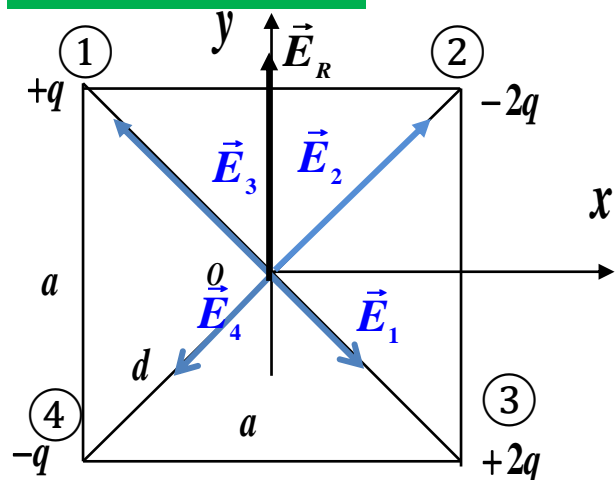


Champs et Potentiels Électriques

Exercice: 1



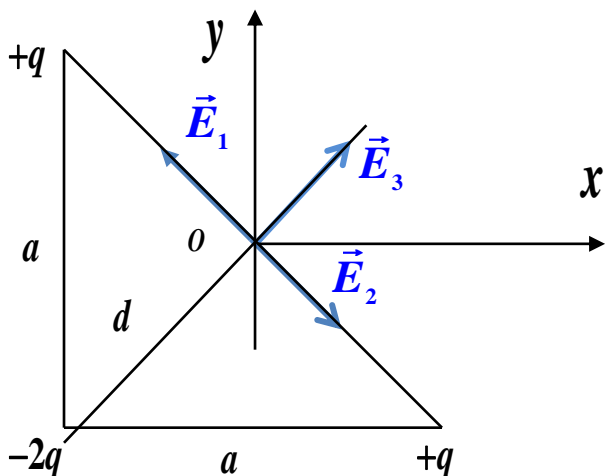
$$\vec{E}_1 + \vec{E}_3 + \vec{E}_2 + \vec{E}_4 = \vec{E}_R \quad \vec{E}_1 = \frac{kq}{d^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \vec{E}_3 = \frac{kq}{d^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} -2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{E}_R = \frac{kq}{d^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 2 \end{Bmatrix} \quad \vec{E}_4 = \frac{kq}{d^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad \vec{E}_2 = \frac{kq}{d^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$d = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow E_R = \frac{2\sqrt{2}kq}{a^2} = 282.8 \text{ V/m}$$

Exercice: 2

Déterminer le vecteur champ électrique \vec{E}_o et le potentiel électrique V_o , au point O avec $a=6 \text{ cm}$ et $q = -210^{-11}$



$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = \vec{E}_3 = \vec{E}_o \text{ Avec: } |\vec{E}_o| = |\vec{E}_3| = \frac{2k|q|}{d^2}$$

$$d = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow |\vec{E}_o| = \frac{4k|q|}{a^2} = 200 \text{ V/m}$$

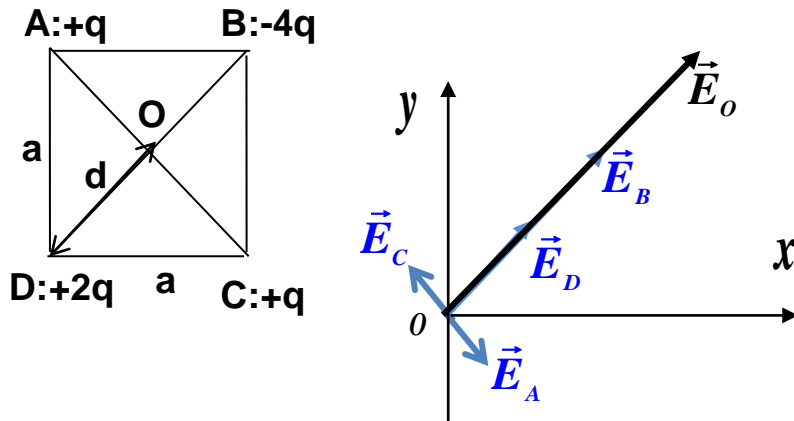
$$V_o = \frac{kq}{d} + \frac{kq}{d} + \frac{k(-2q)}{d} = 0 \text{ V}$$

Exercice: 3

Aux sommets d'un carré $ABCD$ de côté $a=2$ cm, sont placées les charges suivantes:

$$q_A = q; \quad q_B = -4q; \quad q_C = q; \quad q_D = 2q; \quad \text{avec } q = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

1- Calculez le champ et le potentiel électrique au centre O du carré, dans le repère (o, x, y) .



$$\vec{E}_A + \vec{E}_C = 0 \quad \vec{E}_B = \frac{kq}{d^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 4 \\ 4 \end{Bmatrix} \quad \vec{E}_D = \frac{kq}{d^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

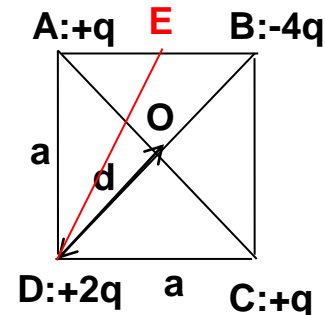
$$\vec{E}_B + \vec{E}_D = \vec{E}_O = \frac{kq}{d^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \end{Bmatrix} \Rightarrow |\vec{E}_O| = \frac{kq}{d^2} \frac{\sqrt{2}}{2} 6\sqrt{2}$$

$$|\vec{E}_O| = 12 \frac{kq}{a^2} = 54 \cdot 10^5 \text{ V/m}$$

$$V_O = 0$$

2- Calculez le potentiel au point E milieu de AB.

$$(DE)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$



$$V_E = \frac{2k}{\sqrt{5}a} (q + 2q) + \frac{2k}{a} (q - 4q) = \frac{6kq}{a} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - 1 \right) = -29850 \text{ V}$$

Exercice: 4

Soient deux charges ponctuelles q identiques et positives placées de part et d'autre de l'origine d'un axe Ox à une distance a de cette origine.

1-Déterminer l'expression du potentiel créé par ces deux charges en tout point M de l'axe Ox d'abscisse x en fonction de q , ϵ_0 , x et a .

$$V_M = \frac{kq}{x+a} + \frac{kq}{x-a} = \frac{kq}{x^2 - a^2} = \frac{2kqx}{x^2 - a^2} \quad V_{M'} = \frac{kq}{x+a} + \frac{kq}{a-x} = \frac{2kqa}{a^2 - x^2} = -\frac{2kqa}{x^2 - a^2} \quad V_M = \frac{2kqx}{x^2 - a^2}$$

2-Justifier le fait que le champ créé en M soit parallèle à Ox .

Les deux champ électriques sont // à ox , donc la résultante est aussi // ox .

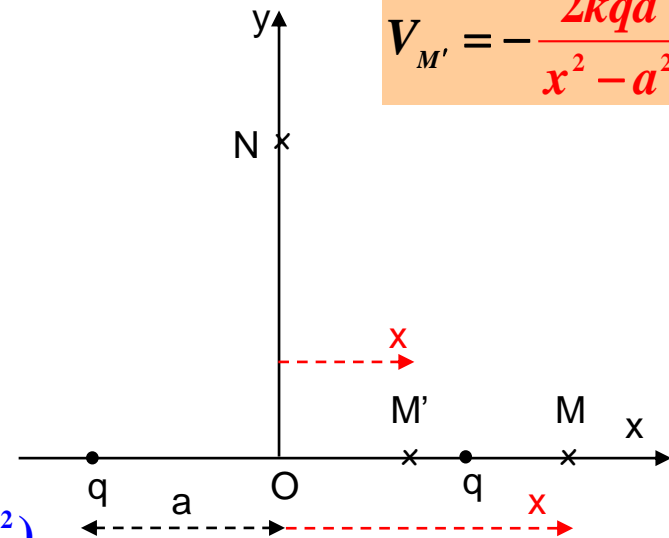
3-Déduire l'expression de ce champ électrique.

$$\bar{E}_M = -\frac{dV_M}{dx} = -\frac{2kq}{(x^2 - a^2)^2} \left\{ (x^2 - a^2) - (2x)x \right\} = \frac{2kq(x^2 + a^2)}{(x^2 - a^2)^2}$$

$$\bar{E}_{M'} = -\frac{dV_{M'}}{dx} = \frac{2kqa}{(x^2 - a^2)^2} \left\{ -2x \right\} = -\frac{4kqax}{(x^2 - a^2)^2}$$

$$\bar{E}_{M'} = -\frac{4kqax}{(x^2 - a^2)^2}$$

$$\bar{E}_M = \frac{2kq(x^2 + a^2)}{(x^2 - a^2)^2}$$



Calcul du champ électrique par la méthode directe

$$E_M = E_{M1} + E_{M2} = \frac{kq}{(x+a)^2} + \frac{kq}{(x-a)^2} = \frac{kq}{(x^2-a^2)^2} \left\{ (x-a)^2 + (x+a)^2 \right\} = \frac{2kq(x^2+a^2)}{(x^2-a^2)^2}$$

$$E_{M'} = E_{M1} - E_{M2} = \frac{kq}{(x+a)^2} - \frac{kq}{(a-x)^2} = \frac{kq}{(x^2-a^2)^2} \left\{ (a-x)^2 - (a+x)^2 \right\} = -\frac{4kqax}{(x^2-a^2)^2}$$

4-Donner l'expression du champ électrique créé par ces deux charges en un point N situé sur l'axe Oy d'ordonnée y en fonction de q, ϵ_0 y et a.

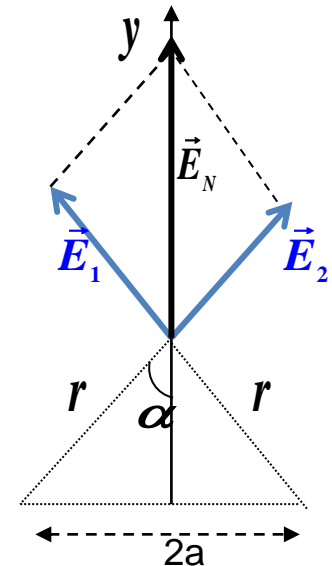
$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_N \quad r^2 = a^2 + y^2 \quad \cos \alpha = \frac{y}{(a^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$E_N = 2 \frac{kq}{r^2} \cos \alpha = \frac{2kqy}{(a^2 + y^2)^{3/2}}$$

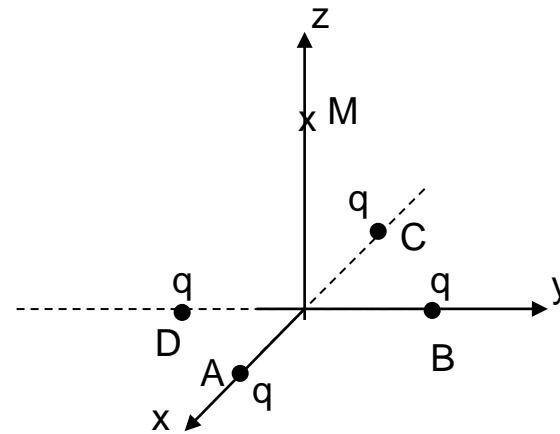
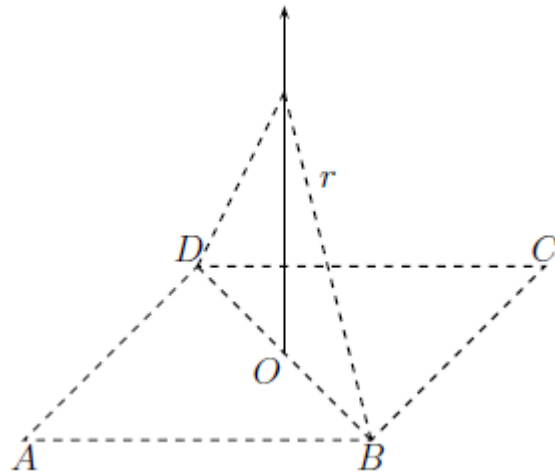
5-Déduire celle du potentiel électrique en ce point.

$$V_N = \frac{kq}{r} + \frac{kq}{r} = \frac{2kq}{(a^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$V_N = \int -E_N dy = \int -\frac{2kqy}{(a^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{2kq}{(a^2 + y^2)^{1/2}} + Cte$$



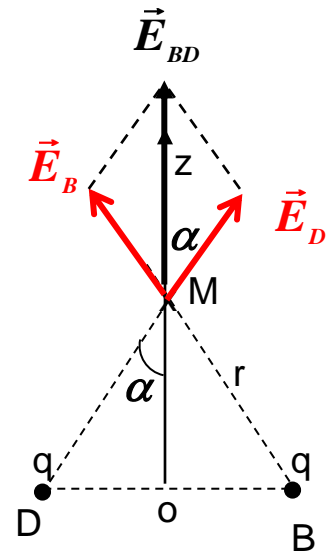
Exercice: 5



On place des charges électriques ponctuelles identiques de valeur q aux points : $A(a, 0, 0)$, $B(0, a, 0)$, $C(-a, 0, 0)$ et $D(0, -a, 0)$.

