

## Epreuve Finale de Mécanique

## Exercice 1 : (12 points)

## Partie I :

Une voiture, assimilée à un point matériel  $M$ , se déplace sur une trajectoire  $OABC$ , constituée d'une partie rectiligne  $OA$  et une circulaire  $ABC$  de rayon  $R$  (figure 1).

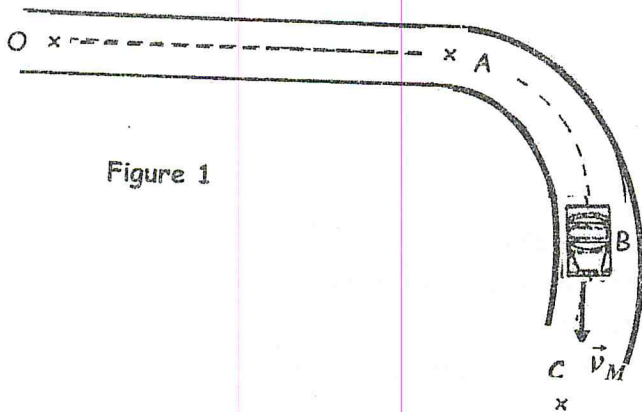


Figure 1

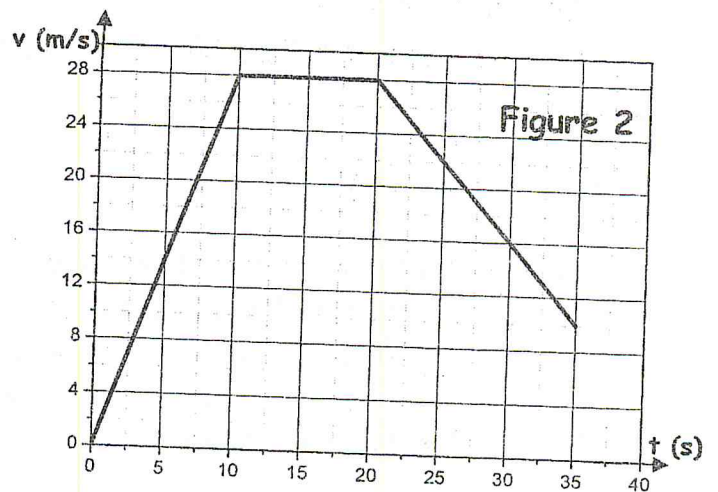


Figure 2

À  $t = 0$  s, la voiture est au point  $O$ . Elle arrive au point  $A$  à  $t = 20$  s et atteint le point  $B$  à  $t = 30$  s avec une accélération de  $2.18 \text{ m/s}^2$ . La figure 2 représente l'évolution de la vitesse de la voiture  $M$  en fonction du temps.

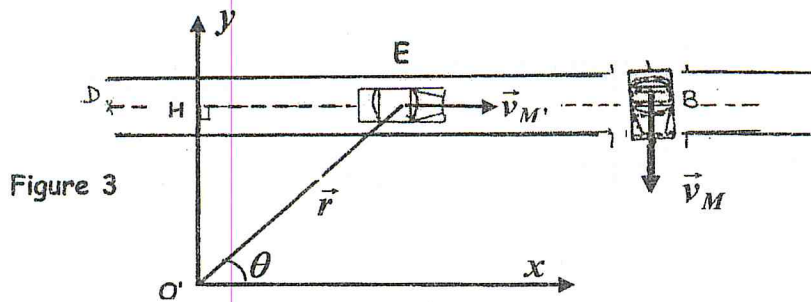
- 1- Ecrire les équations horaires dans la partie  $OA$  en précisant la nature du mouvement.
- 2- Quelle est la longueur de l'arc  $AB$ .
- 3- Tracer le graphe de l'accélération tangentielle entre 0 et 35 s.
- 4- Déterminer le rayon de courbure  $R$  au point  $B$ .
- 5- Dessiner les vecteurs vitesse et accélération, à  $t = 30$  s.

## Partie II :

Une seconde voiture, assimilée à un point matériel  $M'$ , se déplace avec une vitesse constante  $V_M$  sur une route  $DEB$  perpendiculaire à la partie circulaire  $ABC$  en  $B$ . Elle est repérée par ses coordonnées polaires  $(r, \theta)$  au point  $E$  (figure 3).

On donne la distance  $O'H = 500 \text{ m}$ , l'angle  $\theta = 30^\circ$  et la vitesse angulaire

$$\frac{d\theta}{dt} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ rad/s}.$$

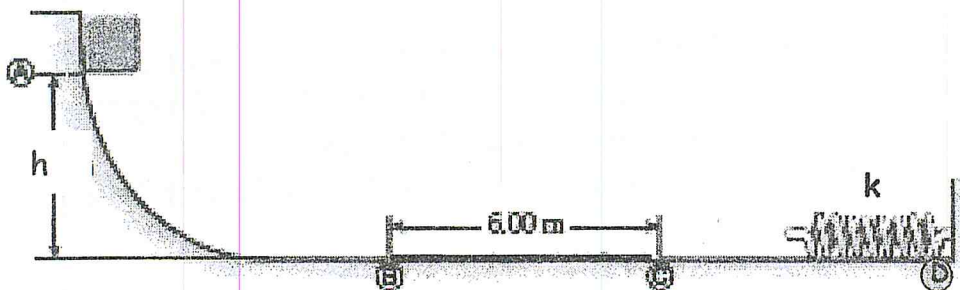


- 1- Représenter, en coordonnées polaires, les composantes  $\vec{V}_r$  et  $\vec{V}_\theta$  de la vitesse  $\vec{V}_{M'}$ .
- 2- Déduire l'expression de la vitesse  $V_M$  au point E en fonction de  $V_0$ .
- 3- Calculer la valeur de  $V_{M'}$ .
- 4- Dessiner la vitesse  $\vec{V}_{M/M'}$  de M par rapport à M' et calculer son module.

### Exercice 2 : (08 points)

On dispose d'une piste constituée de deux parties parfaitement lisses AB et CD et d'une partie rugueuse BC longue de 6 m (voir figure). A l'extrémité de la piste est placé un ressort de constante de raideur  $k = 2250 \text{ N/m}$ .

Un bloc de masse  $m = 10 \text{ kg}$  est lâché, sans vitesse initiale, du point A situé à une hauteur  $h = 5 \text{ m}$ . On donne  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



- 1- Déterminer la vitesse au point B  
La masse arrive sur le ressort et la compression maximale est de 30 cm par rapport à sa longueur à vide.
- 2- Quelle est la valeur de la vitesse au point C.
- 3- Représenter qualitativement les forces agissant sur la masse entre B et C.
- 4- Donner l'expression de l'accélération dans cette région.
- 5- En utilisant la variation de l'énergie totale entre B et C, déterminer l'expression du coefficient de frottements dynamique sur la partie BC.
- 6- Donner la valeur de ce coefficient et celle de l'accélération.

## Corrigé de l'examen final de mécanique

### Exercice 1 :(12 points)

#### Partie I :

1- Phases du mouvement entre 0 et 20 s :

Phases	a (m/s <sup>2</sup> )	V(m/s)	x(m)	Nature
Entre 0 et 10s	2.8	2.8 t	1.4 t <sup>2</sup>	Mouvement rectiligne uniformément accéléré
Entre 10et 20	0	28	28t-140	Mouvement rectiligne uniforme

1.5

1.5

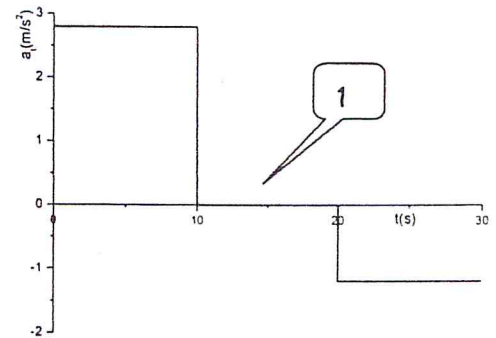
2- L'arc AB :  $AB = \int_{20}^{30} v(t)dt = \text{aire sous } v(t) = 220 \text{ m}$

