

Conduction

Exercice: 1

A) Déplacement des électrons dans le vide: Dans un tube à vide se trouve deux plaques parallèles A et B, soumises à une différence de potentiel positif $V_A - V_B = V_0$. On considère que les électrons quittent la plaque B par effet thermoélectrique avec une vitesse supposée nulle.

1) Quelle est la nature du mouvement des électrons.

$$\left. \begin{array}{l} dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow E = \frac{V_0}{L} = cst \\ \vec{F} = -e\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{e}{m}\vec{E} = cst \\ W = \Delta E_c = -\Delta E_p = e\Delta V > 0 \Rightarrow \Delta E_c \nearrow \end{array} \right\} \Rightarrow \text{L'électron décrit donc un mouvement rectiligne uniformément accéléré}$$

2) Donner l'énergie cinétique des électrons lorsqu'ils atteignent A.

$$E_{TA} = E_{TB} = E_{CA} + qV_A = E_{CB} + qV_B \Rightarrow E_{CA} = q(V_B - V_A) = -e(V_B - V_A) = eV_0$$

B)Déplacement des électrons dans un milieu conducteur : Lois d'Ohm et de Joule

l) On considère un conducteur homogène de forme cylindrique et de section S. soumet les deux extrémités A et B du cylindre à une d.d.p. V_0 . On constate que le conducteur est traversé par un courant électrique d'intensité I donnée par: $I = \frac{V_0}{R}$ où R est une constante caractéristique du conducteur appelée résistance.

1) Représenter les lignes de courant et montrer que le vecteur densité de courant \vec{j} est constant

Une ligne de courant d'une charge positive est dirigée du potentiel le plus élevé vers le plus bas. L'homogénéité du cylindre implique que ces lignes parallèles à l'axe du cylindre.

2)Etablir la relation qui lie le vecteur densité de courant \vec{j} au vecteur champ \vec{E} .

La loi d'OHM $V=RI$ peut s'écrire: $EL = RjS \Rightarrow j = \frac{L}{RS} E = \gamma E \Rightarrow \vec{j} // \vec{E}$

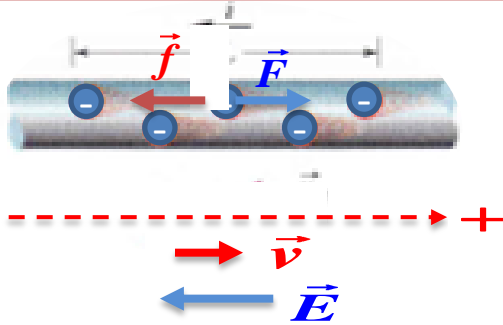
3) En déduire le vecteur vitesse de dérive \vec{v} des électrons dans le conducteur.

$\vec{j} = -ne\vec{v} = \gamma\vec{E} \Rightarrow \vec{v} = -\left(\frac{\sigma}{ne}\right)\vec{E} = -\left(\frac{L}{RSne}\right)\vec{E}$ Comme E est constants, donc j et constant.

La vitesse est **constante** dans un conducteur alors qu'elle augmente **uniformément dans le vide**.

II) Lors de leur déplacement dans un conducteur; les électrons , de vitesse \vec{v} sont soumis à une force de frottement de type visqueux $\vec{f} = -k\vec{v}$ où k représente une constante caractéristique du matériau conducteur

1) Etablir l'équation différentielle du mouvement des électrons soumis à la force électrique et la force de frottement.



$$\vec{f} = -k\vec{v}$$

$$\vec{F} = -e\vec{E}$$

$$|\vec{f}| = kv$$

$$|\vec{F}| = eE$$

$$R.F.D \quad \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Sa projection suivant le sens du mouvement donne: $|\vec{F}| - |\vec{f}| = m|\vec{a}| = m \frac{dv}{dt}$

$$m \frac{dv}{dt} + kv = eE$$

$$\Downarrow$$

$$eE - kv = m \frac{dv}{dt}$$

2) Vérifier que la fonction: $v(t) = v_L [1 - \exp(-t/\tau)]$ est solution de l'équation précédente.