1-Calculer le champ électrique créé par ces charges en un point M quelconque sur l'axe oz, tel que $OM = z$.

$$OA = OB = OC = OD = a \Rightarrow r = \sqrt{a^2 + z^2} \quad \text{Voir figure}$$



Les charges en B et D créent le même champ en module, $E_B = E_D = kq/r^2$

Le champ total est // à oz à cause de la symétrie: \vec{E}_{BD}

Les charges en A et C créent le même champ en module: $\vec{E}_{AC} = \vec{E}_{BD}$

$$\vec{E}_{BD} = \vec{E}_{AC} = 2E_B \cos \alpha \vec{k} = 2kqz(a^2 + z^2)^{-3/2} \vec{k}$$

$$\vec{E}_M(z) = \frac{4kqz}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{k}$$

2-Calculer le potentiel créé en ce point.

$$V_M(z) = \frac{4kq}{(a^2 + z^2)^{1/2}}$$

3-Que deviennent ces expressions si on met des charges $+q$ en A et C et $-q$ en B et D.

$$\vec{E}_M(z) = \vec{0}$$

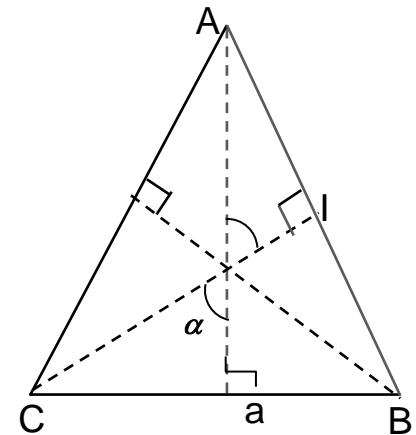
$$V_M(z) = 0$$

Exercice: 6

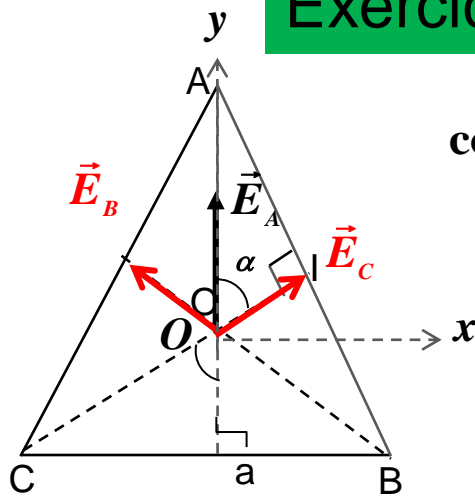
Soient trois charges ponctuelles Q_A , Q_B et Q_C placées aux sommets d'un triangle équilatéral ABC de côté $a = \sqrt{3}$ cm

$$OC = OB = OA$$

On donne: $Q_A = -2q$, $Q_B = q$, $Q_C = q$ et $q = 1$ nC



Exercice: 6



$$\cos \alpha = \frac{OI}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow OA = 2OI \Rightarrow IO = \frac{1}{3} IC \text{ et } OC = \frac{2}{3} IC$$

$$OC = OB = OA = 2OI$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{2OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow OA = \frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow OA^2 = \frac{a^2}{3}$$

1-Déterminer et représenter le vecteur champ électrique créé par ces trois charges au centre de gravité O du triangle.

$$\vec{E}_A \left(\frac{2kq}{OA^2} \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \vec{E}_B \left(\frac{kq}{OB^2} \right) \begin{Bmatrix} -\sin 60 \\ \cos 60 \end{Bmatrix} \quad \vec{E}_C \left(\frac{kq}{OC^2} \right) \begin{Bmatrix} \sin 60 \\ \cos 60 \end{Bmatrix} \quad \vec{E}_O \left(\frac{kq}{OC^2} \right) \begin{Bmatrix} 0 \\ 2(\cos 60^\circ + 1) \end{Bmatrix}$$

$$\vec{E}_O = \left(\frac{3kq}{OC^2} \right) \vec{j} \Rightarrow \vec{E}_O = \left(\frac{9kq}{a^2} \right) \vec{j}; \quad |\vec{E}_O| = 27 \cdot 10^4 \text{ (V / m)}$$

2-Calculer le potentiel créé par ces trois charges au point O

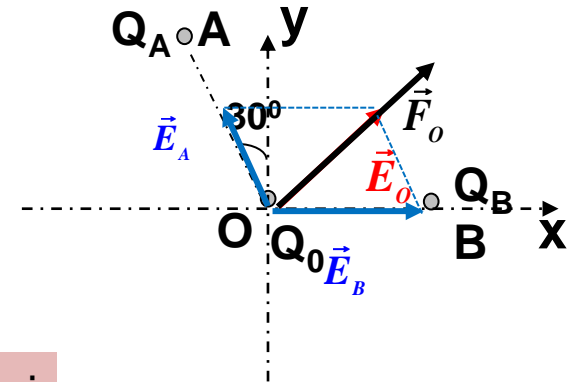
$$V_M = 0 \text{ (V)}$$

3-Calculer l'énergie interne du système des trois charges

$$U = k \frac{Q_A Q_B}{AB} + k \frac{Q_A Q_C}{AC} + k \frac{Q_B Q_C}{BC} \Rightarrow U = -\frac{3kq^2}{a} = -15.6 \cdot 10^{-7} \text{ (J)}$$

Exercice: 7

On considère deux charges électriques ponctuelles Q_A et Q_B placées respectivement aux points A et B (voir figure). On donne : $Q_A = Q_B = q = -5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$
 $OA = OB = d = 5 \text{ cm}$ $AB = 8.66 \text{ cm}$



1-Déterminer et représenter le champ électrique \vec{E}_o qui s'exerce au point O. Calculer le potentiel en ce point.

$$\vec{E}_A = \frac{k|q|}{2d^2} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_B = \frac{k|q|}{2d^2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E}_o = \frac{k|q|}{2d^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$|\vec{E}_o| = 18 \cdot 10^6 \text{ (V / m)}$$

$$V_o = -\frac{2k|q|}{d} = -18 \cdot 10^5 \text{ (V)}$$

2-On place au point O une charge $Q_o = 10^{-6} \text{ C}$, en déduire la force électrique ainsi que l'énergie potentielle E_p en O.

$$\vec{F}_o = Q_o \vec{E}_o = \frac{k|q|Q}{2d^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$|\vec{F}_o| = 18 \text{ (N)}$$

$$E_{p_o} = Q_o V_o = -\frac{2k|q|Q_o}{d} = -1.8 \text{ (J)}$$

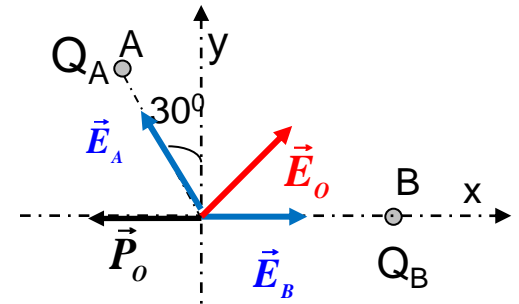
3-Calculer l'énergie interne du système formé de ces trois charges.

$$U = \frac{kQ_A Q_B}{AB} + \frac{kQ_A Q_C}{AC} + \frac{kQ_B Q_C}{BC} = 0.8(J)$$

Exercice: 8

On reprend l'exercice 7 et on remplace la charge Q_0 par un dipôle électrique p dont les charges $q=10^{-12}$ C et $-q$ sont distantes de $a=5$ mm.

a-Trouver et représenter le moment du couple du dipôle dans la position de la figure. Calculer l'énergie potentielle du dipôle.



$$\vec{E}_o = \frac{k|q|}{2d^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{L}_o = \vec{P}_o \times \vec{E}_o = \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ -p_o & 0 & 0 \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -p_o & 0 \\ E_x & E_y \end{vmatrix} \vec{k} \Rightarrow \vec{L}_o = -|\vec{P}_o| E_y \vec{k} = -7,810^{-8} \vec{k} (C.V)$$

$$E_{P_o} = -\vec{P}_o \cdot \vec{E}_o = P_{o_x} E_{o_x} \Rightarrow$$

$$E_{P_i} = \frac{k|q|P_o}{2d^2} = 4.510^{-8} (J)$$

b-Calculer le travail nécessaire pour ramener le dipôle à sa position d'équilibre stable.

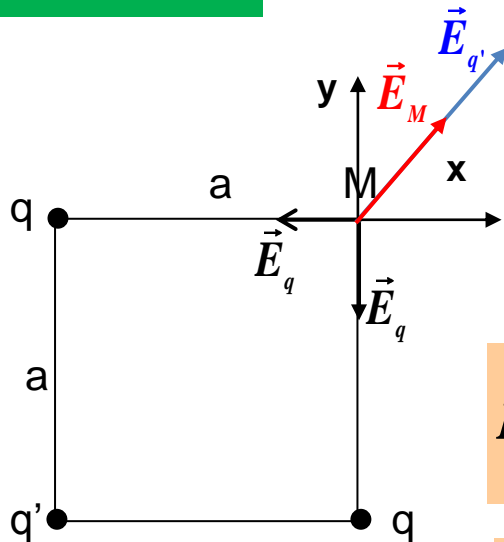
$$\left. \begin{aligned} E_{P_{of}} &= -\vec{P}_o \cdot \vec{E}_o = -|\vec{P}_o| |\vec{E}_o| \cos 0 \\ E_{P_f} &= -P_o \frac{k|q|}{2d^2} 2 = -910^{-8} (J) \end{aligned} \right\} \Rightarrow W_{\vec{F}} = \int_i^f \vec{F}_o \cdot \overrightarrow{d\ell} = -\Delta E_P = E_{P_i} - E_{P_f} = 13,510^{-8} (J)$$

Exercice: 9

Soient trois charges électriques ponctuelles placées sur trois sommets d'un carré de côté a

On donne : $a = 1 \text{ cm}$, $q' = 2 \text{ nC}$ et $q = -q'/4\sqrt{2}$

1-Déterminer le champ électrique \vec{E}_M et le potentiel V créés par ces charges au point M.



$$\vec{E}_q = \frac{k|q|}{a^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{E}_q = \frac{k|q|}{a^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{E}_{q'} = \frac{kq'}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

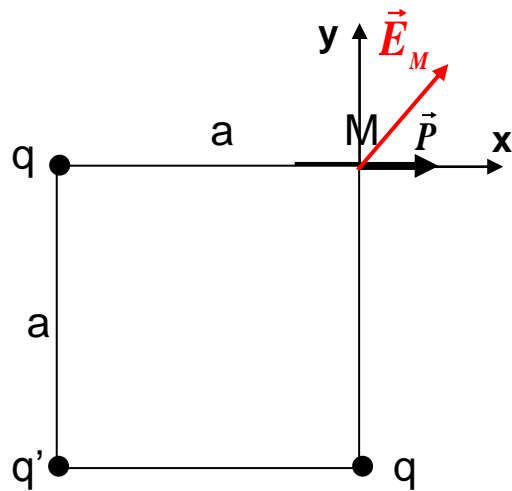
$$\vec{E}_q = \frac{kq'}{4\sqrt{2}a^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{E}_q = \frac{kq'}{4\sqrt{2}a^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{E}_{q'} = \frac{kq'}{4\sqrt{2}a^2} \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{E}_M = \frac{kq'}{4\sqrt{2}a^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

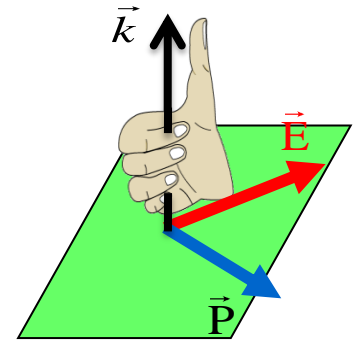
$$V_M = \frac{kq}{a} + \frac{kq}{a} + \frac{kq'}{a\sqrt{2}} = \frac{kq'}{a\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{kq'}{2a\sqrt{2}} = 636 (V)$$