1

3- Entre 0 et 10 s :  $a_1 = 2.8 \text{ m/s}^2$

Entre 10 et 20 s :  $a_2 = 0 \text{ m/s}^2$

Entre 20 et 30 s :  $a_3 = -1.2 \text{ m/s}^2$



1

4- A t = 30 s on a

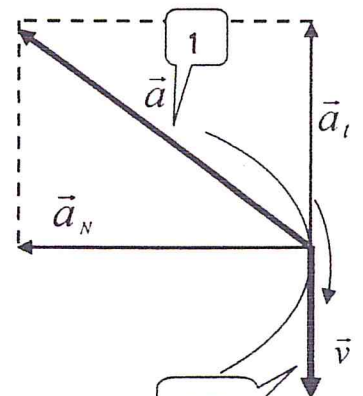
$a = 2.18 \text{ m/s}^2$  et  $a_t = -1.2 \text{ m/s}^2$  alors:  $a_N = 1.82 \text{ m/s}^2$

et  $R = \frac{v^2}{a_N} \approx 140 \text{ m}$

1

0.5

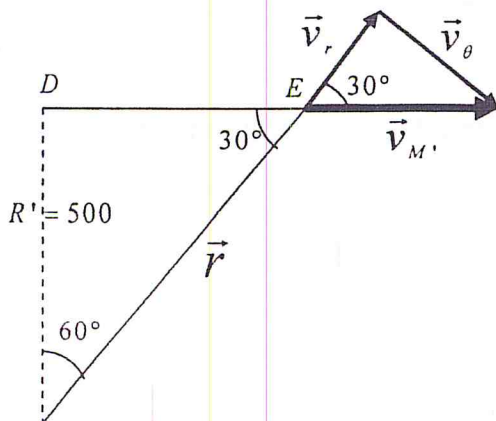
5- t = 30 s  $v = 16 \text{ m/s}$  et  $a_t = -1.2 \text{ m/s}^2$  et  $a_N = 1.82 \text{ m/s}^2$



0.5

#### Partie II:

1 - Vitesse en coordonnées polaires:



0.5

2- vitesse de la voiture en fonction de  $v_\theta$ :

$$\sin 30^\circ = \frac{v_\theta}{v_{M'}} = \frac{R'}{r} \text{ et } r = \frac{R'}{\sin 30^\circ} = 1000 \text{ m}$$

0.5

$$v_{M'} = \frac{v_\theta}{\sin 30^\circ} = \frac{r}{\sin 30^\circ} \frac{d\theta}{dt}$$

1

3- Vitesse de M' :

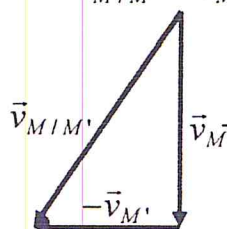
$$v_{M'} = 12 \text{ m/s}$$

0.5

4- Vitesse de M par rapport à M' :

$$\vec{v}_{M/M'} = \vec{v}_M - \vec{v}_{M'}$$

0.5



0.5

D'où :  $v_{M/M'} = 20 \text{ m/s}$

0.5



Exercice 2 : (08 points)

1- Pas de frottements  $\Rightarrow E_{TA} = E_{TB}$

0.5

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \Rightarrow v_B = \sqrt{2gh} \Rightarrow v_B = 10 \text{ m/s}$$

0.5

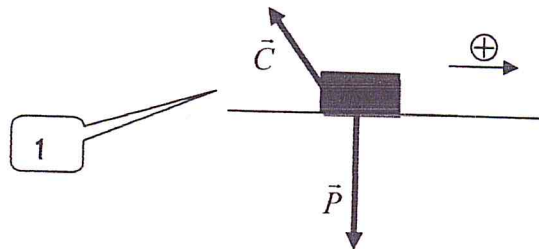
2- Pas de frottements  $\Rightarrow E_{TC} = E_{TE}$

1

$$\frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow v_C = \sqrt{\frac{kx^2}{m}} \Rightarrow v_C = 4.5 \text{ m/s}$$

0.5

3- Représentation des forces :



4- Expression de l'accélération :

$$\vec{P} + \vec{C} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} \text{ox : } -C_x = ma \\ C_y - P = 0 \end{cases} \text{ et } C_x = \mu_g mg \Rightarrow a = -\frac{C_x}{m} = -\mu_d g$$

1

0.5

5- Expression du coefficient de frottement :

$$\Delta E_T = W_{\vec{C}_x} \Rightarrow E_{TC} - E_{TB} = -C_x BC \Rightarrow v_C^2 - v_B^2 = -2\mu_g g BC \Rightarrow \mu_g = \frac{(v_B^2 - v_C^2)}{2gBC}$$

0.5

6- Valeur coefficient de frottement et accélération :

$$\mu_g = 0.665 \text{ et } a = -6.65 \text{ m/s}^2.$$

0.5

0.5

1.5



## Epreuve Finale Mécanique

Deux corps A et B de masse  $m_A$  et  $m_B$  respectivement, sont reliés par un fil inextensible passant par la gorge d'une poulie de masse négligeable. Initialement le corps B se trouve à une hauteur  $h$  du sol, il est lâché sans vitesse initiale.

Le contact entre le corps A et le plan horizontal est caractérisé par des coefficients de frottement statique  $\mu_s$  et dynamique  $\mu_g$ .

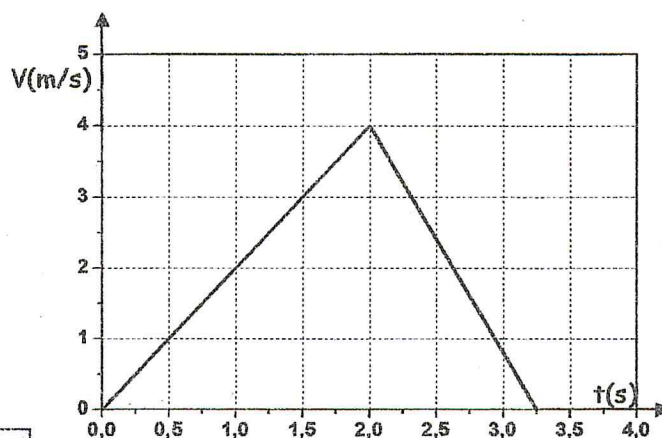
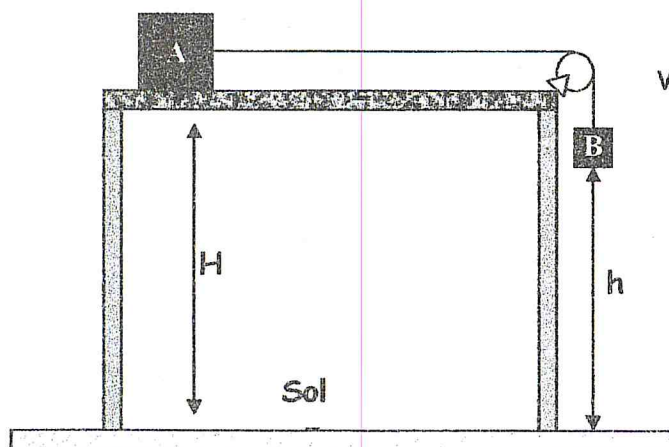
On suppose que le corps B s'immobilise en touchant le sol.

Données :  $\mu_s = 0.6$ ,  $\mu_g = 0.326$ ,  $m_A = 6$  kg,  $h = 4$  m,  $g = 9.81$  m/s<sup>2</sup>

Les parties I, II et III sont indépendantes

### Partie I : (05.5 points)

Le graphe donnant l'évolution de la vitesse en fonction du temps de la masse A est donné par :



- 1- Tracer le diagramme de l'accélération en fonction du temps (1 point)
- 2- Déterminer la nature de chaque phase. Justifiez (1.5 points)
- 3- Déterminer la distance parcourue par A dans la première phase (0.5 points)
- 4- Déterminer la distance parcourue par la masse A dans la seconde phase. (0.5 points)
- 5- Représenter le vecteur vitesse,  $(\vec{v}_{A/B})$ , de la masse A par rapport à la masse B aux instants  $t_1 = 1$  s et  $t_2 = 2.5$  s et calculer son module. (2 points)

### Partie II : (09.5 points)

- 1- Calculer la valeur minimale de la masse B ( $m_{Bmin}$ ) pour que le système se mette en mouvement. (02.5 points)
- 2- On prend, maintenant, la valeur de la masse B,  $m_B = 4$  kg, le système se met en mouvement jusqu'à l'arrêt. (a- 02 points, b- 04 points, c- 01 point)
  - a- Représenter qualitativement les forces agissant sur A et B dans chaque phase.
  - b- En déduire l'expression des accélérations dans chaque phase. Donner leur valeur.
  - c- Exprimer et calculer la vitesse à la fin de la première phase.

### Partie III : (05 points)

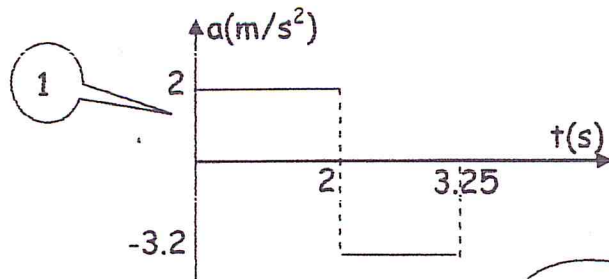
- 1- Si la vitesse à la fin de la première phase est de 4 m/s et en utilisant des considérations énergétiques sur le système des deux masses (A+B), donner l'expression et la valeur du coefficient de frottement  $\mu_g$  entre la table et le corps A.