On aboutit donc à une équation différentielle du premier ordre avec second membre, admet **pour solutions:**

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{eE}{m} : \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{k} \quad \text{et} \quad v_L = \frac{eE}{k}$$

Première solution, particulière(a=0) : $v_1(t) = v_L = \frac{eE}{k}$

Deuxième solution, sans second membre: $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \Rightarrow v_2(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

Solution générale: $v_1(t)+v_2(t)$ $v(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} + v_L \Rightarrow v(t) = v_L \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$

Condition aux limite, à t=0, v(0)=0: $0 = A + v_L \Rightarrow A = -v_L$

3) Déterminer le travail de la force de frottement lorsque l'électron se déplace de B à A.
Sous quelle forme d'énergie se retrouve-t-il?

$$W(\vec{f})_A^B = \int_A^B \vec{f} d\vec{l} = \int_A^B -kvd\vec{x} \sim -kv_L(x_A - x_B) = -eEL$$

$$V = EL \Rightarrow -eEL = -QRI = -ItRI = -RI^2t = W_{\vec{f}}$$

donc ce travail se trouve sous forme de chaleur(effet Joule).

$$v(t) = v_L \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{v_L}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$
$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_L}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{v_L}{\tau} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{eE}{m} \Rightarrow \tau = v_L \frac{m}{eE}$$

particulière(a=0): $v_L = \frac{eE}{k} \Rightarrow \tau = \frac{m}{k}$

Exercice: 2

Un conducteur cylindrique de cuivre, de section $s = 1 \text{ mm}^2$ et de longueur $L = 10 \text{ m}$, est parcouru par un courant constant de 5 A , lorsque la ddp entre ses deux bases vaut $0,85 \text{ V}$

1) Calculer le module du vecteur densité de courant.

$$|\vec{j}| = \frac{I}{S} = 5 \cdot 10^6 \text{ (A / m}^2\text{)}$$

2) Calculer le nombre d'électrons libres par unité de volume sachant qu'un atome de cuivre libère un électron

On donne: La masse atomique du cuivre $M = 64 \text{ g}$, sa masse volumique $\rho_{\text{Cu}} = 8900 \text{ kg/m}^3$ et le nombre d'Avogadro $N = 6.023 \times 10^{23}$

$$\begin{aligned} M &\rightarrow \text{Nat} \\ \rho_{\text{Cu}} &\rightarrow n(e^- / \text{m}^3) \end{aligned} \Rightarrow n = \frac{N \rho}{M} = \frac{6,02 \cdot 10^{23} \cdot 8,9 \cdot 10^2}{64 \cdot 10^{-3}} = 8,37 \cdot 10^{28} (e^- / \text{m}^3)$$

$$n = 8,37 \cdot 10^{28} (e^- / \text{m}^3)$$

3) Calculer la valeur de la vitesse de dérive des électrons libres.

La loi d'OHM $V=RI$ peut s'écrire: $EL = RjS \Rightarrow j = \frac{L}{RS} E = \gamma E \Rightarrow \vec{j} // \vec{E} \Rightarrow \vec{j} = \frac{L}{RS} \vec{E} = \gamma \vec{E}$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{j} = \frac{L}{RS} \vec{E} \\ \vec{j} = -ne\vec{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v} = -\left(\frac{\sigma}{ne}\right) \vec{E} = -\left(\frac{L}{RSne}\right) \vec{E}$$

$$v = \frac{j}{ne} = \frac{5 \cdot 10^6}{8,37 \cdot 10^{28} \times 1,6 \cdot 10^{-19}} = 3,73 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

4) Calculer la résistivité du conducteur.

$$j = \gamma E = \gamma \frac{V}{\ell} = \frac{V}{\rho \ell} = \frac{I}{S} \Rightarrow \rho = \frac{VS}{\ell I} = \frac{0,85 \cdot 10^{-6}}{10 \times 5} = 17 \cdot 10^{-9} (\Omega \cdot m)$$

Exercice:3

Un cylindre homogène en argent de diamètre d égal à 1.2 mm et de longueur l égale à 42cm, est parcouru par un courant $I=50A$ lorsque la ddp, appliquée entre ses deux bases vaut $V=0.3 V$

1) Calculer la conductivité de l'argent

$$j = \gamma E = \gamma \frac{V}{L} = \frac{V}{\rho L} = \frac{I}{S} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{IL}{VS} = \frac{4IL}{V\pi d^2} = 6 \cdot 10^7 (\Omega m)^{-1}$$

$$\gamma = \frac{4IL}{V\pi d^2} = \frac{4 \times 50 \times 0,42}{0,3 \times 3,14 \times 144 \cdot 10^{-8}} = 0,62 \cdot 10^8 (\Omega m)^{-1}$$

2) Sachant que chaque atome d'argent libère un électron pour la conduction, trouver le nombre n d'électrons libres par mètre cube.