2-Un dipôle électrique de moment dipolaire \vec{P} est placé au point M du carré. En admettant que ce dipôle est mobile autour de son centre :

a-Déterminer et calculer le moment du couple \vec{L} auquel est soumis ce dipôle. $P = 3 \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$

Première méthode: $\vec{L} = PE \sin \frac{\pi}{4} \vec{k} = 9.55 \cdot 10^{-25} \vec{k} (\text{N.m})$



Deuxième méthode: $\vec{L} = \vec{p} \times \vec{E}_M \Rightarrow \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ P_x & 0 & 0 \\ E_x & E_y & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{L} = P_x E_y \vec{k}$

b-Calculer l'énergie potentielle de ce dipôle.

$$E_p = -\vec{P} \cdot \vec{E} = -P_x E_x = -P \frac{kq'}{4\sqrt{2}a^2} = -9.55 \cdot 10^{-25} (\text{J})$$

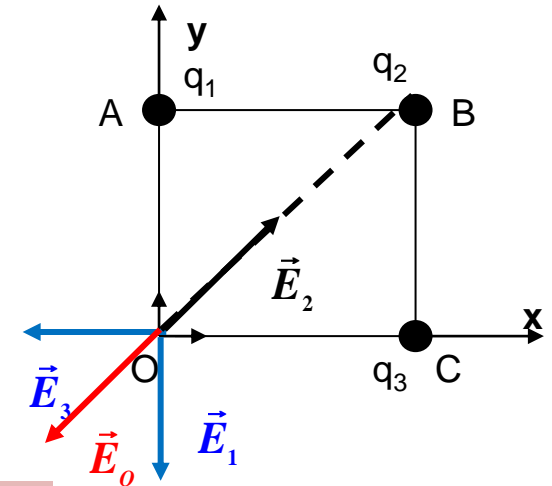
Exercice: 10

Soient trois charges q_1 , q_2 et q_3 placées respectivement aux points A(0, a), B(a, a) et C(a, 0) du plan xoy

$$q_1 = q_3 = q = 10^{-9} \text{ C}, \text{ et } q_2 = -q; \quad a = 10 \text{ cm}$$

1-Calculer le potentiel électrique total au point O.

$$V_o = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{2kq}{a} - \frac{kq}{a\sqrt{2}} = \frac{kq}{a} \left(2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad V_o = 117 \text{ V}$$



2-Calculer les composantes E_x et E_y du champ électrique au point O \vec{E}

$$\vec{E}_1 = \frac{kq}{a^2} \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{kq}{a^2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{kq\sqrt{2}}{4a^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\|\vec{E}_1\| = \|\vec{E}_3\| = 900 (\text{V} / \text{m}); \quad \|\vec{E}_2\| = 450 (\text{V} / \text{m})$$

3-En déduire le champ électrique total \vec{E}_o au point O.

$$\vec{E}_o = \frac{kq}{a^2} \begin{Bmatrix} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 1 = -0,646 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 1 = -0,646 \end{Bmatrix}$$

$$\|\vec{E}_o\| = 822 (\text{V} / \text{m})$$

Représenter ce vecteur à l' échelle: 1 cm \rightarrow 200 V/m

$$\vec{E}_o = -581,4(\vec{i} + \vec{j}) \text{ (V / m)}$$

4-On place au point O un dipôle électrique de moment dipolaire $\vec{P} = 10^{-10}(-\vec{i} + \vec{j}) \text{ C / m}$

a-Déterminer le moment \vec{L} du couple appliquer au dipôle.

$$\vec{P} \cdot \vec{E}_o = 0 \Rightarrow \vec{E}_o \perp \vec{P} \Rightarrow \|\vec{L}\| = \|\vec{p}\| \|\vec{E}_o\| \sin \frac{\pi}{2} = 581,4 \sqrt{2} \sqrt{2} 10^{-10} = 11,6 10^{-8} \text{ (Nm)}$$

b-Représenter le dipôle dans sa position finale d'équilibre stable. Justifier cet état.

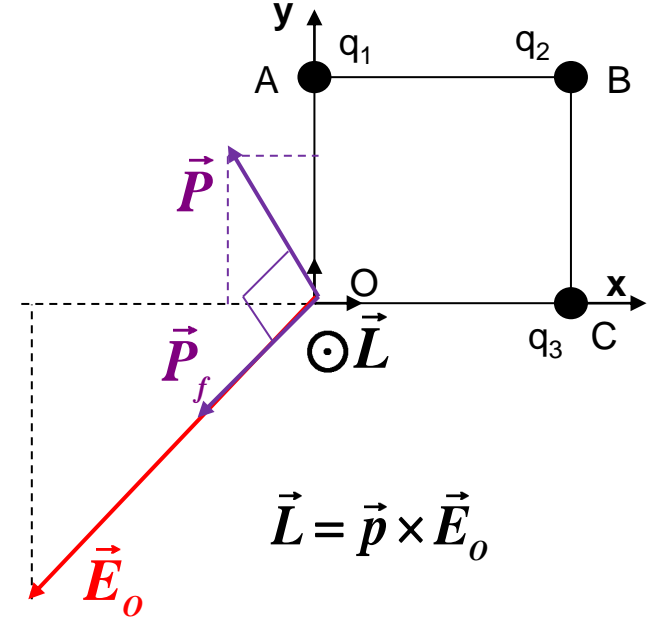
La position finale d'équilibre stable est celle P est parallèle à E dans le même sens

c-Calculer la variation d'énergie potentielle du dipôle lorsqu'il passe de la position initiale à la position finale.

$$E_{P_i} = -\vec{P} \cdot \vec{E}_o = 0$$

$$\Rightarrow \Delta E_P = E_{P_f} - E_{P_i} = -11,6 10^{-8} \text{ (J)}$$

$$E_{P_f} = -\|\vec{p}\| \|\vec{E}_o\| \cos 0 = -11,6 10^{-8} \text{ (J)}$$

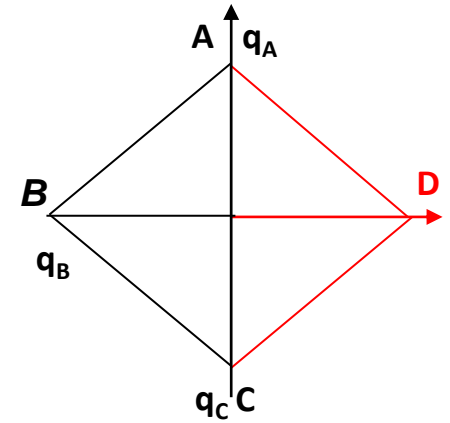


Exercice:11

Deux charges ponctuelles q_A et q_C sont placées aux sommets A et C d'un triangle équilatéral ABC de côté $2a$

1) Une troisième charge ponctuelle q_B est placée au sommet B du triangle

a-Calculer l'énergie potentielle de q_B au point B.



On donne: $a = 2\text{mm}$, $q_B = 2q$, $q_A = q_C = q = 1\text{pC}$, $Q = 1\text{nC}$, $AB = BC = CA = 2a$

$$E_{p_B} = q_B V_B = q_B \frac{k}{2a} (q_A + q_C) = 4 \frac{kq^2}{2a}$$

$$E_{p_B} = 2 \frac{kq^2}{a}$$

$$AD = CD = 2a$$

b-Calculer l'énergie interne du système constitué par ces 3 charges

$$U = \frac{kq_A q_B}{2a} + \frac{kq_A q_C}{2a} + \frac{kq_B q_C}{2a} = 5 \frac{kq^2}{2a}$$

$$U = 5 \frac{kq^2}{2a}$$

2) Déterminer le potentiel électrique créé par les 3 charges au point D symétrique du point B par rapport à AC.

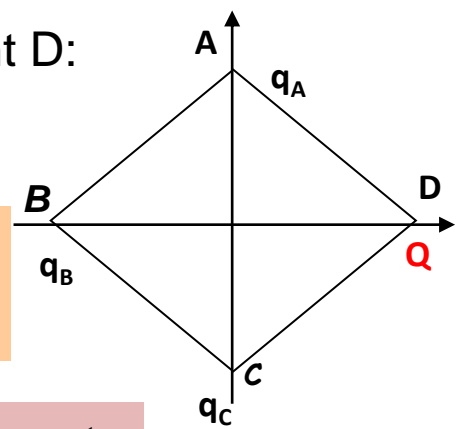
$$V_D = \frac{k(q_A + q_C)}{2a} + \frac{kq_B}{2\sqrt{3}a} = \frac{kq}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$V_D = \frac{kq}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

3) Une 4^{ème} charge ponctuelle Q est ramenée de l'infini au point D:

a-Déterminer l'énergie potentielle de cette charge au point D.

$$E_{PD} = QV_D = Q \frac{k(q_A + q_B)}{2a} + Q \frac{kq_B}{2\sqrt{3}a} = \frac{kqQ}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad E_{PD} = \frac{kqQ}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$



b-Calculer le travail de la force électrostatique durant le déplacement de Q. Comparer au résultat de (3-a) et Commenter

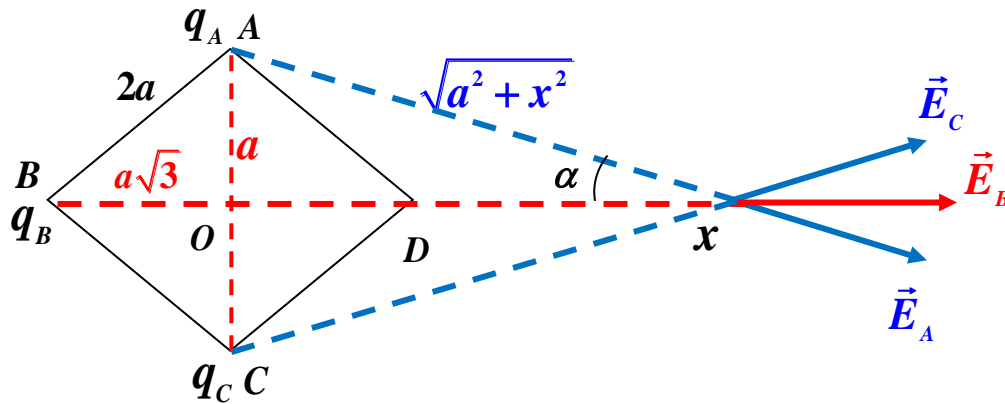
$$W_D^\infty = \int_D^\infty \vec{F}_e \cdot d\vec{\ell} = \int_D^\infty Q \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = Q \int_D^\infty -dV = -Q(V_\infty - V_D) = QV_D = E_{PD} \quad W_D^\infty = E_{PD}$$

$$W_\infty^D = \int_\infty^D \vec{F}_{opp} \cdot d\vec{\ell} = \int_\infty^D -\vec{F}_e \cdot d\vec{\ell} = \int_\infty^D \vec{F}_e \cdot d\vec{\ell} = E_{PD} = W_D^\infty$$

Comparaison avec (3-a):

Par définition, l' énergie potentielle d' une charge située en un point D est égale au travail de la résultante des forces électrostatiques pour un déplacement de cette charge **du point D** à un **point** de référence ou le potentiel est nul (**l' infini**).

Autre méthode: en général: $d\vec{\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j}$



Calculons le champ parallèle à l'axe ox. En additionnant les composantes sur ox créées par chaque charge, on obtient:

$$E_x = E_{A_x} + E_{B_x} + E_{C_x}$$

$$E_x = \frac{kq_A}{a^2 + x^2} \cos \alpha + \frac{kq_C}{a^2 + x^2} \cos \alpha + \frac{kq_B}{(a\sqrt{3} + x)^2} \quad \text{avec} \quad \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

En additionnant les composantes sur oy créées par chaque charge, on obtient: $E_y = E_{A_y} + E_{B_y} = 0$

$$E_x = (q_A + q_C) \frac{kx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{kq_B}{(a\sqrt{3} + x)^2} = (2kq) \left[\frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a\sqrt{3} + x)^2} \right]$$

$$W_D^\infty = \int_{a\sqrt{3}}^{\infty} \vec{F} \cdot \vec{d\ell} = \int_{a\sqrt{3}}^{\infty} F_x dx = Q \int_{a\sqrt{3}}^{\infty} E_x dx = 2kqQ \int_{a\sqrt{3}}^{\infty} \left[\frac{x dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{dx}{(a\sqrt{3} + x)^2} \right] = \frac{kqQ}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$E_{PD} = \frac{kqQ}{a} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

Exercice: 12

On considère deux charges électriques ponctuelles q positives, fixées aux points: $A(a\sqrt{2}, 0)$ $B(0, a\sqrt{2})$

1-Déterminer, en fonction de la distance $r = OM$, le potentiel électrique $V(r)$ au point M de la droite (Δ) .