**Corrigé de l'épreuve finale (2009/2010)**  
(Sections ST : B, D, L, N, T, Y, Z)

Partie I : (05.5 points)

1- Accélération :

Entre 0 et 2 s :  $a_1 = 2 \text{ m/s}^2$   
Entre 2 et 3.25 s :  $a_2 = -3.2 \text{ m/s}^2$



2- Nature du mouvement :

Entre 0 et 2 s :  $a_1 = \text{Cte}$  et  $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$  Mouvement rectiligne uniformément accéléré

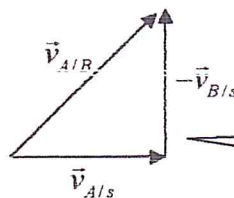
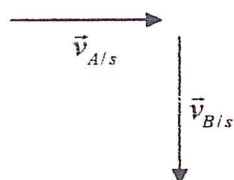
Entre 2 et 3.25 s :  $a_2 = \text{Cte}$  et  $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$  Mouvement rectiligne uniformément décéléré

3- Distance parcourue dans 1<sup>ère</sup> phase :  $d_1 = \int v dt = \text{Aire sous } v(t) = 4 \text{ m} = h$

4- Distance parcourue dans 2<sup>ème</sup> phase :  $d_2 = \int v dt = \text{Aire sous } v(t) = 2.5 \text{ m}$

5- Vitesse de A par rapport à B  $\vec{v}_{A/s} = \vec{v}_{A/B} + \vec{v}_{B/s} \Rightarrow \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_{A/s} - \vec{v}_{B/s}$

- à  $t = 1 \text{ s}$   $v_{A/s} = v_{B/s} = 2 \text{ m/s}$  donc :  $v_{A/B} = \sqrt{v_{A/s}^2 + v_{B/s}^2} = \sqrt{8} = 2.82 \text{ m/s}$



- à  $t = 2.5 \text{ s}$   $v_{A/s} = 2.4 \text{ m/s}$  et  $v_{B/s} = 0$  donc  $v_{A/B} = v_{A/s} = 2.4 \text{ m/s}$  (du graphe  $v(t)$ )

Partie II : (09.5 points)

1- Masse de B minimale :

Sur A :  $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}_A + \vec{C} + \vec{T}_A = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} ox : T_A - C_x = 0 \\ oy : C_y - P_A = 0 \end{cases}$

Sur B :  $\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P}_B + \vec{T}_B = \vec{0} \Rightarrow P_B - T_B = 0$

fil inextensible :  $T_A = T_B$

En combinant ces relation avec :  $\mu_s = \frac{C_x}{C_y}$  on a :  $m_{Bmin} = \mu_s m_A \Rightarrow m_{Bmin} = 3.6 \text{ kg}$

2- a- Forces agissant sur A et B dans 1<sup>ère</sup> phase :

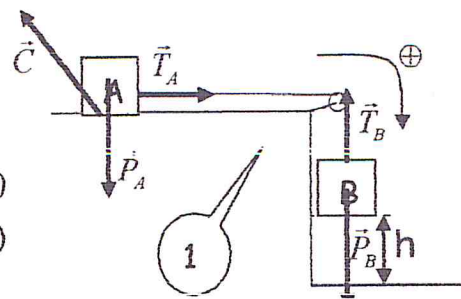
- Accélération dans 1<sup>ère</sup> phase

Sur A :  $\sum \vec{F} = m_A \vec{a} \Rightarrow \vec{P}_A + \vec{C} + \vec{T}_A = m_A \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} ox : T_A - C_x = m_A a & \text{---(1)} \\ oy : C_y - P_A = 0 & \text{---(2)} \end{cases}$

Sur B :  $\sum \vec{F} = m_B \vec{a} \Rightarrow \vec{P}_B + \vec{T}_B = m_B \vec{a} \Rightarrow P_B - T_B = m_B a & \text{---(3)}$

En combinant (1) + (3) avec  $T_A = T_B$  et  $C_x = \mu_g C_y$  on a :

$$a = \frac{(m_B - \mu_g m_A)}{(m_A + m_B)} g \quad \text{A.N : } a = 2 \text{ m/s}^2$$



b- Forces dans 2<sup>ème</sup> phase :

- Accélération dans la 2<sup>ème</sup> phase :

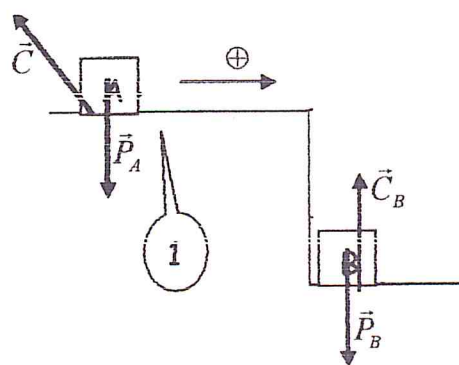
$$\sum \vec{F} = m_A \vec{a} \Rightarrow \vec{P}_A + \vec{C} = m_A \vec{a}_2 \Rightarrow \begin{cases} ox : -C_x = m_A a_2 & \text{---(1)} \\ oy : C_y - P_A = 0 & \text{---(2)} \end{cases}$$

On tire que :  $-\mu_g mg = ma_2 \Rightarrow \vec{a}_2 = -\mu_g g$  et  $\vec{a}_2 = -3.2 \text{ m/s}^2$

c- Vitesse à la fin de la 1<sup>ère</sup> phase :

$$v_f^2 - v_i^2 = 2a_1 d_1 \Rightarrow v_f = \sqrt{2a_1 d_1} \quad \text{A.N : } v_f = 4 \text{ m/s}^2$$

Ou alors du graphe  $v_f = v(2 \text{ s}) = 4 \text{ m/s}$



Partie III : (05 points)

Comme il y a des frottements  $\Delta E_T = W_{\vec{C}_x}$  (On prend  $E_p = 0$  au niveau du sol)

$$E_T^i = m_B gh + m_A gH \quad E_T^f = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_f^2 + m_A gH$$

et donc :  $\Delta E_T = E_T^f - E_T^i = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_f^2 - m_B gh$

$$W_{\vec{C}_x} = \int \vec{C}_x \cdot d\vec{l} = - \int_A^f C_x dx = -C_x d_1 = -\mu_g m_A g d_1 \quad (\text{avec : } h = d_1) \text{ on obtient :}$$

$$\mu_g = \frac{2gm_B h - (m_A + m_B)v_f^2}{2gm_A h} \quad \mu_g = 0.327$$



## EPREUVE FINALE MECANIQUE

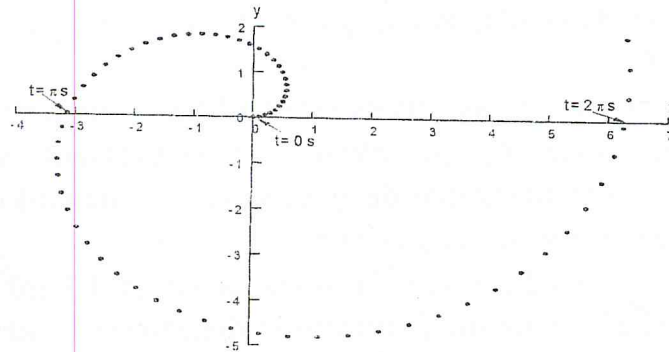
(1 heure 30 minutes)

### EXERCICE 1: (6.5 points)

Le mouvement d'une particule M se déplaçant dans le plan (xoy) est décrit par les équations suivantes :

$$x(t) = \alpha t \cos \beta t \quad \text{et} \quad y(t) = \alpha t \sin \beta t$$

où  $\alpha = 1 \text{ m/s}$ ,  $\beta = 1 \text{ rd/s}$  et  $t$  varie entre 0 et  $2\pi$  secondes. La figure ci - dessous représente la trajectoire décrite par la particule M.



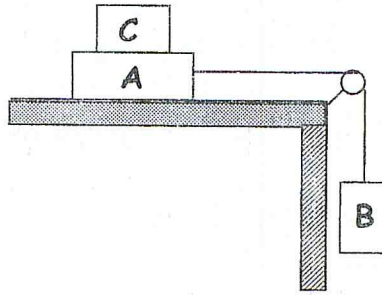
- 1- Déterminer les composantes du vecteur vitesse  $\vec{v}$  de la particule. Déduire son module.
- 2- Déterminer les composantes du vecteur accélération  $\vec{a}$  de la particule. Déduire son module.
- 3- Représenter les vecteurs vitesses et accélérations, sur le document fourni (page 3), aux instants  $t_1 = 0 \text{ s}$  et  $t_2 = \pi \text{ s}$

Echelles :      vitesse :      1 cm  $\longrightarrow$  0.5 m/s  
                          accélération :      1 cm  $\longrightarrow$  0.5 m/s<sup>2</sup>

- 4- a- Déterminer les expressions des composantes intrinsèques  $\vec{a}_t$  et  $\vec{a}_n$  de l'accélération, en fonction du temps.
- b- Déduire le rayon de courbure de la trajectoire en fonction du temps.