On rappelle que pour l'argent le nombre de masse est $A=108$ et la masse volumique $\rho_{Ag} = 10.5 \text{ g/cm}^3$

$$M \rightarrow N_A (\text{at})$$

$$\rho_{Ag} \rightarrow n(e^- / m^3)$$

$$n = \frac{N_A \rho_{Ag}}{A} = \frac{N_A d}{A} = \frac{6,02 \cdot 10^{29} \times 10,5}{108} = 0,585 \cdot 10^{29} (e^- / m^3)$$

3) À partir de deux expressions différentes du vecteur densité de courant, trouver la vitesse de dérive des électrons de conduction.

$$\left. \begin{aligned} \vec{j} &= -ne\vec{v} = \gamma \vec{E} \\ j &= \gamma E = \gamma \frac{V}{\ell} = \frac{V}{\rho \ell} = \frac{I}{S} \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \frac{I}{neS}$$

$$v = \frac{4 \times 50}{0,585 \cdot 10^{29} \times 1,6 \cdot 10^{-19} \times 3,14 \times 144 \cdot 10^{-8}} = 4,72 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

4) Calculer la mobilité μ des porteurs de charges libres pour l'argent.

$$\vec{v} = \mu \vec{E} \Rightarrow v = \mu \frac{V}{L} \Rightarrow \mu = \frac{vL}{V}$$

$$\mu = \frac{vL}{V} = \frac{4,72 \cdot 10^{-4} \times 0,42}{0,3} = 661 \cdot 10^{-4} (\text{m}^2 / \text{VS})$$

Exercice: 4

Un fil de cuivre cylindrique de diamètre $d = 1\text{ mm}$ et de longueur $l = 1\text{ m}$ est parcouru par un courant constant d'intensité $I = 1\text{ A}$. Il satisfait la loi d'Ohm microscopique $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.

Données concernant le cuivre:

masse molaire $M = 63.4\text{ g/mol}$, masse volumique $\mu = 8.9\text{ g/cm}^3$; numéro atomique:

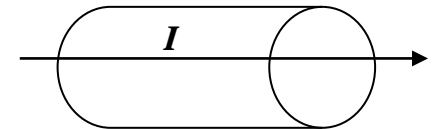
$Z = 29$; résistivité à $200\text{ }^\circ\text{C}$: $r = \gamma^{-1} = 1.7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ où γ est la conductivité.

Il y a un électron de conduction par atome de cuivre. La charge de l'électron:

$e = -1.6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$; nombre d'Avogadro: $N = 6.02 \cdot 10^{23}$ molécules/mole

1) Quel est la forme des lignes de champ électrique et des lignes de courant dans les deux cas suivants:

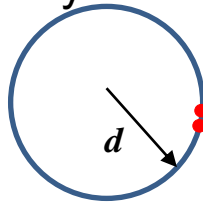
a- le fil est rectiligne.



Une ligne de courant d'une charge positive est dirigée du potentiel le plus élevé vers le potentiel le moins élevé.

Comme le cylindre est homogène les lignes de champ sont parallèles à l'axe du cylindre.

b- le fil forme une boucle circulaire ($l \gg d$).



Pour une boucle circulaire ($l \gg d$), les lignes de courant sont des cercles de même centre.

2) Donner l'expression algébrique de la densité volumique de charge mobile ρ (m) en fonction de e , μ , M , et N . Comparer aux densités volumiques de charge positive ρ^+ et de charge négative ρ^-

$$\begin{aligned} M &\rightarrow N_A (\text{at}) \\ \mu &\rightarrow n(e^- / m^3) \end{aligned} \Rightarrow n = \frac{\mu N_A}{M} (e^- / m^3) \begin{cases} \rho^+ = \frac{nq}{N_A} \\ \rho^- = \frac{ne}{N_A} \end{cases}$$

3) En utilisant la loi d'Ohm microscopique, retrouver la loi d'Ohm macroscopique, puis l'expression algébrique de la résistance du fil en fonction de d , l et r .

$$j = \gamma E = \gamma \frac{V}{L} = \frac{V}{\rho L} = \frac{I}{S} \Rightarrow V = \frac{\ell}{\gamma S} I = RI$$

4) Evaluer numériquement:

a. La résistance R du fil.

$$R = \frac{\ell \cdot 4}{\gamma \pi d^2} I = \frac{4 \times 1,710^{-8}}{3.14 \times 10^{-6}} = 2,110^{-2} (\Omega)$$

b. La densité de courant j .

$$j = \frac{I}{S} = \frac{4 \cdot I}{\pi d^2} = 1,2710^6 A / m^2$$

c. La chute de potentiel V entre les extrémités du fil et la puissance dissipée.

$$V = RI = 2,1 \, 10^{-2} V$$

$$P_{eff} = RI^2 = 2,1 \, 10^{-2} J$$

d. La densité volumique de charge mobile.

$$\rho^+ =$$

e. La vitesse moyenne des électrons de conduction. La comparer à leur vitesse d'agitation thermique et à la vitesse de la lumière.

$$v = \frac{I}{n|e|S} = \frac{I \cdot M}{N_A \mu |e| S} = \frac{63,4 \, 10^{-3} \times 4}{6,02 \, 10^{23} \times 8,9 \, 10^3 \times 1,6 \, 10^{-19} \times 3.14 \, 10^{-6}} = 0,94 \, 10^{-4} m/s$$