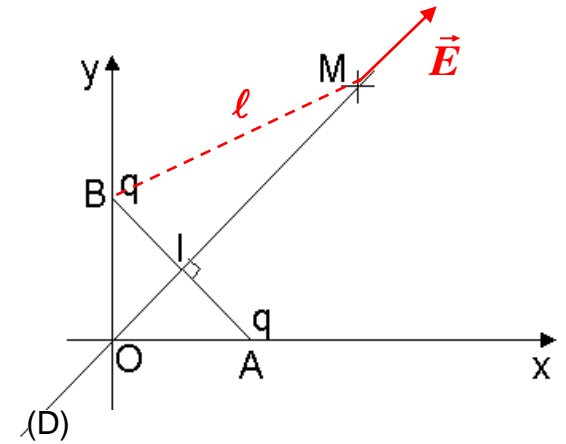
$$IM = OM - OI = r - a$$

$$\ell^2 = AM^2 = BM^2 = IM^2 + IA^2 = (r - a)^2 + a^2 \quad \cos 45 = \frac{OI}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \mathbf{OI = a}$$

$$V_M = \frac{kq}{\ell} + \frac{kq}{\ell} = \frac{2kq}{\sqrt{(r - a)^2 + a^2}}$$

$$V_M = \frac{2kq}{\sqrt{(r - a)^2 + a^2}}$$

2-En déduire l'intensité du champ électrique $\vec{E}(r)$ au point M .
Représenter qualitativement $\vec{E}(r)$



$$dV = -\vec{E} \cdot \vec{dr} = -E \cdot dr \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{dV}{dr}$$

$$E_M = kq \frac{(r - a)}{\left((r - a)^2 + a^2\right)^{3/2}}$$

3-Avec quelle énergie cinétique minimale doit-on lancer de l'infini, le long de la droite (Δ), une charge q' positive pour qu'elle atteigne le point I milieu de AB ?

$$V_I = \frac{2kq}{a}$$

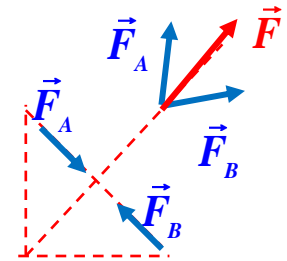
$$\Delta E_C = -\Delta E_P = E_{C_I} - E_{C_\infty} = 0 - E_{C_{\min}}$$

$$\Delta E_P = E_{P_I} - E_{P_\infty} = E_{P_I} - 0 = q'V_I$$

$$E_{C_{\min}} = \frac{2kqq'}{a}$$

4-Déterminer l'énergie interne du système ainsi formé par les trois charges (q' étant au point I)

$$U = \frac{kqq'}{a} + \frac{kqq'}{a} + \frac{kq^2}{2a}$$



5-Que se passe-t-il si on écarte légèrement la charge q' du point I:

a - suivant la droite (Δ) ? Justifier

La charge q' quitte le point I pour s'éloigner vers l'infini. (**position d'équilibre instable**).

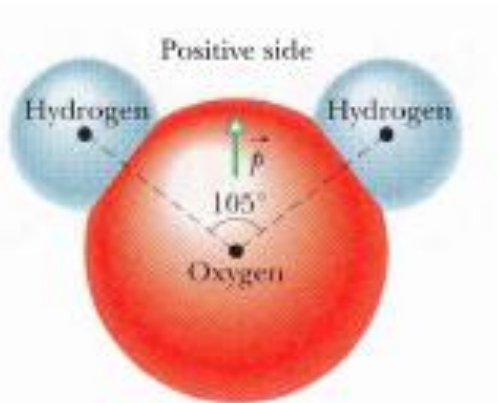
b - suivant le segment AB ? Justifier

Si on écarte légèrement la charge q' du point I sur AB elle reviendra vers sa position. (**position d'équilibre stable**).

Exercice:13

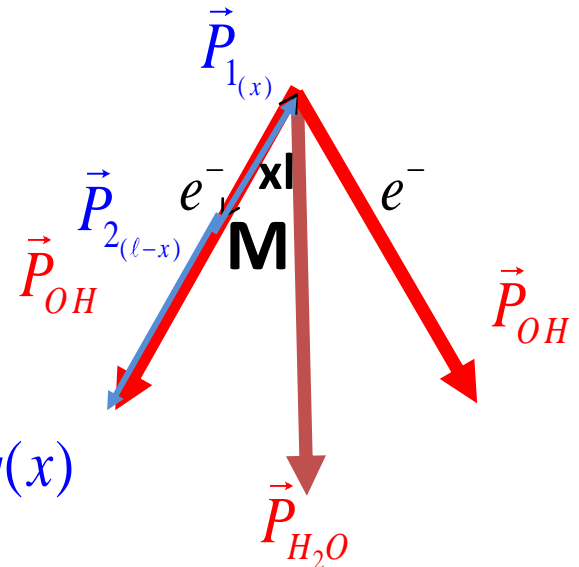
Dans la molécule d'eau, l'atome d'oxygène O et les deux atomes d'hydrogène H, sont disposés aux sommet d'un triangle isocèle dont l'angle en O vaut 2α . Soit l la longueur d'une liaison OH. Nous admettons que chaque liaison OH conserve la symétrie de révolution et que la position moyenne des deux électrons de liaison est un point M de OH à une distance x de O. la molécule d'eau possède un moment dipolaire permanent P , porté par la bissectrice en O, et dirigé vers l'intérieur de la molécule HOH. Données: $2\alpha = (\text{OH}, \text{OH}) = 105^\circ$; $l = \text{OH} = 0,0958 \text{ nm}$ et $P_{\text{H}_2\text{O}} = 1,84 \text{ D}$. (le debye symbole D équivaut à $1/3 \cdot 10^{-29} \text{ Cm}$)

1-Trouver la relation qui lie x et l .



$$\vec{P}_{\text{H}_2\text{O}} = \vec{P}_{\text{OH}} + \vec{P}_{\text{OH}}$$

$$\left| \vec{P}_{2(\ell-x)} \right| = q(\ell - x) \quad \left| \vec{P}_{1(x)} \right| = q(x)$$



On a deux liaisons OH, en projetant sur la bissectrice on obtient:

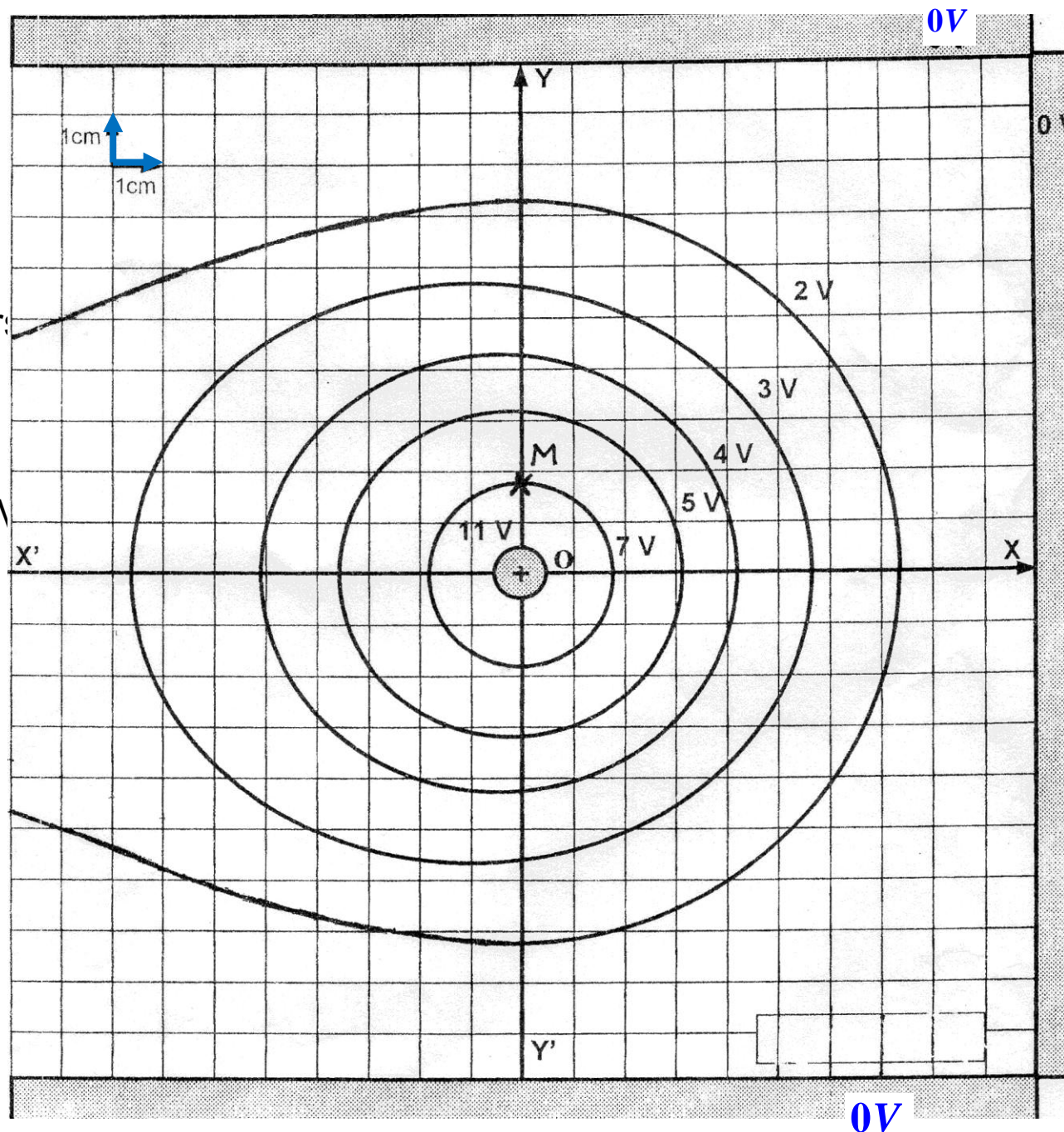
$$\left| \vec{P}_{H_2O} \right| = 2q(\ell - x) \cos \alpha - 2qx \cos \alpha \Rightarrow x = \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\left| \vec{P}_{H_2O} \right|}{4q \cos \alpha} \right)$$

2-Calculer x.

$$x = \left(\frac{0.0958}{2} - \frac{1.85 \cdot 10^{-29}}{3 \times 4 \times 1,6 \cdot 10^{-29} \times \cos(52.5)} \right) \approx \frac{0.0958}{2} = 0,0479 mm$$

Exercice: 14

Soit la carte équipotentielle représentée sur la figure ci-contre. Le montage est constitué de trois conducteurs plans portés au potentiel 0 V (potentiel de référence), un conducteur cylindrique au Centre, porté au potentiel 11 V



1-Calculer et représenter le champ moyen aux points: A(-5,0); B(3,-2)

$$|\vec{E}_{\text{moy}}| = \left| \frac{\Delta V}{\Delta r} \right|$$

$$|\vec{E}_A| = \frac{2}{0,04} = 50 \text{ V / m ?}$$

$$|\vec{E}_B| = \frac{1}{0,016} = 62,5 \text{ V / m ?}$$

Du potentiel le plus élevé vers le moins Élevé.

2- Tracer les lignes de champ Passant par les points: C(5,4); D(-5,-6).

Les lignes de champ: voire la carte d'équipotentiellles.