## EXERCICE 2 : (7 points)

Le système suivant est constitué de deux corps A et B, de même masse, reliés entre eux par un fil inextensible de masse négligeable à travers la gorge d'une poulie de masse négligeable. Le corps A repose sur un plan horizontal, le contact entre A et le plan est caractérisé par les coefficients de frottement statique  $\mu_s = 0.8$  et dynamique  $\mu_d$  inconnu. Un corps C est posé sur la masse A. On donne :  $m_A = m_B = 20 \text{ kg}$  et  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



- 1- a- Déterminer la masse minimale,  $m_{Cmin}$ , que doit avoir le corps C pour empêcher le déplacement du corps A.  
b- Représenter, qualitativement, les forces agissant sur chaque masse.
- 2- Soit  $m_C$  la masse du corps C, qui permet le mouvement du système, trouver l'accélération du corps C qui l'empêche de glisser sur A, sachant que le coefficient de frottement statique entre A et C est  $\mu_s = 0.8$ .
- 3- On supprime le corps C, l'accélération du système (A et B) est alors  $a_0 = 1.5 \text{ m/s}^2$ . Trouver la valeur du coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$  entre le corps A et le plan.

## EXERCICE 3: (6.5 points)

Un satellite supposé ponctuel de masse  $m$ , décrit autour de la Terre une trajectoire circulaire de rayon  $r$ . On considère la Terre sphérique de rayon  $R$  et de masse  $M$ . On désigne par  $g_0$  l'accélération de la pesanteur au sol, par  $h$  l'altitude à laquelle se trouve le satellite.

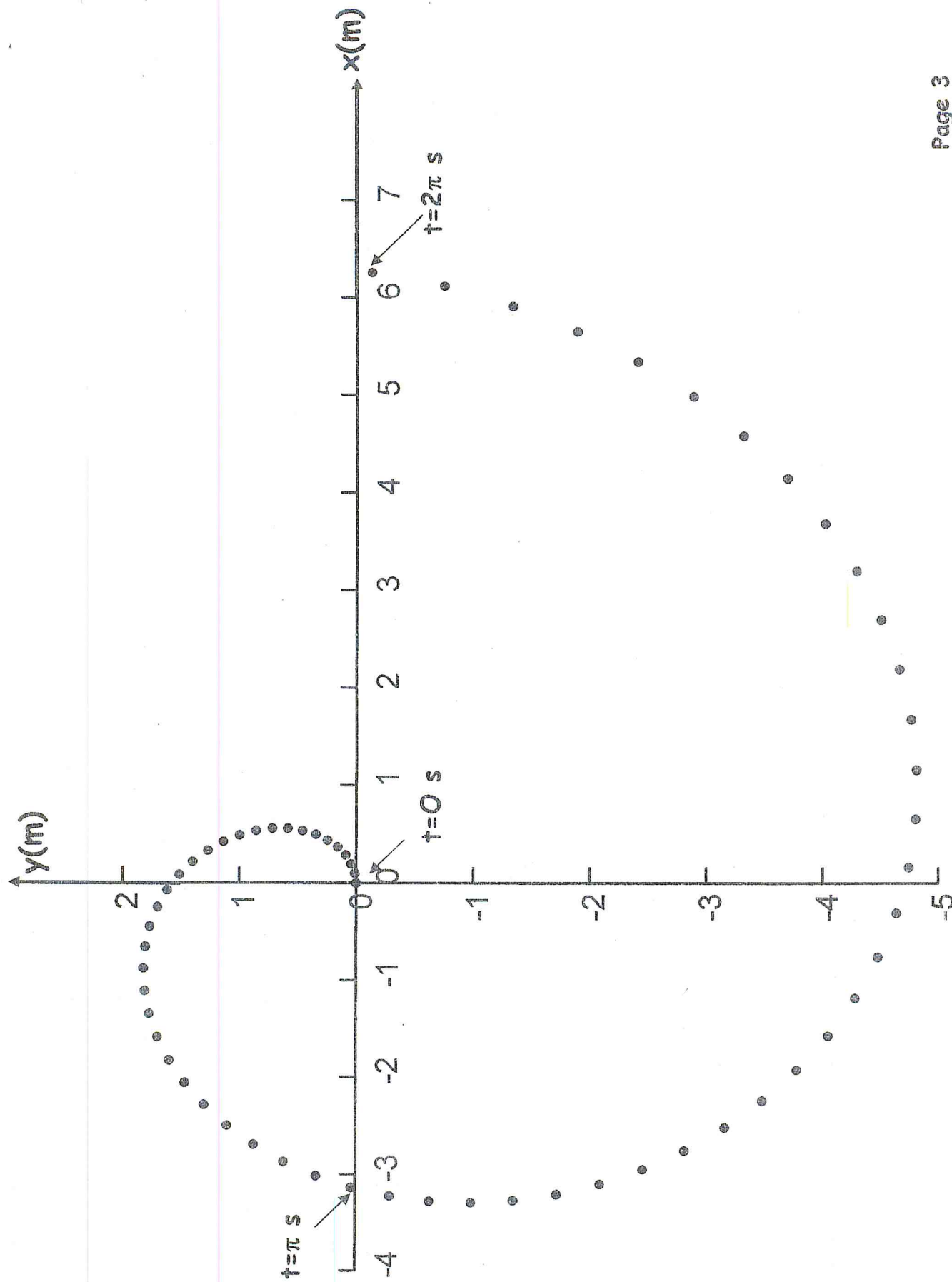
- 1- Calculer la vitesse  $v$  du satellite, et sa période de révolution  $T$  ?
- 2- Un autre satellite décrit une trajectoire de rayon  $r_1$  et sa période est  $T_1$ , exprimer le rapport des périodes  $T$  et  $T_1$ , en fonction du rapport des rayons  $r$  et  $r_1$  (loi de Kepler) ?
- 3- Exprimer l'énergie cinétique  $E_c$ , l'énergie potentielle  $E_p$  et l'énergie mécanique  $E_m$  du satellite en fonction de  $g_0$ ,  $m$ ,  $R$  et  $h$ . L'énergie potentielle est nulle pour une altitude infinie.
- 4- Exprimer la vitesse du satellite en fonction de l'altitude  $h$  ; en déduire la variation de vitesse en fonction d'une faible variation d'altitude  $\Delta h$  ?

Application numérique :  $R = 6400 \text{ km}$ ;  $h = 250 \text{ km}$ ;  $\Delta h = 10 \text{ km}$ ;  $g_0 = 9.8 \text{ m/s}^2$ .

Nom :

Prénom :

Groupe :





## Corrigé de l'Epreuve finale de Mécanique

### Exercice 1: (6.5 pts)

1- Le vecteur vitesse :

$$\begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \cos t - t \sin t \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \sin t + t \cos t \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1 + t^2}$$

2- Le vecteur accélération :

$$\begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = -2 \sin t - t \cos t \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = 2 \cos t - t \sin t \end{cases} \Rightarrow a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4 + t^2}$$

3- À  $t = 0s$  :  $\begin{cases} v_x = 1 \\ v_y = 0 \end{cases} \text{ m/s}$  et  $\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 2 \end{cases} \text{ m/s}^2$  à  $t = \pi$  :  $\begin{cases} v_x = -1 \\ v_y = -\pi \end{cases} \text{ m/s}$  et  $\begin{cases} a_x = \pi \\ a_y = -2 \end{cases} \text{ m/s}^2$

(voir représentation voir la trajectoire)

4- a - Composantes intrinsèques de l'accélération:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \quad a_N = \sqrt{a^2 - a_t^2} = \frac{t^2 + 2}{\sqrt{1+t^2}}$$

b - Rayon de courbure :  $\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{(t^2 + 1)^{3/2}}{t^2 + 2}$

### Exercice 2: (7 pts)

1- masse minimale de C pour que A ne se déplace pas :

