A}^r E_i dr \Rightarrow V(r) - V_A = \frac{Q_A}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right)_{R_A}^r$$

$$V(r) = \frac{Q_A}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_A} \right)$$

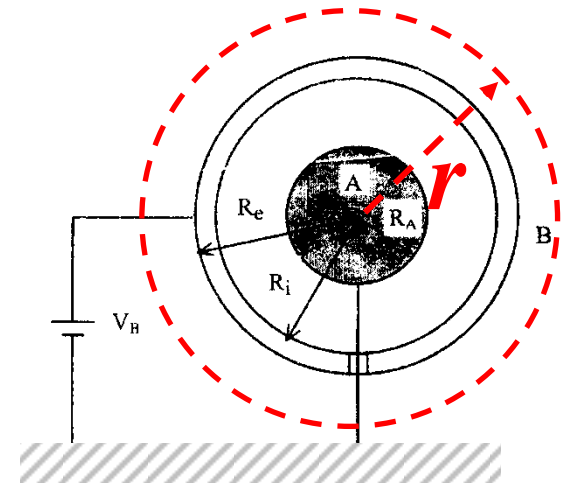
b) à l'extérieur de B ($r > R_e$).

$$\phi_{S_g} = \int \vec{E} \cdot \vec{dS} = E 4\pi r^2$$

Théorème de GAUSS: $\phi_{S_g} = \frac{Q_{B_e}}{\epsilon_0}$

$$\frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_{B_e}}{\epsilon_0}$$

$$\frac{Q_{B_e}}{\epsilon_0} = E 4\pi r^2 \Rightarrow E_e = \frac{Q_{B_e}}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$



$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dr \Rightarrow \int_{V_{R_e}}^{V(r)} dV = - \int_{R_e}^r E_e dr \Rightarrow V(r) - V_{R_e} = \frac{Q_{B_e}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right)_{R_e}^r$$

⇓

$$V(r) = \frac{Q_{B_e}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\Leftrightarrow V(r) - V_{R_e} = \frac{Q_{B_e}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - \frac{Q_{B_e}}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_e}$$

2°) Trouver les expressions des charges portées par les surfaces intérieure et extérieure de la sphère B.

Influence totale $\Rightarrow Q_{B_i} = -Q_A$

Pour $r=R_i$: $\Rightarrow V(R_i) = V_B = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_A} \right) \Rightarrow Q_A = V_B 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_i R_A}{R_A - R_i} \right)$

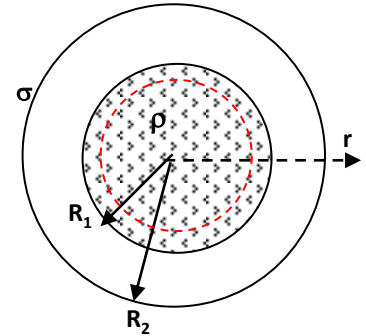
$$Q_{B_i} = -V_B 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{R_i R_A}{R_A - R_i} \right)$$

Pour $r=R_e$: $\Rightarrow V(R_e) = V_B = \frac{Q_{B_e}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_e} \right) \Rightarrow Q_{B_e} = V_B R_e 4\pi\epsilon_0$

Exercice: 5

On considère deux sphères concentriques de même centre O et de rayons respectifs R_1 et $R_2 = \sqrt{2.5} R_1$ telles que:

- La sphère interne (O, R_1) porte une densité de charges volumique $\rho = \frac{2,5}{r} (C/m^3)$
- La sphère externe (O, R_2) porte une densité de charge surfacique $\sigma = -0. C/m^2$.



1-Calculer les charges totales portées par chaque sphère.

$$Q_1 = \int_0^{R_1} \rho dv = 5\pi R_1^2 C;$$

$$Q_2 = \sigma 4\pi R_2^2 = -5\pi R_1^2 C;$$

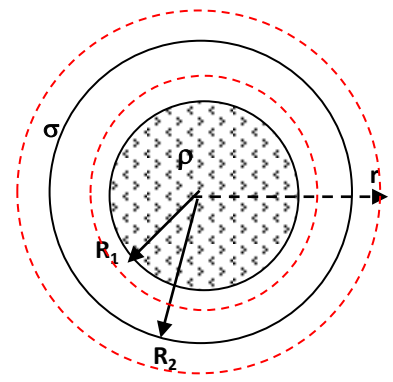
2-Déterminer le champ électrique en tout point de l'espace ($0 < r < \infty$).