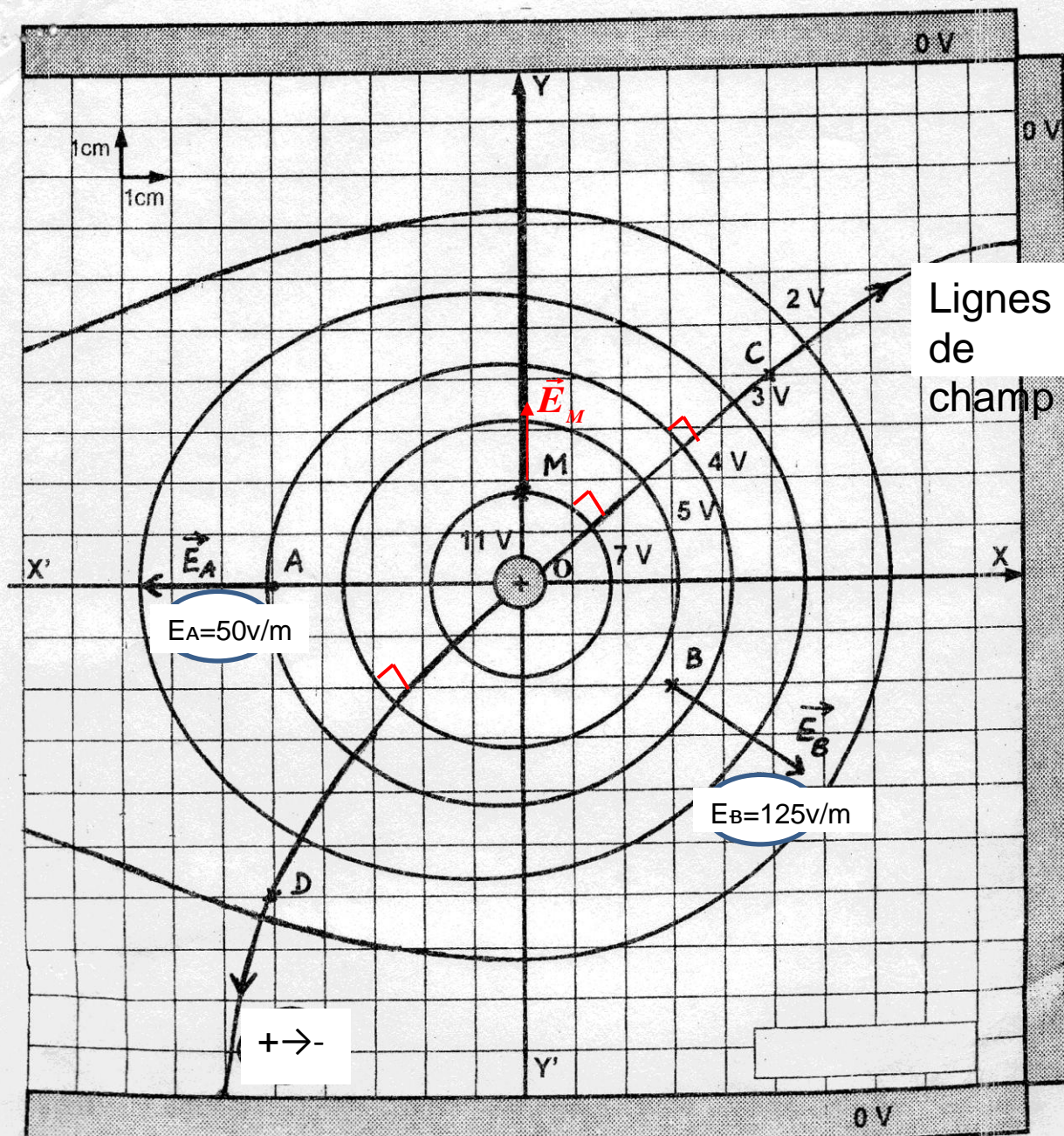
3-Une charge Q est placée sur l'axe Oy au point M

a)-Quelle est la valeur de la force moyenne qui s'exerce sur la charge Q au point M?

$$\vec{F}_{\text{moy}} = Q\vec{E}_{\text{moy}}$$

b)-dessiner la trajectoire suivie par la charge Q lors de son déplacement.

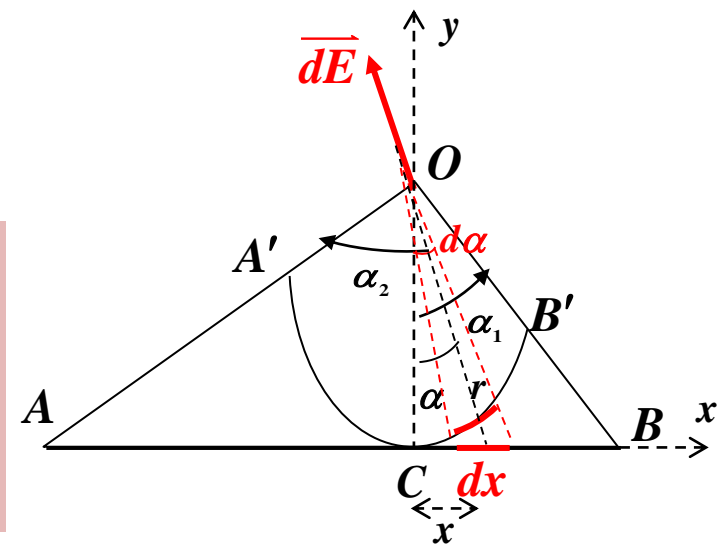
La trajectoire suivie par la charge Q est le demi axe (My): voire la carte d'équipotentiellles.



Exercice: 15

Un segment de droite AB porte une charge totale Q uniformément répartie.

Montrer que le champ, créé au point O, est le même que celui que créerait un arc de cercle portant la même densité de charge, tangent à AB, centré sur O et vu de O sous le même angle que le segment AB.



Soit un segment dx portant une charge $dq = \lambda dx$ Il lui correspond la charge $dq' = \lambda R d\alpha$ sur l'arc $A'B'$ de rayon $R = OC$.

$$dq = \lambda dx \rightarrow \overrightarrow{dE} = \frac{k\lambda dx}{r^2} \vec{u} \quad dq' = \lambda R d\alpha \rightarrow \overrightarrow{dE'} = \frac{k\lambda R d\alpha}{R^2} \vec{u}$$

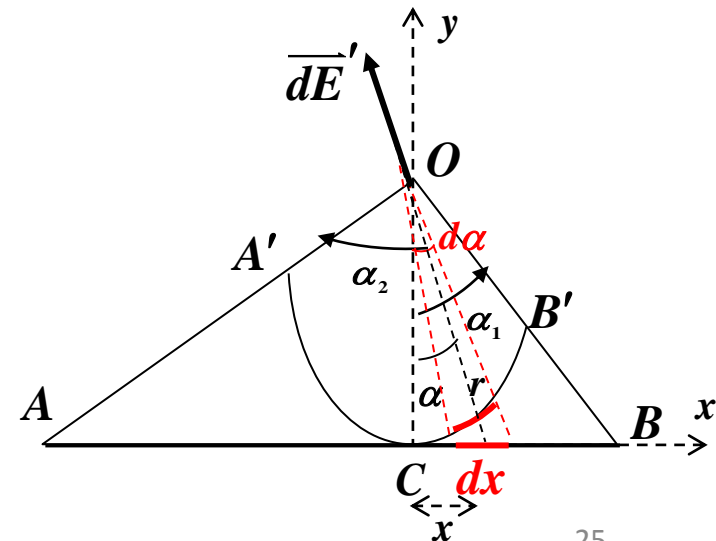
$$x = R \tan \alpha \rightarrow dx = \frac{R d\alpha}{\cos^2 \alpha}; \quad \cos \alpha = \frac{R}{r} \text{ donc } dx = \frac{r^2 d\alpha}{R}$$

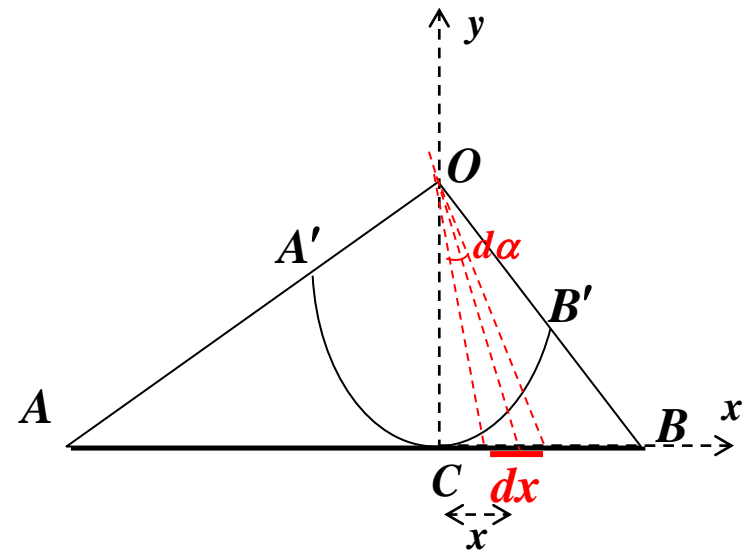
$$\overrightarrow{dE} = \frac{k\lambda dx}{r^2} \vec{u} = \frac{k\lambda}{r^2} \frac{r^2 d\alpha}{R} \vec{u} = \frac{k\lambda d\alpha}{R} = \overrightarrow{dE'}$$

$$\alpha_1 < 0$$

$$\alpha_2 > 0$$

$$E = \int_{\alpha_1 B}^{\alpha_2 A} dE = \int_{\alpha_1 B'}^{\alpha_2 A'} dE' = E'$$





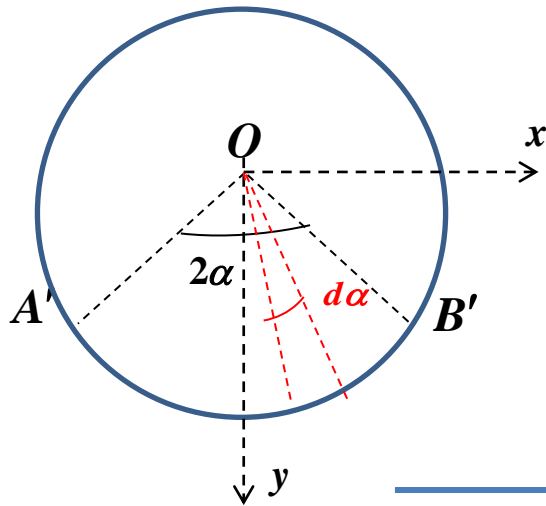
Il lui correspond la charge $dq' = \lambda R d\alpha$
sur l'arc $A'B'$ de rayon $R = OC$.

Soit un segment dx portant une charge $dq = \lambda dx$

$$\overline{dE} \begin{cases} dE_x = -dE \sin \alpha \\ dE_y = dE \cos \alpha \end{cases} \Rightarrow \overline{dE} \frac{k\lambda}{R} \begin{cases} -\sin \alpha d\alpha \\ \cos \alpha d\alpha \end{cases} \Rightarrow \vec{E} \begin{cases} E_x = \frac{k\lambda}{R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -\sin \alpha d\alpha = \frac{k\lambda}{R} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \\ E_y = \frac{k\lambda}{R} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha = \frac{k\lambda}{R} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \end{cases}$$

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = \frac{k\lambda}{R} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \\ E_y = \frac{k\lambda}{R} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \end{cases}$$

Un arc de cercle de rayon R et d'ouverture 2α porte une charge Q uniformément répartie. (A'B')



$$\alpha_2 = -\alpha_1 = \alpha$$

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = \frac{k\lambda}{R} (\cos \alpha - \cos(-\alpha)) = 0 \\ E_y = \frac{k\lambda}{R} (\sin \alpha - \sin(-\alpha)) = \frac{2k\lambda}{R} \sin \alpha \end{cases}$$

$$dq = \lambda R d\alpha \rightarrow \overrightarrow{dE} = \frac{k dq}{r^2} = \frac{k\lambda R d\alpha}{R^2} \vec{u} \text{ et } dV = \frac{k dq}{r} = \frac{k\lambda R d\alpha}{R} = k\lambda d\alpha$$

$$V = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dV = k\lambda \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha = k\lambda(\alpha_2 - \alpha_1) = k\lambda 2\alpha$$

Exercice: 16

On considère un fil rectiligne de longueur infinie portant une densité de charge uniforme $\lambda > 0$ placé suivant l'axe Oy.

1-Ecrire l' expression du champ $\vec{dE}(x)$ créé par un élément de charge $dq = \lambda dy$ en tout point sur un axe ox.