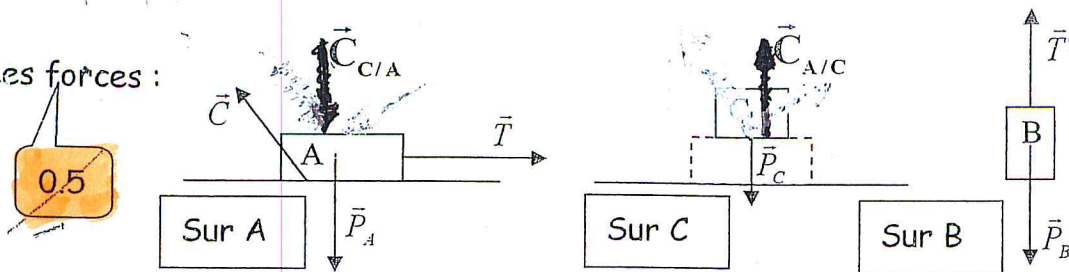
sur A+C :  $\vec{P}_A + \vec{P}_C + \vec{C}_A + \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \text{ox} : T - C_{Ax} = 0 \rightarrow (1) \\ \text{oy} : C_{Ay} - (m_A + m_C)g = 0 \rightarrow (2) \end{cases}$

sur B :  $\vec{P}_B + \vec{T}' = \vec{0} \Rightarrow P_B - T' = 0 \rightarrow (3)$  Fil inextensible donc  $T = T'$

En combinant 1-2 et 3 on tire  $C_{Ax}$  et  $C_{Ay}$  et comme  $\mu_s = C_{Ax} / C_{Ay}$  on a :

$$m_{Cmin} = \frac{m_B}{\mu_s} - m_A \Rightarrow \text{A.N: } m_{Cmin} = 5 \text{ kg}$$

b- Les forces :



2- C ne glisse pas par rapport à A donc leur accélération est la même  $a = a_A = a_C$ . On écrit la relation fondamentale pour le corps C.

$$\vec{P}_C + \vec{C}_{A/C} = m_C \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} ox: C_{xA/C} = m_C a \\ oy: C_{yA/C} = m_C g \end{cases} \Rightarrow \mu_s = \frac{C_{xA/C}}{C_{yA/C}} = \frac{a}{g} \Rightarrow a = \mu_s g = 8 \text{ m/s}^2$$

3- Coefficient de frottement dynamique :

$$\text{Sur A : } \vec{P}_A + \vec{C}_A + \vec{T} = m_A \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} ox: T - C_{Ax} = m_A a \\ oy: C_{Ay} - P_A = 0 \end{cases} \quad \text{sur B : } \vec{P}_B + \vec{T}' = m_B \vec{a} \Rightarrow P_B - T' = m_B a$$

$$\text{En combinant ces équations on a : } \mu_d = \frac{m_B(g - a) - m_A a}{m_A g} \Rightarrow \mu_d = 0.7$$

### Exercice 3: (6.5 pts)

1- au cours de sa rotation le satellite est soumis à la force :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2} \vec{u} = m \frac{v^2}{r} \vec{u} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = R \sqrt{\frac{g_0}{r}} \quad v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} = \frac{2\pi}{R} \sqrt{\frac{r^3}{g_0}}$$

2- on trouve la même expression pour la période T' en faisant le rapport on a :

$$\left(\frac{T}{T'}\right)^2 = \left(\frac{r}{r'}\right)^3$$

3- L'énergie potentielle du satellite est :

$$E_p(h) = -\frac{GMm}{(R+h)} = -mg_0 \frac{R^2}{R+h}$$

$$\text{L'énergie cinétique } E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{GM}{(R+h)} = \frac{1}{2} mg_0 \frac{R^2}{R+h}$$

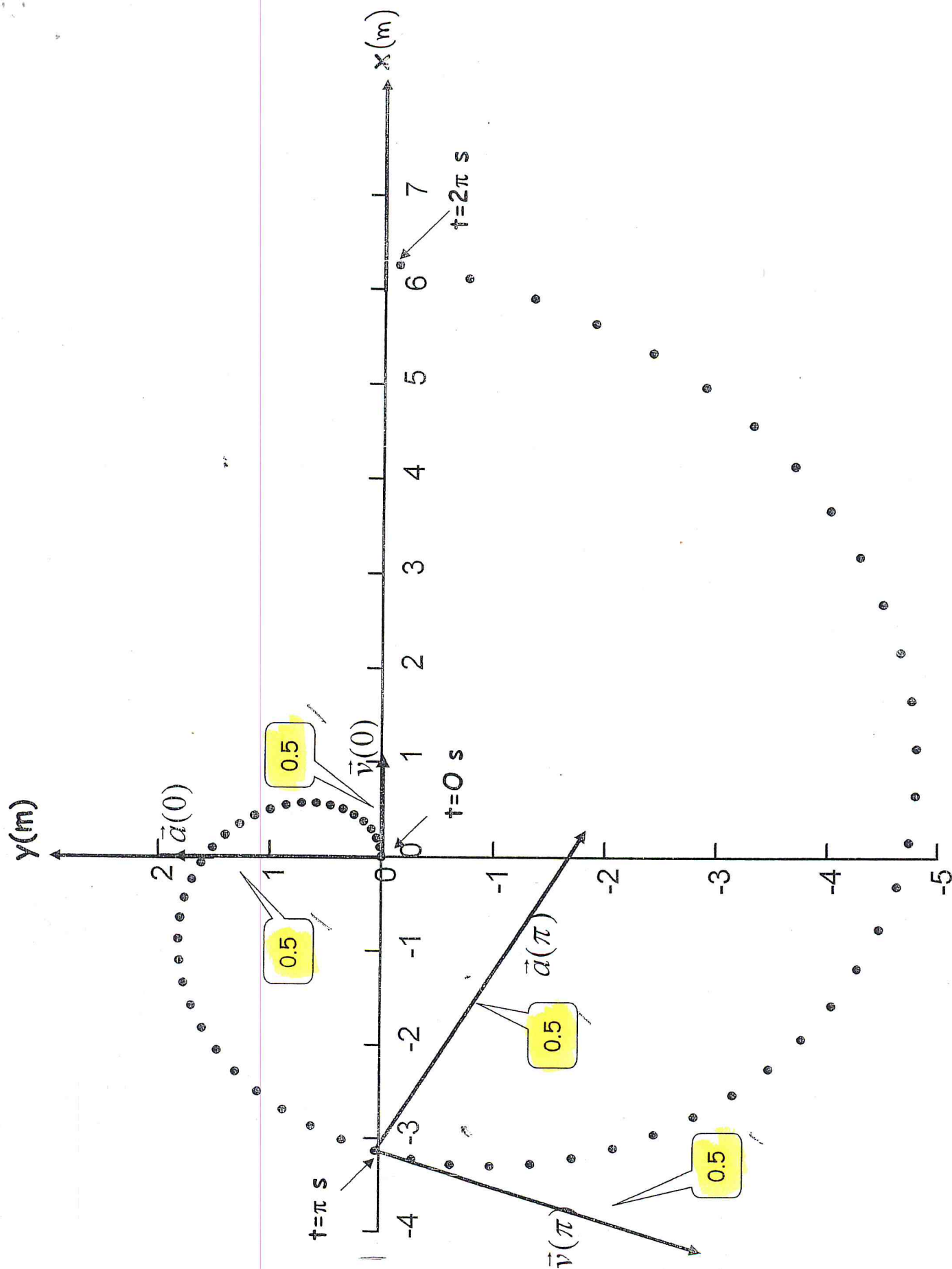
$$\text{et l'énergie mécanique totale } E_T = E_c + E_p = -\frac{1}{2} \frac{GM}{(R+h)} = -\frac{1}{2} mg_0 \frac{R^2}{R+h} = -E_c$$

$$4- \quad v = R \sqrt{\frac{g_0}{R+h}} \quad \text{en différentiant} \quad \Delta v = -\frac{R}{2} \sqrt{\frac{g_0}{(R+h)^3}} \Delta h$$

$$\text{A.N : } v = 6.4 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{9.8}{6.65 \cdot 10^6}} = 7769 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad \Delta v = -3.2 \cdot 10^6 \sqrt{\frac{9.8}{(6.65 \cdot 10^6)^3}} 10000 = -5.84 \text{ m/s}$$

1<sup>ere</sup> partie Si AN = 0  $N \approx 7800 \text{ m/s}$

$$T = 5375 \text{ s} \rightarrow \approx 1,5 \text{ h} = 90 \text{ mn}$$

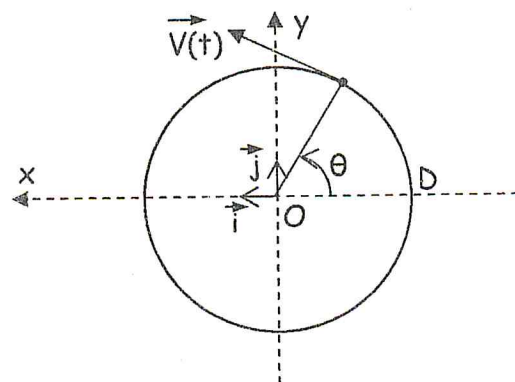




**EXERCICE 1 : CINEMATIQUE**

Tous les résultats numériques peuvent être donnés en fonction de  $\pi$ .