On choisie une surface de GAUSS sphérique (S_g) $\phi_{S_g} = \int \vec{E} \cdot \vec{dS} = E 4\pi r^2$

$$\text{pour } r > R_2 : \sum q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$$

pour $R_1 < r < R_2$: $\sum q_{\text{int}} = Q_1 \Rightarrow \phi_{s_g} = \frac{Q_1}{\epsilon_0}$

$$E = k \frac{Q_1}{r^2} = \frac{5R_1^2}{4\epsilon_0 r^2}$$



pour $R_1 < r$: $\sum q_{\text{int}} = \int_0^r \rho dv = 5\pi r^2 \Rightarrow \phi_{s_g} = \frac{5\pi r^2}{\epsilon_0}$ ↘

$$E = \frac{5}{4\epsilon_0}$$

3-Déduire le potentiel électrique en tout point de l'espace.

pour $r > R_2$: $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dr = 0 \Rightarrow V = C^{te}$

pour $R_1 < r < R_2$: $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dr \Rightarrow V(r) = \frac{5R_1^2}{4\epsilon_0 r} + C^{te}$

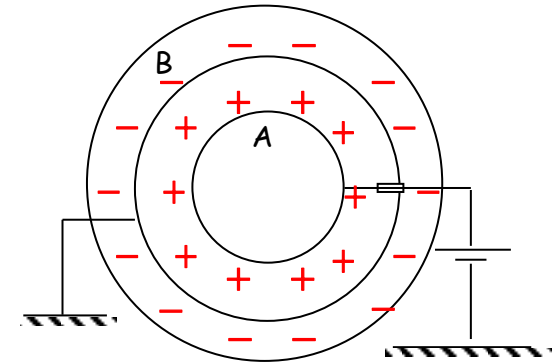
pour $R_1 < r$: $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dr \Rightarrow V(r) = -\frac{5}{4\epsilon_0} r + C^{te}$

Exercice: 6

La figure ci-dessous représente un condensateur sphérique formé de deux conducteurs A (de rayon R_1) et B (de rayons R_2 et R_3) séparés par un milieu isolant de permittivité ϵ et résistivité ρ .

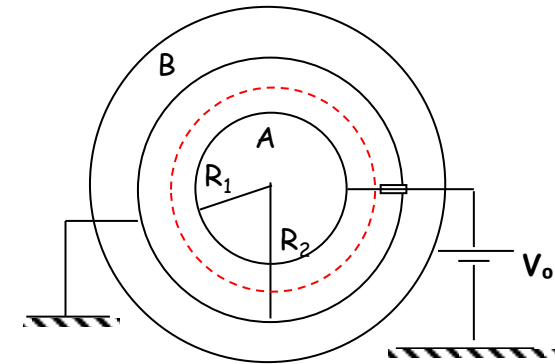
1. Représenter la répartition de charge sur les conducteurs A et B.

2. Déterminer le champ électrique à l'intérieur du condensateur ($R_1 \leq r \leq R_2$)



On choisie une surface de GAUSS sphérique (Sg) $\phi_{S_g} = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2$

$$\frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_A}{\epsilon_0}$$



Théorème de GAUSS: $\phi_{S_g} = \frac{Q_A}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{Q_A}{\epsilon_0} = E 4\pi r^2 \Rightarrow E = \frac{Q_A}{4\pi r^2 \epsilon_0}$

3. Trouver l'expression de la différence de potentielle entre les deux conducteurs.

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dr \Rightarrow \int_{V_{R_1}}^{V_{R_2}} dV = - \int_{R_1}^{R_2} E dr \Rightarrow -V = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right)_{R_1}^{R_2}$$

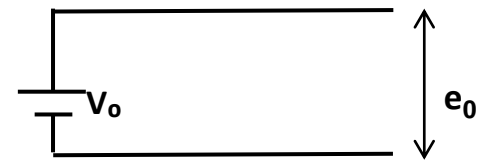
$$V = -\frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = \frac{Q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$



4. Déduire la capacité de ce condensateur.

$$C = \frac{Q_A}{V} \Rightarrow C = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

Exercice: 7



On considère un condensateur idéal, constitué de deux conducteurs plans, de surfaces S et distants de e_0 . On applique une d.d.p. V_0 entre ses armatures.