Fils chargé uniformément de densité λ (C/m)

Champ crée par un fils de longueur L à une distance x du fils

$\alpha_1 < 0$ et $\alpha_2 > 0$

Le champ crée par un élément dy au point M

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{r^2} \vec{u} = \frac{k \lambda dy}{r^2} \vec{u}$$

On décompose suivant ox et oy on obtient:

$$\vec{dE} = \begin{cases} dE_x = dE \cos \alpha \\ dE_y = -dE \sin \alpha \end{cases}$$

2-En déduire le champ $\vec{E}(x)$ total en tout point de l'axe ox.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow dy = \frac{x}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

On exprime tout en fonction de l'angle α :

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \Rightarrow r = \frac{x}{\cos \alpha}$$

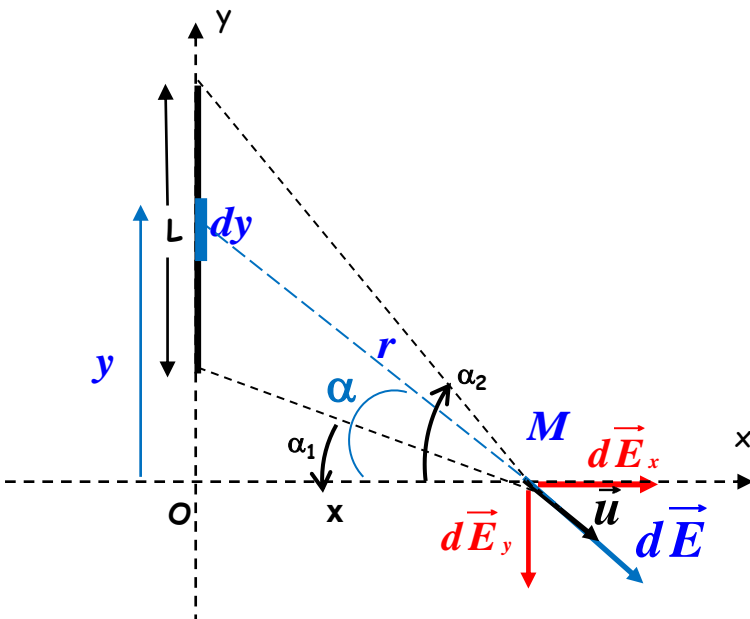
On obtient alors en remplaçant

$$\begin{cases} dE_x = dE \cos \alpha = \frac{k\lambda dy}{r^2} \cos \alpha = \frac{k\lambda}{x} \cos \alpha d\alpha \\ dE_y = -dE \sin \alpha = -\frac{k\lambda dy}{r^2} \sin \alpha = -\frac{k\lambda}{x} \sin \alpha d\alpha \end{cases}$$

En intégrant entre α_1 et α_2 on a :

$$E_x = \frac{k\lambda}{x} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

$$E_y = \frac{k\lambda}{x} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$



-Si le fil est infini , c'est-à-dire: $\alpha_1 = -\pi/2$ et $\alpha_2 = \pi/2$

On obtient:

$$\begin{cases} E_x = \frac{2k\lambda}{x} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \\ E_y = 0 \end{cases}$$

3-Calculer le potentiel V(x) en intégrant la distribution de charge et vérifier la relation entre le champ et le potentiel

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_x dx$$

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int E_x dx = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dx}{x} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln x + Cte$$

Calcul directe du potentiel crée par un fils infini à une distance x du fils

$$dV = \frac{k dq}{r} = \frac{k \lambda dy}{r} = k \lambda \frac{\cos}{x} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{k \lambda}{x} \frac{d\alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \int dV = \frac{k \lambda}{x} \int \frac{d\alpha}{\cos \alpha}$$

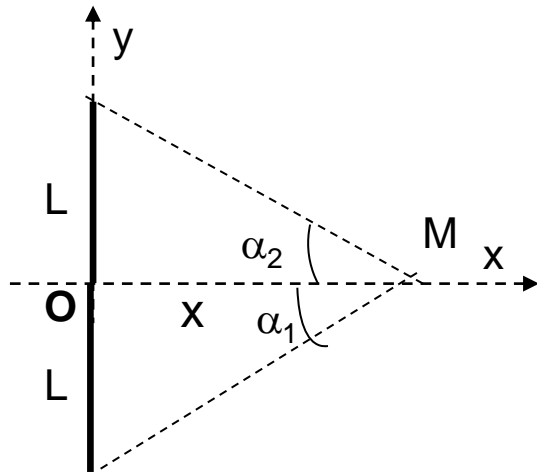
4-Calculer le champ créé par un fil de longueur $2L$ en tout point M du plan équidistant des deux extrémités du fil.

$$\alpha_2 = -\alpha_1 = \alpha \qquad \sin \alpha = \frac{L}{\sqrt{x^2 + L^2}}$$

$$E_x = \frac{k\lambda}{x} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) = \frac{k\lambda}{x} 2 \sin \alpha$$

$$E_y = \frac{k\lambda}{x} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) = 0$$

$$E = \frac{2k\lambda}{x} \sin \alpha$$

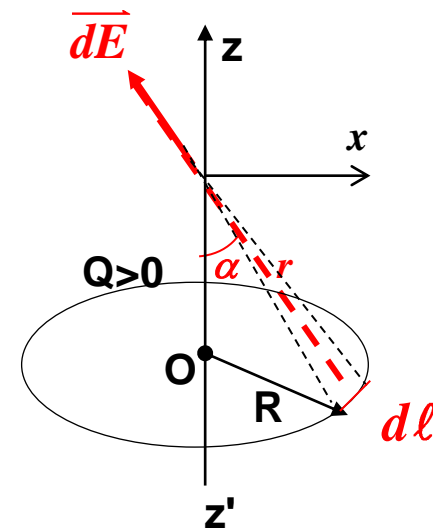


Exercice: 17

Une boucle circulaire de rayon R et de centre O porte une charge Q positive répartie uniformément et de densité linéique λ .

1-Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(z)$ le long de l'axe $z'oz$ perpendiculaire au plan de la boucle.

$$dq = \lambda d\ell \quad \Rightarrow \quad dE = \frac{k dq}{r^2}$$



Par raison de symétrie le champ se trouve sur l'axe $z'oz$.

$$dE = \frac{k dq}{r^2} \quad \Rightarrow \quad dE_z = dE \cos \alpha = \frac{k dq}{r^2} \cos \alpha \Rightarrow dE_z = \frac{k dq}{r^2} \frac{z}{r} = \frac{k z dq}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{k z \lambda d\ell}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\int_0^\ell d\ell = \ell = 2\pi R \quad \Rightarrow \quad E = E_z = \frac{k z \lambda 2\pi R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{k Q z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

2-Donner l'expression du potentiel électrique $V(z)$, en utilisant:
a- Le calcul direct.

$$dq = \lambda d\ell$$

$$dV = \frac{k dq}{r} = \frac{k \lambda d\ell}{r} \Rightarrow V = \frac{k \lambda 2\pi R}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

$$V = \frac{k Q}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

b-L'expression du champ $\vec{E}(z)$. On supposera le potentiel nul à l'infini.

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_z dz \quad \Rightarrow \quad V = kQ \int \frac{-z dz}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{kQ}{(R^2 + z^2)^{1/2}} + C$$

$$V(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad V(z) = \frac{kQ}{(R^2 + z^2)^{1/2}}$$

Exercice: 18

On considère un fil de longueur L , de densité linéique λ positive, qui porte une charge totale Q . Il est placé suivant l'axe des y tel que montré sur la figure.

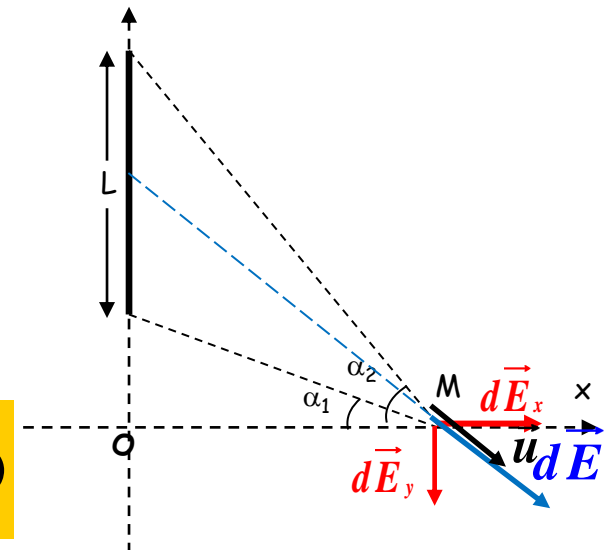
1-Donner l'expression des composantes du champ électrique, E_x et E_y , créé par ce fil au point M situé sur l'axe des x , tel que $OM = x$, en fonction de K , λ , x , α_1 et α_2 .

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{r^2} \vec{u} = \frac{k \lambda dy}{r^2} \vec{u} \quad d\vec{E} = \begin{cases} dE_x = dE \cos \alpha \\ dE_y = -dE \sin \alpha \end{cases}$$

$$E_x = \frac{k \lambda}{x} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)$$

$$E_y = \frac{k \lambda}{x} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

Voir exercice 14



2-Montrer que ce champ s'écrit $\vec{E} = \lambda/2\pi\epsilon_0 x \vec{i}$ lorsque le fil devient infini

-Si le fil est infini , c'est-à-dire: $\alpha_1 = -\pi/2$ et $\alpha_2 = \pi/2$

On obtient:
$$\begin{cases} E_x = \frac{2k\lambda}{x} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} \\ E_y = 0 \end{cases}$$

E est indépendant de la longueur du fils .

$$\vec{E}_M = \lambda/2\pi\epsilon_0 x \vec{i}$$

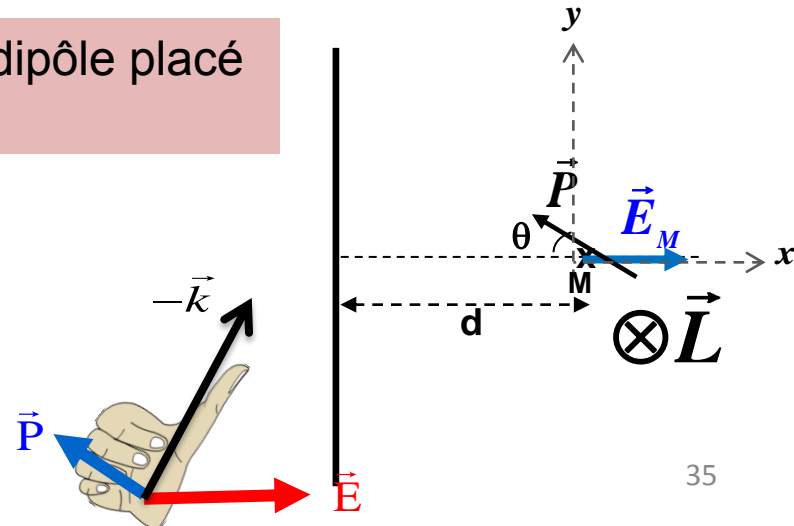
3-Au point M situé à une distance d du fil infini, on place un dipôle \vec{P} mobile autour de son milieu et faisant un angle θ avec l'horizontale

a- Donner l'expression du moment du couple du dipôle placé dans le champ électrique du fil au point M.

Première méthode:

$$\vec{L} = \vec{p} \times \vec{E}_M \Rightarrow \vec{L} = -\frac{\lambda P \sin \theta}{2\pi\epsilon_0 x} \vec{k}$$

$$|\vec{L}| = |\vec{p}| |\vec{E}_M| \sin(\pi - \theta)$$



Deuxième méthode:

$$\vec{L} = \vec{p} \times \vec{E}_M \Rightarrow \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ P_x & P_y & 0 \\ E_x & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{L}_O = -P_y E_x \vec{k} = -(p \sin \theta) E_M (+\vec{k})$$

$$\vec{L} = -P \sin \theta \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 x} (+\vec{k})$$

b-Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de ce dipôle.

$$E_{P_i} = -\vec{P} \cdot \vec{E}_M = P E_M \cos \theta$$

$$E_{P_i} = \frac{\lambda P \cos \theta}{2\pi\epsilon_0 x}$$

$$E_{P_f} = \frac{\lambda P \cos \pi}{2\pi\epsilon_0 x}$$

c-Quel est le travail nécessaire pour que ce dipôle arrive à sa position d'équilibre stable

$$W_{\vec{L}} = -\Delta E_P = E_{P_i} - E_{P_f} = \frac{\lambda P}{2\pi\epsilon_0 x} (\cos \theta - 1)$$

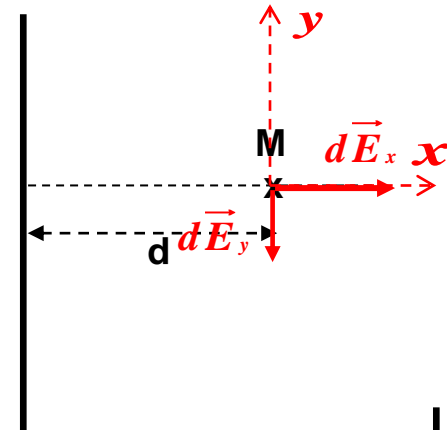
Exercice: 19

On considère un fil de longueur L uniformément chargé, de densité linéique λ positive. Il est placé suivant l'axe des y comme indiqué sur la figure

1-Montrer que les composantes du champ électrique créé par ce fil au point M situé sur l'axe des x , tel que $OM = d$, sont:

$$\vec{E}_M \begin{cases} E_x = \frac{k\lambda}{d} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \\ E_y = \frac{k\lambda}{d} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \end{cases}$$