Un corps A de masse  $m = 500$  kg, assimilable à un point matériel, se déplace sur une trajectoire circulaire horizontale de rayon  $R = 24$  m. A l'instant initial, le mobile se trouve au point D et sa vitesse entre cet instant et l'instant  $t = 4$  s est régie par la relation :  $V_A = \pi(t + 1)$  où  $V_A$  est en m/s et  $t$  en secondes.



1°) Déterminer la position, la vitesse et l'accélération du mobile à  $t = 2$  s.

2°) A l'instant  $t = 4$  s le mobile quitte la piste circulaire pour décrire une trajectoire rectiligne horizontale avec un mouvement uniformément retardé et s'arrête à l'instant  $t = 9$  s.

a) Décrire la nature du mouvement sur l'intervalle  $[0, 9]$  s.

b) Dessiner la trajectoire du mobile sur l'intervalle  $[0, 9]$  s. Echelle : 1 cm pour 6 m

c) Représenter  $\vec{V}$  et  $\vec{a}$  à  $t = 2$  s. Echelle : 1 cm pour  $\pi \text{ ms}^{-1}$  et 1 cm pour  $\pi/2 \text{ ms}^{-2}$ .

d) Déterminer la distance totale parcourue par le mobile pendant les 9 secondes.

3°) Un deuxième mobile B se déplace suivant l'axe oy avec une vitesse  $\vec{V}_B(t) = (-t+3)\pi \vec{j}$

Représenter à l'instant  $t = 4$  s la vitesse de A mesurée par B.

**EXERCICE 2 : DYNAMIQUE ET ENERGIE**

Un mobile A de masse  $m_A$ , se déplace sur une piste CDEFG composée de deux plans (CD et FG) inclinés d'un même angle  $\alpha$  et d'un plan horizontal DEF parfaitement lisse. Les frottements entre la piste et le mobile A sont caractérisés par un coefficient de frottement statique  $\mu_s$  et un coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$  sur les parties CD et FG. Le mobile A est abandonnée du point C sans vitesse initiale. Il est soumis sur toute la partie CD à une force  $\vec{F}$ , constante et perpendiculaire au plan de mouvement et nulle sur la partie DEFG.

1°) a - Quelle doit être la valeur minimale de la force  $F_0$  pour maintenir A en équilibre ?

b - Représenter les forces exercées sur le mobile lorsque  $F = F_0$ . Echelle : 1 cm pour 3,2 N

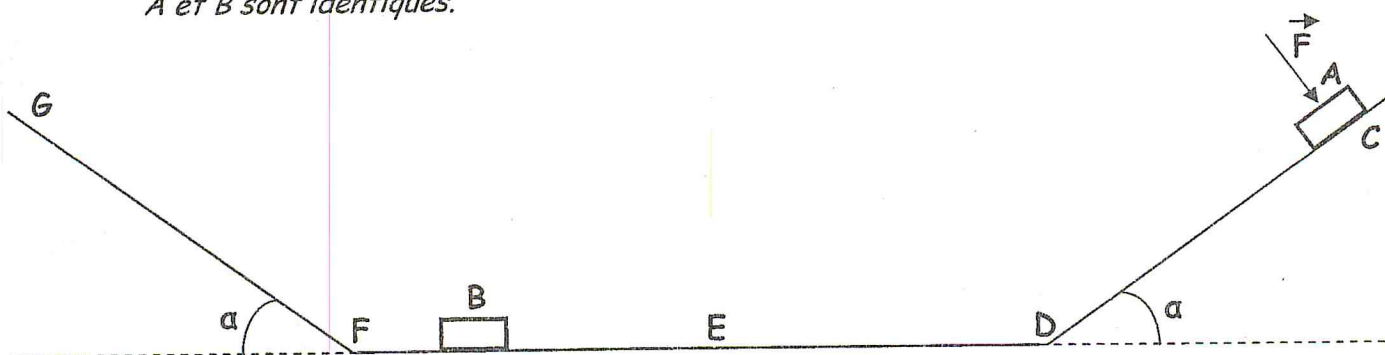
2°) On applique une force  $F = 4$  N. Quelle est la valeur de la vitesse du mobile au point D ?

3°) En un point N situé entre E et F, le mobile A entre en collision avec un corps B de masse  $m_B$  initialement au repos. Le choc entre A et B est supposé élastique.

Déterminer la hauteur maximale atteinte par B sur le plan FG dans le cas où le mobile A s'arrête juste après le choc.

On donne :  $m_A = m_B = 1.6$  Kg ;  $\mu_s = 0.8$  ;  $\mu_d = 0.5$  ;  $g = 10 \text{ ms}^{-2}$  ;  $\sin \alpha = 0.8$  ;  $\cos \alpha = 0.6$  ;  $CD = 1.2$  m

A et B sont identiques.



Ex 1 (9 pts)

1)  $V = \frac{d\theta}{dt}$

$\dot{a} \ t = 2 \Delta$

$\Delta(t) = \pi \left( \frac{t^2}{2} + t \right) + \Delta_0$

$\theta(t) = \frac{\Delta(t)}{R} = \frac{\pi}{R} \left( \frac{t^2}{2} + t \right)$  (0,5)

$\theta(2) = \frac{\pi}{6}$  (0,5)

$V(2) = 3\pi \text{ m/s}$  (0,5)

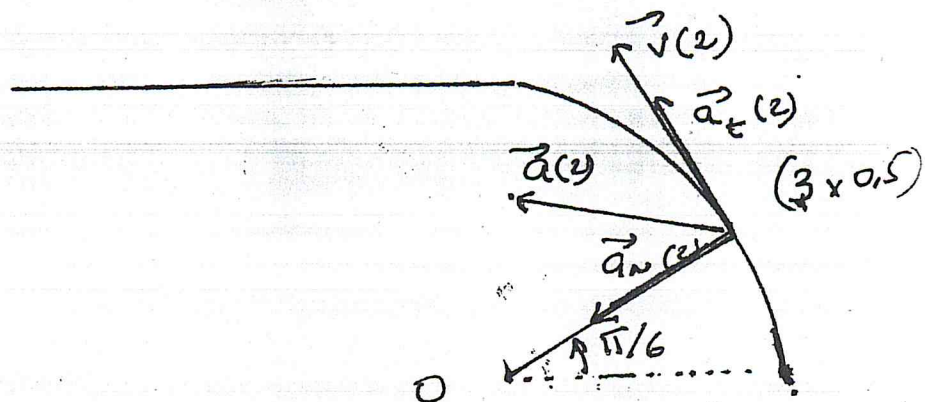
$a_t = \frac{dV}{dt} = \pi \text{ m/s}^2$  (0,5)

$a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{9\pi^2}{24} \text{ m/s}^2$  (0,5)

2a) 1<sup>ère</sup> phase  $[0, 4]_\Delta$ : mouvement circulaire uniformément accéléré (0,5)

2<sup>ème</sup> phase  $[4, 9]_\Delta$ : mouvement rectiligne uniformément retardé (0,5)

b) Trajectoire ①



c)  $\theta(2) = \frac{\pi}{6}$

$V(2) = 3\pi \text{ m/s}$

$a_t = \pi \text{ m/s}^2$

$a_n = \frac{9\pi}{24} \text{ m/s}^2$

1 cm  $\rightarrow$  6 m

1 cm  $\rightarrow$   $\pi \text{ m/s}$

2 cm  $\rightarrow$   $\pi \text{ m/s}^2$

d) distance parcourue sur  $[0, 9]_\Delta$

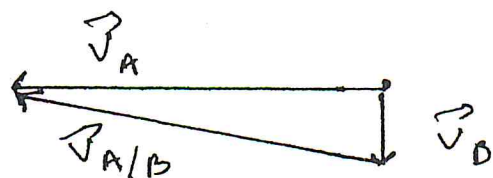
$d = d_{[0,4]_\Delta} + d_{[4,9]_\Delta} = \frac{\pi}{2} R + 39,25 = 76,93 \text{ m}$  (0,5)

3)  $\dot{a} \ t = 4\Delta$   $\vec{V}_A(4) = 5\pi \vec{e}_r \text{ m/s}$

$V_B(4) = -\pi \vec{e}_\theta \text{ m/s}$

(0,5)  $\vec{V}_{A/B} = \vec{V}_A - \vec{V}_B$

(0,5)  $V_{A/B} = \sqrt{26}\pi \text{ m/s}$



(3 x 0,5)



## Ex 2 (11 points)

1. a) à l'équilibre  $\vec{F}_0 + \vec{C} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow$  (0,5)

$$\begin{cases} -C_{//} + P \sin \alpha = 0 \\ C_{\perp} - P \cos \alpha - F_0 = 0 \end{cases}$$