1°) Calculer:

-a- la charge Q du condensateur;

$$Q = C_0 V_0 \quad \text{Avec: } C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e_0} \quad \text{Rappel: } V_0 = E e_0 \text{ et } E = \sigma / \epsilon_0 = Q / S \epsilon_0 \Rightarrow Q = \frac{S \epsilon_0}{e_0} V_0$$

-b- l'énergie potentielle emmagasinée;

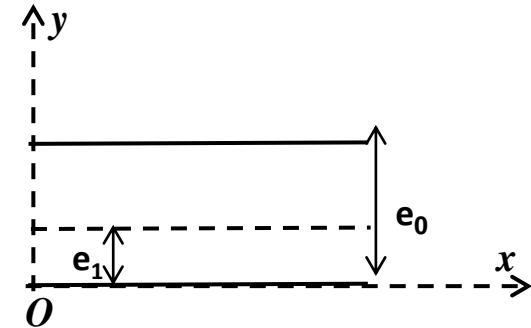
C'est l'énergie interne:

$$U = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0}$$

-c- la force agissant sur chacune des armatures.

$$F = Q E_m \text{ avec } E_m = \sigma / 2 \epsilon_0 = Q / 2 \epsilon_0 S \Rightarrow F = \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 S} = \frac{\epsilon_0 S}{2 e_0^2} V_0^2$$

2°) On isole le condensateur de la source. Une des armatures étant fixe, on approche l'autre jusqu'à e_1 ($e_0 > e_1$).



Expliquer, qualitativement, les phénomènes qui se produisent au cours de ce déplacement (transport de charge, variation de potentiel, de capacité,.....)

On isole le condensateur de la source V devient variable

La charge sur chaque armature (isolée électriquement) est conservée.

Un opérateur déplace l'armature.

$$Q = \frac{S \epsilon_0}{e_0} V_0 \quad C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e_0}$$

$$U = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0}$$

$$F = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e_0^2} V_0^2$$

$$e \searrow; \quad C \nearrow; \quad Q = C^{te}; \quad V \searrow; \quad U \searrow \text{ et } F = C^{te}$$

Le condensateur cède de l'énergie car $\Delta U < 0$

Montrer, à travers un bilan précis, que le principe de conservation de l'énergie est vérifié.

$$W_{\vec{F}_{opp}} = \int_{e_0}^{e_1} F dy \Rightarrow W_{\vec{F}_{opp}} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} (e_1 - e_0) = U_f - U_i = \Delta U < 0$$

L'énergie cédée par condensateur est récupérée par l'opérateur.

D'où le bilan d'énergie:

$$\left| W_{\vec{F}_{opp}} \right| + U_f = U_i$$

3°) On réalise maintenant le même déplacement tout en gardant le générateur branché au condensateur.

$$Q = \frac{S\epsilon_0}{e_0} V_0$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e_0}$$

$$U = \frac{1}{2} Q V_0 = \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0}$$

$$F = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e_0^2} V_0^2$$

$$e \searrow; \quad C \nearrow; \quad V = C^{te}; \quad Q \nearrow; \quad |F| \nearrow \text{ et } U \nearrow$$

$$\Delta U = (U_f - U_i) = \frac{1}{2} C_1 V_0^2 - \frac{1}{2} C_0 V_0^2 = \frac{1}{2} V_0^2 (C_1 - C_0) = \frac{(V_0^2 S \epsilon_0)}{2} \left(\frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_0} \right)$$

$$W_{\vec{F}_{opp}} = \int_{e_0}^{e_1} F dy = \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2} \int_{e_0}^{e_1} \frac{dy}{y^2} = \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2} \left(\frac{1}{e_0} - \frac{1}{e_1} \right) = -\Delta U$$

$$W_{gén} = V \Delta Q = V (Q_1 - Q_0) = V_0^2 (C_1 - C_0) = (V_0^2 S \epsilon_0) \left(\frac{1}{e_1} - \frac{1}{e_0} \right) = 2\Delta U$$