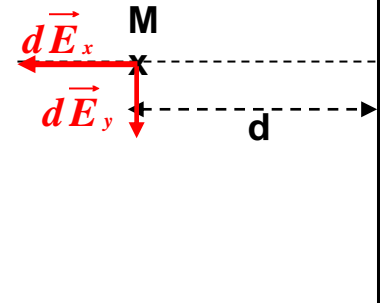
Voir exercice 14



2-Un second fil identique au précédent est placé parallèlement au premier suivant $O'y$ tel que $O'M=d$. En utilisant le résultat de la première question, donner l'expression du champ \vec{E} créé par les deux fils au point M .

$$\vec{E}'_M \begin{cases} E_x = -\frac{k\lambda}{d} (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1) \\ E_y = \frac{k\lambda}{d} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \end{cases}$$

$$\vec{E}_{TM} \begin{cases} 0 \\ E_y = 2\frac{k\lambda}{d} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \end{cases}$$



3-Que devient ce champ électrique si $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi/4$.

$$\vec{E}_{TM} = \frac{k\lambda}{d}(\sqrt{2}-2)\vec{j} \rightarrow \vec{E}_{TM} \begin{cases} 0 \\ \frac{k\lambda}{d}(\sqrt{2}-2) \\ 0 \end{cases}$$

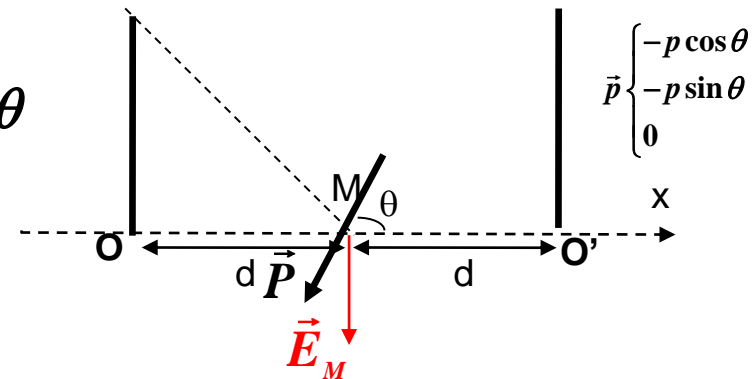
4-On place, maintenant, un dipôle \vec{P} au point M, mobile autour de son milieu et faisant un angle θ avec l'horizontale

a- Donner l'expression du moment du couple \vec{L} du dipôle placé dans le champ électrique au point M en fonction K, λ , L, p et θ

Première méthode:

$$\vec{L} = \vec{p} \times \vec{E}_M \Rightarrow |\vec{L}| = |\vec{p}| |\vec{E}_M| \sin(\pi/2 - \theta) = p E_M \cos \theta$$

$$\vec{L} = p E_M \cos \theta \vec{k} = \frac{k\lambda P}{d} (\sqrt{2}-2) \vec{k}$$



Deuxième méthode:

$$\vec{L} = \vec{p} \times \vec{E}_M \Rightarrow \begin{vmatrix} +\vec{i} & -\vec{j} & +\vec{k} \\ -P_x & -P_y & 0 \\ 0 & -E_M & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{L} = P_x E_M \vec{k} = (p \cos \theta) E_M (+\vec{k})$$

$$\vec{L} = p \cos \theta \frac{k\lambda}{d} (\sqrt{2}-2) (\vec{k})$$

b-Quelle est l'expression de l'énergie potentielle E_p de ce dipôle

$$E_{P_i} = -\vec{P} \cdot \vec{E}_M = -P_y E_M$$

$$E_{P_i} = -\frac{k\lambda P \sin \theta}{d} (\sqrt{2} - 2)$$

$$E_{P_f} = -\frac{k\lambda P}{d} (\sqrt{2} - 2)$$

$$E_{P_i} = 0,6 \frac{k\lambda P \sin \theta}{d}$$

$$E_{P_f} = 0,6 \frac{k\lambda P}{d}$$

c-Quel est le travail W nécessaire pour que ce dipôle arrive à sa position d'équilibre stable.

$$W_{\vec{L}} = -\Delta E_p = E_{P_i} - E_{P_f} = \frac{k\lambda P}{d} (\sqrt{2} - 2) (\sin \theta - 1) = 0,6 \frac{k\lambda P}{d} (1 - \sin \theta)$$

d-Calculer: \vec{L} , E_p , et W si $P = 10^{-15} \text{ C.m}$, $\lambda = 10^{-7} \text{ C/m}$, $\ell = 2 \text{ cm}$, $\theta = \pi/3$

$$\vec{L} = 1,31 \cdot 10^{-11} (\text{N/m})(\vec{k}); \quad W = -0,35 \cdot 10^{-11} (\text{J})$$

Exercice: 20

Soient deux plans infinis parallèles et chargés en surface avec des densités respectives 2σ et σ ($\sigma < 0$)

1) Déterminer le champ électrique \vec{E} dans les Régions A, B et C

$$\vec{E}_A = -\frac{|\sigma|}{\epsilon_0} \vec{j} - \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} \vec{j} = -\frac{3|\sigma|}{2\epsilon_0} \vec{j} = -\vec{E}_C$$

$$\vec{E}_B = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0} \vec{j} - \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} \vec{j} = \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0} \vec{j}$$

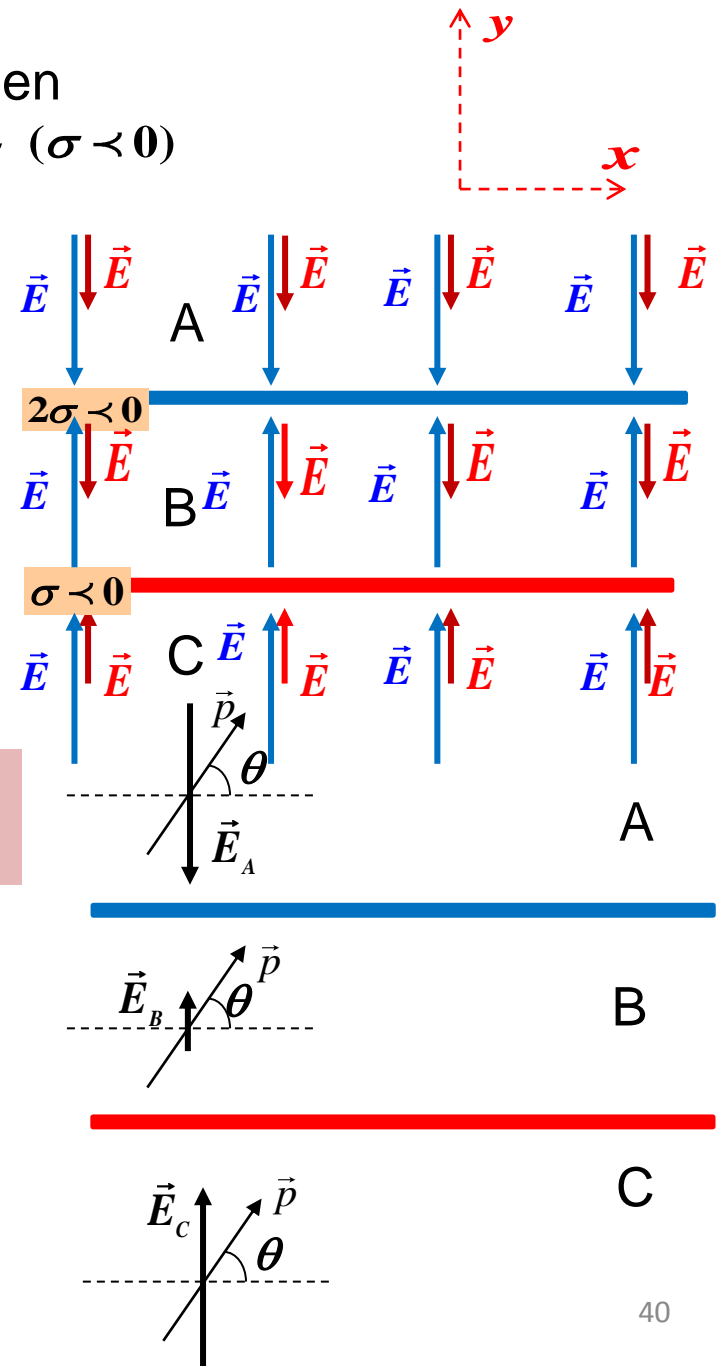
2) On place un dipôle \vec{P} successivement dans ces 3 régions avec une orientation arbitraire θ

a-Déterminer l'énergie potentielle du dipôle, dans les 3 régions, en fonction de s , q et \vec{P}

$$E_{PA} = -\vec{P} \cdot \vec{E}_A = -PE_A \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

$$E_{PB} = -\vec{P} \cdot \vec{E}_B = -PE_B \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$E_{PC} = -\vec{P} \cdot \vec{E}_C = -PE_C \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$



b- En déduire, pour chaque région, les positions d'équilibre stable et instable.

La position d'équilibre stable pour: E_p minimum.

La position d'équilibre instable pour: E_p maximum.

$$E_{p_A} = -\vec{P} \cdot \vec{E}_A = -PE_A \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \left\{ \begin{array}{l} \text{stable} \rightarrow \theta = -\pi/2 \\ \text{instable} \rightarrow \theta = \pi/2 \end{array} \right.$$

$$E_{p_B} = -\vec{P} \cdot \vec{E}_B = -PE_B \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \left\{ \begin{array}{l} \text{stable} \rightarrow \theta = -\pi/2 \\ \text{instable} \rightarrow \theta = \pi/2 \end{array} \right.$$

$$E_{p_C} = -\vec{P} \cdot \vec{E}_C = -PE_C \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \left\{ \begin{array}{l} \text{stable} \rightarrow \theta = \pi/2 \\ \text{instable} \rightarrow \theta = -\pi/2 \end{array} \right.$$

Exercice: 21

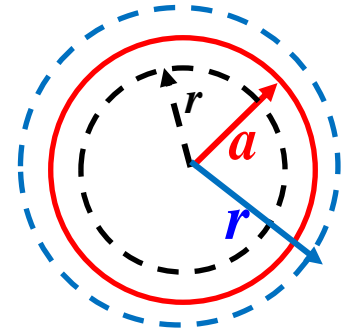
1) Déterminer l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$ créé par une sphère uniformément chargée en surface, en utilisant le théorème de Gauss

Soit une sphère de rayon a uniformément chargée en surface, et de densité σ

Soit une surface de Gauss de rayon r

Le Flux à travers cette surface de Gauss est:

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = E4\pi r^2$$

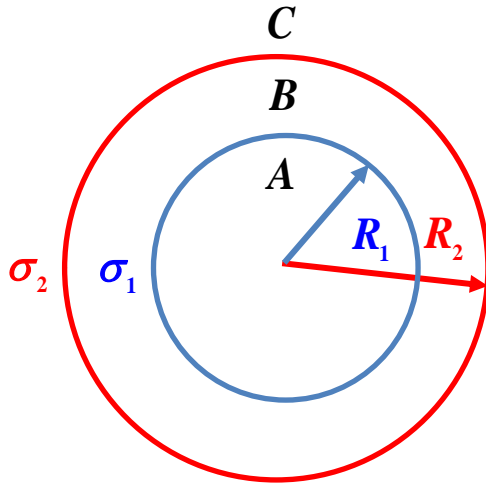


$$\text{Pour } r < a \quad \sum q_{\text{int}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{E}(r) = \vec{0}$$

$$\text{Pour } r > a \quad \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \phi = \frac{\sigma 4\pi a^2}{\epsilon_0} = 4\pi r^2 E \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{\sigma a^2}{\epsilon_0 r^2}$$

$$4\pi a^2 \sigma = Q \Rightarrow E(r) = k \frac{Q}{r^2}$$

2) Deux sphères S_1 et S_2 , concentriques, creuses, d'épaisseurs négligeables et de rayons respectifs R_1 et R_2 , sont chargées uniformément en surface avec des densités respectives $(+4\sigma)$ et $(-\sigma)$.



Calculer la charge Q_1 et Q_2 portée par chacune des 2 sphères. En déduire le champ électrique $\vec{E}(r)$ dans les régions A, B et C ($A : r \leq R_1$; $B : R_1 \leq r \leq R_2$; $C : r \geq R_2$).