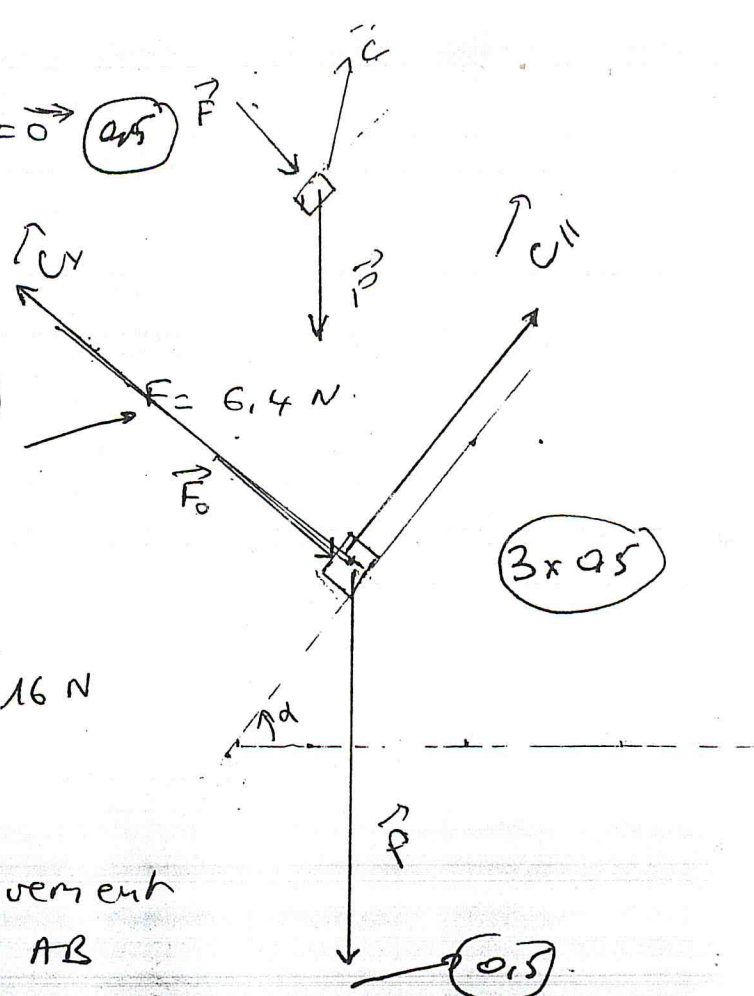
$$\mu_s = \frac{C_{//}}{C_{\perp}}$$

①  $\rightarrow F = \frac{mg}{\mu_s} (\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha)$  (0,5)

b)  $P = mg = 16 \text{ N}$

(0,5)  $C_{//} = mg \sin \alpha = 12,8 \text{ N}$

(0,5)  $C_{\perp} = F_0 + P \cos \alpha = \frac{C_{//}}{\mu_s} = 16 \text{ N}$



2)  $\vec{F} \perp$  au plan de mouvement  
son travail est nul sur AB

(0,5)  $\Delta E_T \Big|_A^B = -C_{//} AB = -\mu_d (F + mg \cos \alpha) AB$

$\Delta E_T \Big|_A^B = \frac{1}{2} m v_B^2 - m g h$

avec  $h = AB \sin \alpha$

$\Rightarrow v_B^2 = 2 g AB \sin \alpha - 2 \mu_d \frac{AB}{m} (F + m g \cos \alpha)$

①  $\rightarrow v_B = 3 \text{ m/s}$  (0,5)

3) choc élastique, système  $(m_1 + m_2)$  isolé (pas de frottement)

$\Rightarrow$  conservation de  $\vec{P} \rightarrow$  (0,5)

au point N:  $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_1' + \vec{P}_2' \Rightarrow m_1 \vec{v}_{1B} + \vec{0} = \vec{0} + m_2 \vec{v}_2' \quad (0,5)$

$m_1 = m_2 = M \Rightarrow v_{1B}' = v_{2A}' = 3 \text{ m/s} \quad (0,5)$

$\vec{v}_2 = \vec{0} = \vec{v}_1' \quad (0,5)$

$\Delta E_T = -C_{//} \Delta n$  pour la masse M.

$= -\frac{1}{2} M v_2'^2 + M g h_2 = -\mu_d M g \cos \alpha \cdot \frac{h_2}{\sin \alpha} \quad (0,5)$

$M g h_2 = \frac{1}{2} M v_2'^2 - \mu_d M g \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} h_2$

①  $h_2 = \frac{\frac{1}{2} v_2'^2}{g (1 + \mu_d \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha})} = \frac{v_2'^2}{2g (1 + \cot \alpha)}$

AN:  $h_2 = 25,7 \text{ cm} \quad (0,5)$



**EPREUVE FINALE MECANIQUE**  
(1 heure 30 minutes)

**Exercice 1 : (6.5 points)**

Un mobile M se déplace sur une trajectoire circulaire de centre O et de rayon  $R = 2$  m (voir figure 1). La vitesse angulaire du mobile  $\omega = \frac{d\theta}{dt}$  est représentée sur la figure 2.

A  $t = 0$  s,  $\theta = 0$  rd. (On prendra  $\pi^2 = 10$ )

- 1- Calculer la distance parcourue par le mobile entre les instants  $t = 0$  s et  $t = 5$  s.
- 2- Représenter à  $t = 3$  s :
  - le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ , échelle 1 cm  $\rightarrow$  0.5 m
  - le vecteur vitesse  $\vec{v}$ , échelle 1 cm  $\rightarrow$  1 m/s
  - le vecteur accélération  $\vec{a}$ , échelle 1 cm  $\rightarrow$  2 m/s<sup>2</sup>
- 3- A cet instant,  $t = 3$  s, un second mobile M' se déplace suivant oy (vers les  $y > 0$ ) avec une vitesse  $v' = 3.14$  m/s. Déterminer et représenter la vitesse de M par rapport à M'.

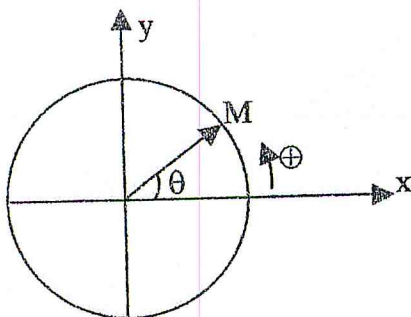


Figure 1

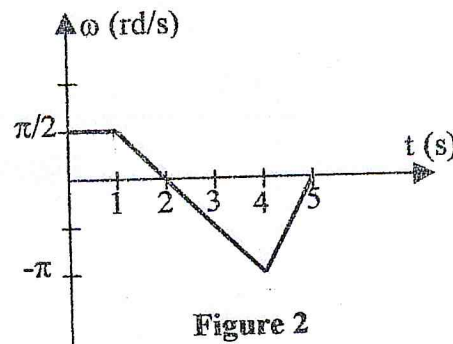


Figure 2

**Exercice 2 : (5 points)**

Une particule se déplace suivant l'axe des x. Elle est soumise à une force conservative  $\vec{F} = F\vec{i}$ . Le graphe donnant la variation de son énergie potentielle,  $E_p$ , en fonction de x est représentée sur la figure 3-a.

- 1- Tracer, sur la figure 3-b, le graphe donnant l'évolution de la force en fonction de x.
- 2- Au point d'abscisse  $x = 4$  cm, on lance cette particule vers les x décroissants avec une énergie cinétique initiale  $E_{ci} = 3 \cdot 10^{-12}$  J.
  - a- Tracer, sur la figure 3-a, les courbes donnant les variations en fonction de x des énergies mécanique totale ( $E_T$ ) et cinétique ( $E_c$ ) de cette particule.
  - b- En déduire l'abscisse du point où cette particule rebrousse chemin.

### Exercice 3 :(8.5 points)

Un skieur de masse  $m = 60 \text{ kg}$ , assimilé à un point matériel, monte un plan incliné d'un angle  $\alpha = 30^\circ$  par rapport à l'horizontale, tiré par un câble parallèle à la ligne de plus grande pente, AB, du plan (voir figure 4). Le mouvement, est d'abord uniformément accéléré, d'accélération  $a = 2 \text{ m/s}^2$ , puis devient uniforme.

Les frottements entre les skis et le sol sont caractérisés par un coefficient de glissement  $\mu_g = 0.833$ . On prendra dans tout le problème  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

- 1- Calculer la tension du câble dans les deux phases du mouvement.
- 2- Représenter les forces agissant sur le skieur dans la première phase.