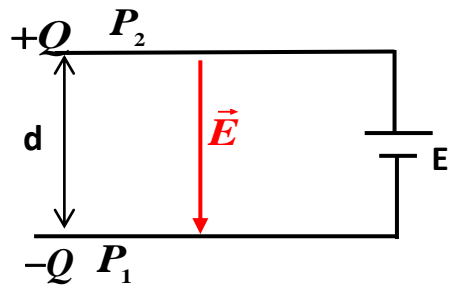
$$W_{gén} + W_{op} = \Delta U (cond)$$

Exercice: 8

Soit un condensateur plan idéal formé par deux armatures (P_1) et (P_2) conductrices de surfaces $S = 226\text{cm}^2$ et séparées par du vide d'épaisseur $d = 0.3\text{mm}$.

1°) Le condensateur est branché à un générateur de f.e.m $V_0 = V_2 - V_1 = 120\text{V}$.

a) Retrouver l'expression de la capacité du condensateur et la calculer.



$$\left. \begin{aligned} *E &= \sigma / \epsilon_0 \\ *V_2 - V_1 &= Ed = \sigma Sd / \epsilon_0 S \\ *C_0 &= Q / V_2 - V_1 = \epsilon_0 S / d \end{aligned} \right\} \Rightarrow C_0 = \epsilon_0 S / d = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 226 \cdot 10^{-4}}{3 \cdot 10^{-4}} = 6,66 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

b) Calculer la charge portée par chaque armature ainsi que l'énergie emmagasinée.

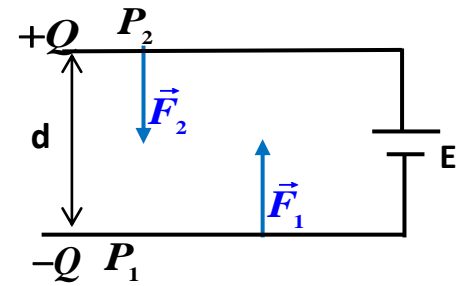
$$Q_0 = C_0 (V_2 - V_1) = 6,66 \cdot 10^{-10} \cdot 120 = 7,99 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

$$W_0 = \frac{1}{2} Q_0 (V_2 - V_1) = \frac{1}{2} \cdot 7,99 \cdot 10^{-8} \cdot 120 = 4,79 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

c) Déterminer les forces qui s'exercent sur les armatures.

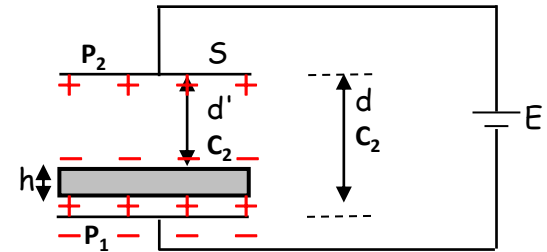
Pression électrostatique: $p = \sigma^2 / 2\epsilon_0 \quad p = \frac{F}{S} = \sigma^2 / 2\epsilon_0 \Rightarrow F_1 = F_2 = pS = \sigma^2 S / 2\epsilon_0$

$$\left. \begin{aligned} F_1 = F_2 = Q\mathbf{E} &= (\sigma S)(\sigma/2\epsilon_0) = \sigma^2 S/2\epsilon_0 \\ F_1 = F_2 &= \frac{(7,99)^2 10^{-16} \times 226 10^{-6}}{2 \times 8,85 10^{-12}} = 8,15 10^{-8} N \end{aligned} \right\}$$