. (On donne : $R_2=2R_1=20$ cm et $\sigma=10^{-8}/4\pi$ C/m²)

$$Q_1 = 4\pi R_1^2 \sigma_1 = 4\pi R_1^2 (4\sigma)$$

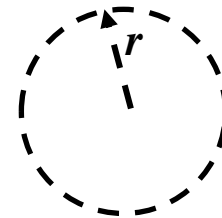
$$Q_2 = 4\pi R_2^2 \sigma_2 = 4\pi R_2^2 (-\sigma) = 4\pi (4R_1^2) (-\sigma) = -Q_1$$

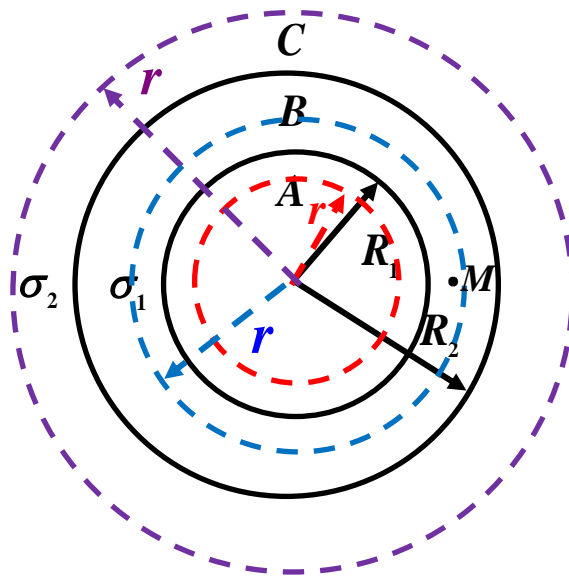
$$Q_1 = -Q_2 = 4 \cdot 10^{-10} \text{ (C)}$$

Soit une surface de Gauss de rayon r

Le Flux à travers cette surface de Gauss est:

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = E4\pi r^2$$





$$A: \text{ Pour } r < R_1 \quad \sum q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_A(r) = \vec{0}}$$

$$dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = -E \cdot dr = 0 \Rightarrow \boxed{V(r) = \text{Cst} = V_A}$$

$$C: \text{ Pour } r > R_2 \quad \sum q_{\text{int}} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E}_C(r) = \vec{0}}$$

$$dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = -E \cdot dr = 0 \Rightarrow \boxed{V(r) = \text{Cst} = V_C}$$

$$B: \text{ Pour } R_1 < r < R_2 \quad \frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Q_1}{\epsilon_0} = \phi = E 4\pi r^2 \Rightarrow \boxed{E_B(r) = \frac{Q_1}{4\pi r^2 \epsilon_0} = \frac{kQ_1}{r^2}}$$

$$dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = -E \cdot dr \Rightarrow V(r) = kQ_1 \int -\frac{dr}{r^2} \Rightarrow \boxed{V_B(r) = \frac{kQ_1}{r} + \text{Cst}}$$

3) Soit un point M situé à 15cm du centre O des 2 sphères. Le potentiel électrique créé en M par ces 2 sphères est de 12 Volts.

Déterminer les expressions du potentiel électrique dans les régions A, B et C.

$$V_B(R') = \frac{kQ_1}{R'} + Cst = 12 \text{ (V)} \Rightarrow Cst = 12 - \frac{kQ_1}{R'}$$

$$V_B(r) = kQ_1 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R'} \right) + 12$$

$$V_A = V_B(R_1)$$



Le potentiel électrique est une courbe continue:



$$V_C = V_B(R_2)$$

a-Quelle est la forme des surfaces équipotentielles dans les régions A, B et C?

On dit que les équipotentielles épousent la forme du conducteur.

Donc dans les régions A, B, C les surfaces équipotentielles sont des sphères concentriques qui ont la même forme que les conducteurs de rayons R_1 et R_2 .

b-En déduire les positions r_1 et r_2 des équipotentielles $V_1 = 24$ Volts et $V_2 = 6$ Volts.
Conclusion

$$V_B(r_1) = kQ_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R'} \right) + 12 = 24 \text{ (V)}$$



$$r_1 = R_1$$

$$V_B(r_2) = kQ_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{R'} \right) + 12 = 6 \text{ (V)}$$



$$r_2 = R_2$$

Exercice: 22

Un cylindre conducteur de rayon R et de longueur infini porte une densité superficielle σ

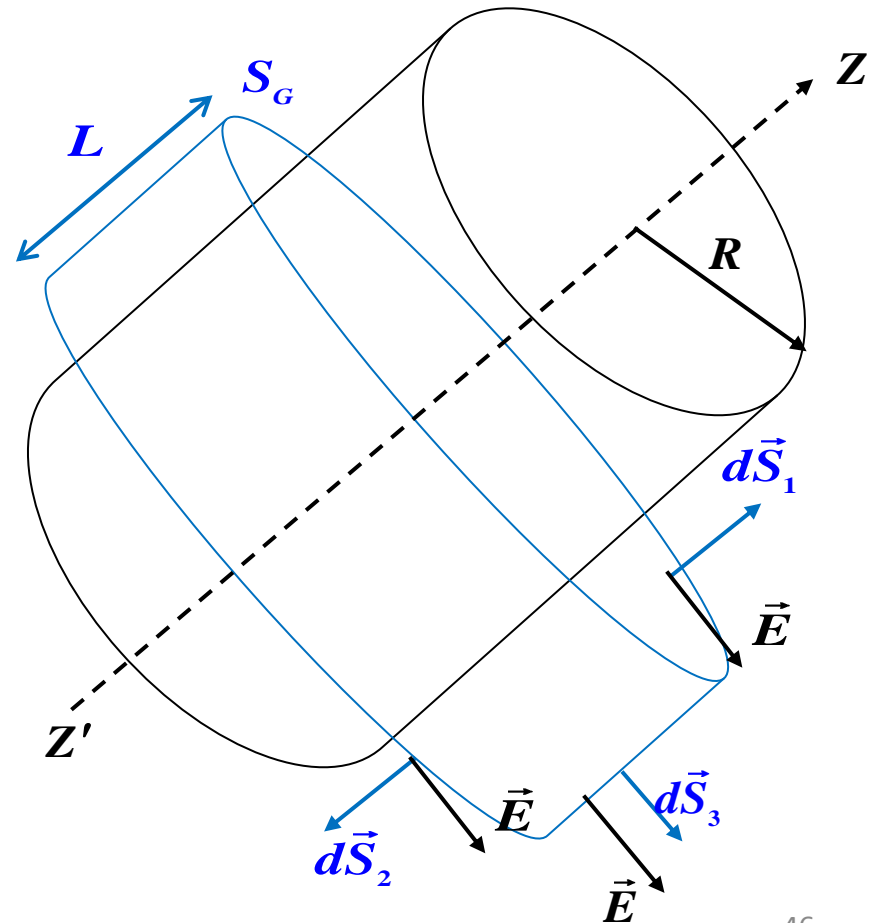
a)-Par application du théorème de GAUSS calculer le champ créé par cette répartition à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre.

a) Soit $z'z$ l'axe de révolution du cylindre.

A cause de la symétrie, le champ électrique est perpendiculaire à cet axe et son module est constant sur tout cylindre coaxial de Rayon r .

Par conséquent la surface de Gauss S_G sera choisie comme un cylindre de rayon r et de longueur L . Le champ étant Perpendiculaire au vecteur surface des deux bases du cylindre de Gauss, le flux à Travers S sera égal au flux à travers la surface latérale S_3 :

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S}_3 = ES_3 = E4\pi rL$$



$$\phi = ES_3 = E2\pi rL$$

$$\sum Q_{\text{int}} \begin{cases} 0 & r < R \\ \sigma 2\pi RL & r > R \end{cases}$$

$$\phi = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

b)-En déduire le potentiel électrique dans tout l'espace, sachant que le potentiel auquel est porté le cylindre est V_0

Le potentiel $V(r)$ s'obtient par: $dV = -\vec{E} \cdot \vec{d\ell}$, $\vec{E} = E_r \vec{u}_r$, $\vec{d\ell} = dr \vec{u}_r$

$$dV = -E \cdot dr \Rightarrow V(r) \begin{cases} C_1 & r < R \\ -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln r + C_2 & r > R \end{cases}$$

Pour $r=R$, on aura $C_1 = V_0$ et $-(\sigma R / \epsilon_0) \ln R + C_2 = V_0 \Rightarrow V(r) \begin{cases} V_0 & r \leq R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \left(\frac{R}{r} \right) + V_0 & r \geq R \end{cases}$

Exercice: 23

On considère qu'un atome de cuivre créé dans l'espace un champ électrique variable tel que:

- Dans tout l'espace entourant le noyau ($r \geq R_n$), le nuage électronique possède une densité de charge de la forme : $\rho(r) = A/r^6$
- l'intérieur du noyau de rayon R_n ($r \leq R_n$) le champ électrique varie de manière linéaire en fonction de r sur l'axe radial

1) En utilisant le fait que l'atome est électriquement neutre, déterminer la valeur de la constante A .

$$Ze + Q_e = 0$$

↗ Ze charge du noyau.
↘ Q_e charge nuage électronique.

$$Q_e = \int_{R_n}^{\infty} \rho dV = \int_{R_n}^{\infty} \frac{A}{r^6} dV = \int_{R_n}^{\infty} \frac{A}{r^6} 4\pi r^2 dr = 4\pi A \int_{R_n}^{\infty} \frac{dr}{r^4} = \frac{4\pi A}{3R_n^3} = -Ze \Rightarrow A = -\frac{3ZeR_n^3}{4\pi}$$

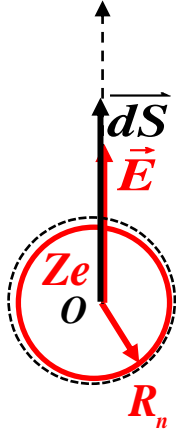
2) Etablir à l'aide du théorème de Gauss, l'expression du champ électrique $\vec{E}(r)$:

Le champ électrique est radial car la distribution des charges a une symétrie sphérique.

Soit une surface de Gauss sphérique de rayon r : $S_G = 4\pi r^2$

Le flux à travers cette surface de Gauss est:

$$\phi = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = ES = E4\pi r^2$$



$$S_G = 4\pi R_n^2$$

$$\phi = E4\pi R_n^2$$

Pour $r = R_n$

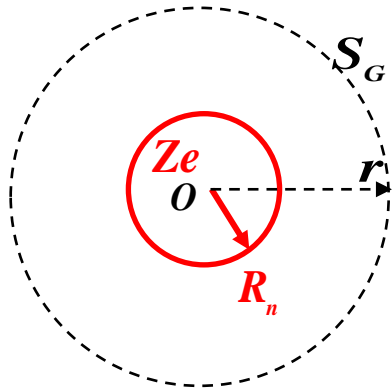
$$\frac{\sum q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Ze}{\epsilon_0} = \phi = E4\pi R_n^2 \Rightarrow E(R_n) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R_n^2}$$

Pour $r \leq R_n$

$$\vec{E}(r) = \alpha \vec{r} \Rightarrow E(R_n) = \alpha R_n = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R_n^2} \Rightarrow \alpha = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R_n^3}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R_n^3} \vec{r}$$

Pour $r > R_n$
$$\frac{\sum q^{\text{int}}}{\epsilon_0} = \frac{Ze + Q_e(r)}{\epsilon_0} = \phi = E 4\pi r^2 \quad Q_e(r) = \int_{R_n}^r \rho dV$$



$$Q_e = \int_{R_n}^r \frac{A}{r^6} 4\pi r^2 dr = 4\pi A \int_{R_n}^r \frac{dr}{r^4} = \frac{4\pi A}{3} \left(\frac{1}{R_n^3} - \frac{1}{r^3} \right) = -Ze \left(1 - \frac{R_n^3}{r^3} \right)$$

$$\phi = \frac{Ze}{\epsilon_0} - \frac{Ze}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{R_n^3}{r^3} \right) = E 4\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{Ze R_n^3}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r^5} \right)$$

3) a- En déduire la variation du potentiel $V(r)$.

Le potentiel $V(r)$ s'obtient par: $dV = -\vec{E} \cdot \vec{d\ell}$, $\vec{E} = E_r \vec{u}_r$, $\vec{d\ell} = dr \vec{u}_r$

Pour $r > R_n \Rightarrow V(r) = -\int \frac{Ze R_n^3}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{dr}{r^5} \right) = \frac{Ze R_n^3}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{4r^4} + C \quad V(\infty) = 0 \Rightarrow C = 0$

La continuité du potentiel donne:

$$\searrow V(R_n) = -\alpha \frac{R_n^2}{2} + C' = \frac{Ze}{16\pi \epsilon_0 R_n} \Rightarrow C' = \frac{3Ze}{16\pi \epsilon_0 R_n}$$

3) b- Représenter qualitativement la variation du champ électrique, et du potentiel électrique pour r variant de 0 l'infini.

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R_n^3} (r) & r \leq R_n \\ \frac{Ze R_n^3}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^5} \right) & r \geq R_n \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 R_n} \left(\frac{3}{4} - \frac{r^2}{2R_n^2} \right) & r \leq R_n \\ \frac{Ze R_n^3}{16\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^4} \right) & r \geq R_n \end{cases}$$