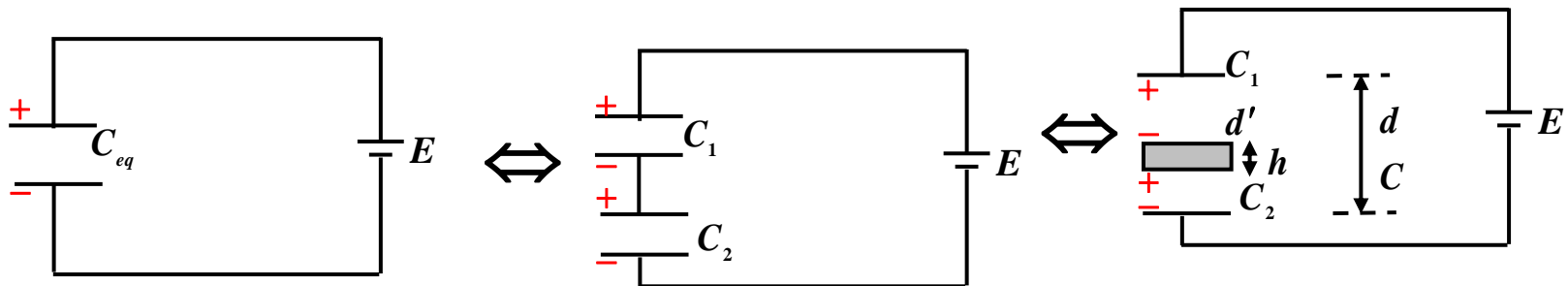
2°) On introduit parallèlement entre les armatures une plaque conductrice (L), neutre, de même dimensions et d'épaisseur h. Le générateur étant branché:

a-Expliquer qualitativement ce qui se passe et représenter la nouvelle répartition des charges.



Il y a influence totale entre les plaques conductrices:

b-Donner l'expression de la capacité équivalente du système.



$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d'}{\epsilon_0 S} + \frac{d - d' - h}{\epsilon_0 S} = \frac{d - h}{\epsilon_0 S} \Rightarrow C_{eq} = \frac{\epsilon_0 S}{d - h}$$

Quelle est l'épaisseur h de la plaque si la capacité équivalente vaut 1 nF?

$$C_{eq} = \frac{\epsilon_0 S}{d - h} \Rightarrow C_{eq} (d - h) = \epsilon_0 S \Rightarrow (d - h) = \frac{\epsilon_0 S}{C_{eq}} \text{ d'où } h = d - \frac{\epsilon_0 S}{C_{eq}}$$

$$h = d - \frac{\epsilon_0 S}{C_{eq}} = 3 \cdot 10^{-4} - \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \times 226 \cdot 10^{-4}}{10^{-9}} = 10^{-4} \text{ m} = 0,1 \text{ mm}$$

Exercice: 9

I- Un conducteur de forme quelconque homogène, en équilibre électrostatique, porte une charge Q .

1) Que vaut le champ électrique à l'intérieur de ce conducteur ?

Le champ électrique est nul à l'intérieur du conducteur en équilibre.

2) Que vaut le potentiel électrique à l'intérieur de ce conducteur ?

$$dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0 \quad \Rightarrow \quad V = C^{te}$$

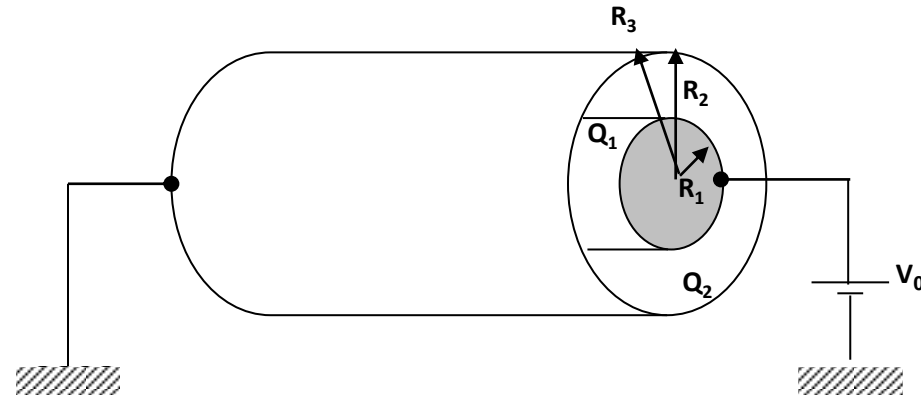
Le conducteur en équilibre constitue un volume équipotentiel.

Comme le potentiel est le même en tous les points du conducteur, la surface externe est une surface équipotentielle: on retrouve bien que **le champ est normal à la surface.**

3) Où est située la charge Q ?

La charge est nulle en toute région interne au conducteur. La charge est localisée à la surface.

II- Nous disposons maintenant d'un câble coaxial, cylindrique, constitué de deux cylindres conducteurs infiniment longs, séparés par le vide. Le premier est plein de rayon R_1 , de potentiel V_0 et porte une densité de charge. Le second est creux d'épaisseur négligeable, de rayon interne R_2 et R_3 externe relié au sol (voir figure).



1) Quel est le signe de Q_1 ?

Q_1 est positive

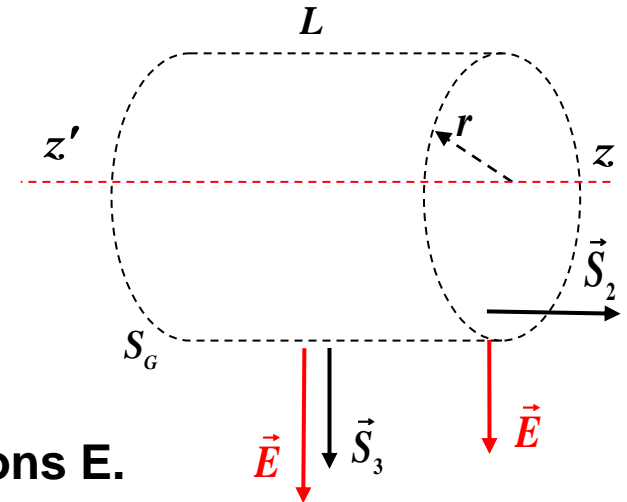
2) L'ensemble étant à l'équilibre, quelle est la charge Q_2 de la face interne du cylindre?

Il y a influence totale donc $Q_2 = -Q_1$

3) Déterminer, à l'aide du théorème de Gauss, la direction, et le module du champ électrique entre les deux conducteurs ($R_1 < r < R_2$).

Soit $z'z$ l'axe de révolution du cylindre. A cause de la symétrie le champ électrique est perpendiculaire a cet axe (radial et son module est constant sur tout cylindre coaxial). Par conséquent, la surface de GAUSS sera choisie comme un cylindre de rayon r et de longueur L . Le champ étant perpendiculaire au vecteurs surface des deux bases, donc le flux à travers ces surfaces est nul.

$$S_G = 2\pi rL \quad \phi_{S_g} = \iint_{S_g} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dS} = E 2\pi rL$$



Entre les deux conducteurs ($R_1 < r < R_2$) nous avons E .

$$\frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \quad \phi_{S_g} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{Q_1}{\epsilon_0} = E 2\pi rL \Rightarrow E(r) = \frac{Q_1}{2\pi rL\epsilon_0}$$

4) a- En utilisant la circulation du champ électrique $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$ donner l'expression de la charge Q_1 pour une longueur L finie.

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E dr \quad \Rightarrow \quad -\int_{V_{R_1}}^{V_{R_2}} dV = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 L} \frac{dr}{r}$$

$$Q_1 = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2 / R_1)} V_0 \quad \Leftarrow \quad V_0 = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 L} \ln(R_2 / R_1) \quad \Leftarrow \quad -(V_{R_2} - V_{R_1}) = \frac{Q_1}{2\pi\epsilon_0 L} (\ln(r))_{R_1}^{R_2}$$

4) b- Déduire l'expression de la capacité du câble coaxial. $R_1 = 1 \text{ mm}$, $R_2 = 3 \text{ mm}$, $\ln 3 = 1.1$

Comme: $Q_1 = CV_0$ donc:

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2 / R_1)} = \frac{L}{2k \ln(R_2 / R_1)}$$

4) c- Calculer cette capacité par unité de longueur.

$$C_L = \frac{C}{L} = \frac{1}{2 \times 9 \times 10^9 \times \ln 3} = 50 \text{ pF / m}$$

5) En appliquant l'expression locale de la loi d'OHM ($\vec{j} = \sigma \vec{E}$) donner l'expression de la résistance du câble.

$$j = \gamma E = \frac{I}{S} = \frac{I}{2\pi r L} \Rightarrow E = \frac{I}{2\pi r L \sigma}$$

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow -\int_{V_{R_1}}^{V_{R_2}} dV = \int_{R_1}^{R_2} E dr \Rightarrow V_0 = \frac{I}{2\pi \gamma L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = RI$$

$$R = \frac{1}{2\pi \gamma L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

On obtient:

$$RC = \frac{\epsilon_0}{\gamma} = \rho \epsilon_0$$