Echelle :  $1 \text{ cm} \rightarrow 200 \text{ N}$

- 3- Arrivé au sommet B de la pente, le skieur descend une piste rectiligne BC, de longueur  $L = 32 \text{ m}$ , en quittant B sans vitesse initiale, l'angle d'inclinaison par rapport à l'horizontale est  $\beta = 30^\circ$  (voir figure 4). Quelle serait la vitesse  $V_C$  du skieur en C si on néglige les frottements de cette piste.
- 4- En fait, le skieur arrive en C avec une vitesse  $V_C = 57.6 \text{ km/h}$ . Quel est le coefficient de frottement de glissement de cette partie de la piste.

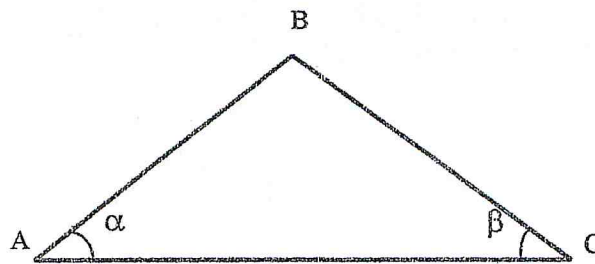


Figure 4

Nom :

Prénom :

Groupe :

AA

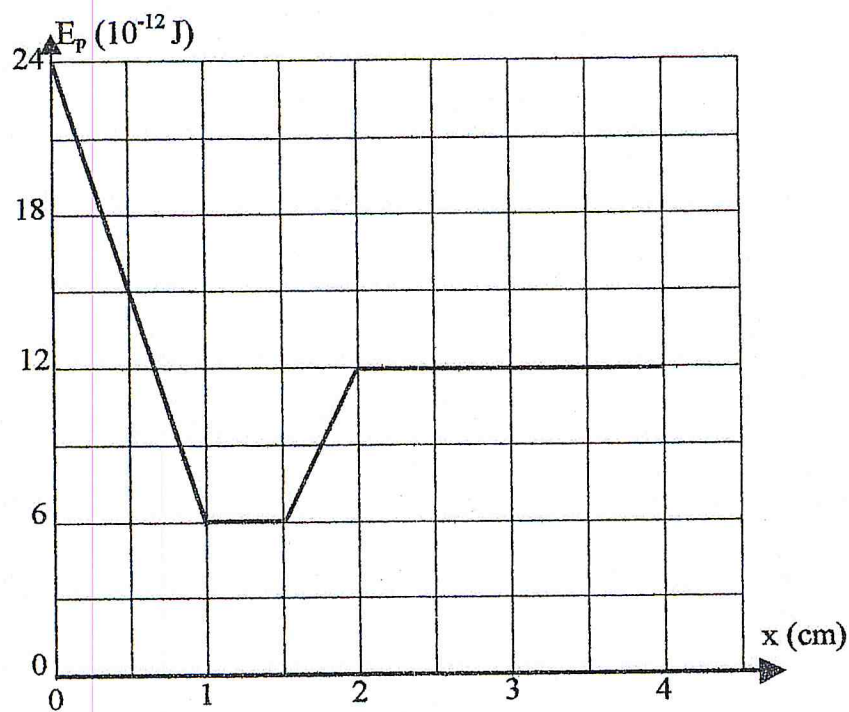


Figure 3-a

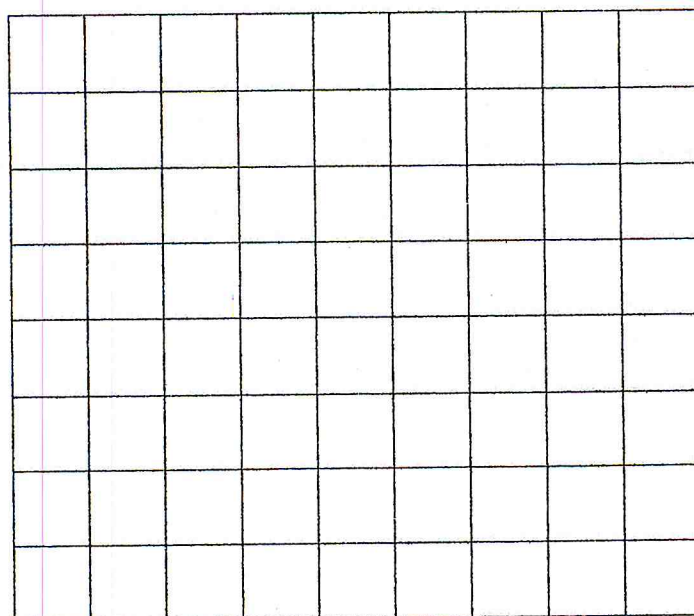


Figure 3-b



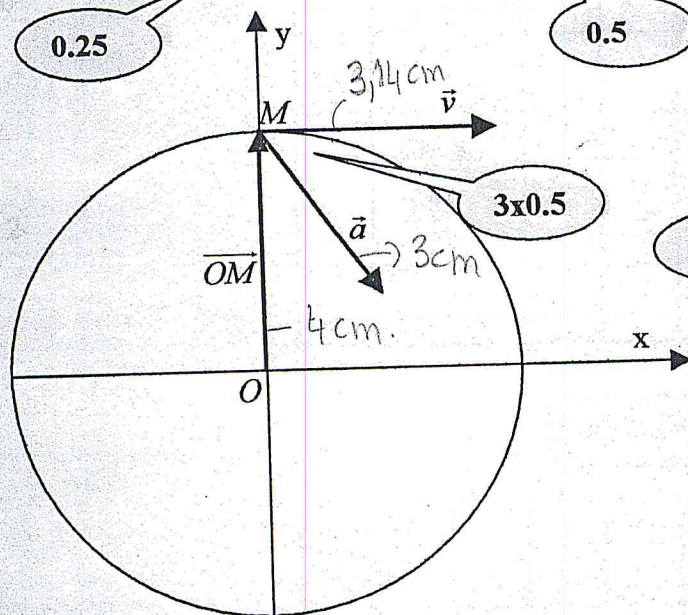
# Corrigé de l'épreuve finale du 19 Janvier 2008

## Exercice 1 : (6.5 points)

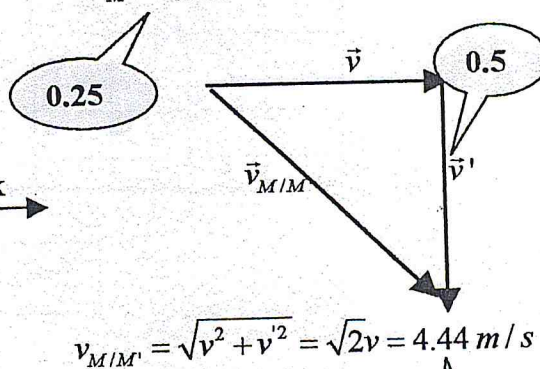
1-  $d = R \Delta \theta = R(\theta(5) - \theta(0)) = \int_0^5 \omega dt \rightarrow \text{Aire sous } \omega(t) = \frac{9\pi}{2} = 14.13 \text{ m}$  1

2-  $v = R\omega$ ;  $a_t = R \frac{d\omega}{dt}$ ;  $a_N = \frac{v^2}{R}$  3x0.5

t (s)	$\theta$ (rd)	$\omega$ (rd/s)	V (m/s)	$a_t$ (m/s <sup>2</sup> )	$a_N$ (m/s <sup>2</sup> )
3	$\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi$	$-\pi$	$\pi^2/2$



$3 - \vec{v}_M = \vec{v}_{M/M'} + \vec{v}_{M'} \Rightarrow \vec{v}_{M/M'} = \vec{v} - \vec{v}'$



$v_{M/M'} = \sqrt{v^2 + v'^2} = \sqrt{2}v = 4.44 \text{ m/s}$

0.5

## Exercice 2 : (5 points)

1- F dérive d'un potentiel donc :  $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx} \vec{i} = -\text{pente de } E_p(x)$  1

$0 < x < 1 \text{ cm} \Rightarrow F = 18 \cdot 10^{-10} \text{ N}$   
 $1 < x < 1.5 \text{ cm} \Rightarrow F = 0 \text{ N}$   
 $1.5 < x < 2 \text{ cm} \Rightarrow F = -12 \cdot 10^{-10} \text{ N}$   
 $x > 2 \text{ cm} \Rightarrow F = 0 \text{ N}$

(Voir graphe)

2-  $x = 4 \text{ cm} \Rightarrow E_{ci} = 3 \cdot 10^{-12} \text{ J}$  et  $E_{pi} = 12 \cdot 10^{-12} \text{ J} \Rightarrow E_T = 15 \cdot 10^{-12} \text{ J}$  0.5

a- Voir figure

b-  $X_R = 0.5 \text{ cm}$  ( car  $E_c = 0$  )

0.5



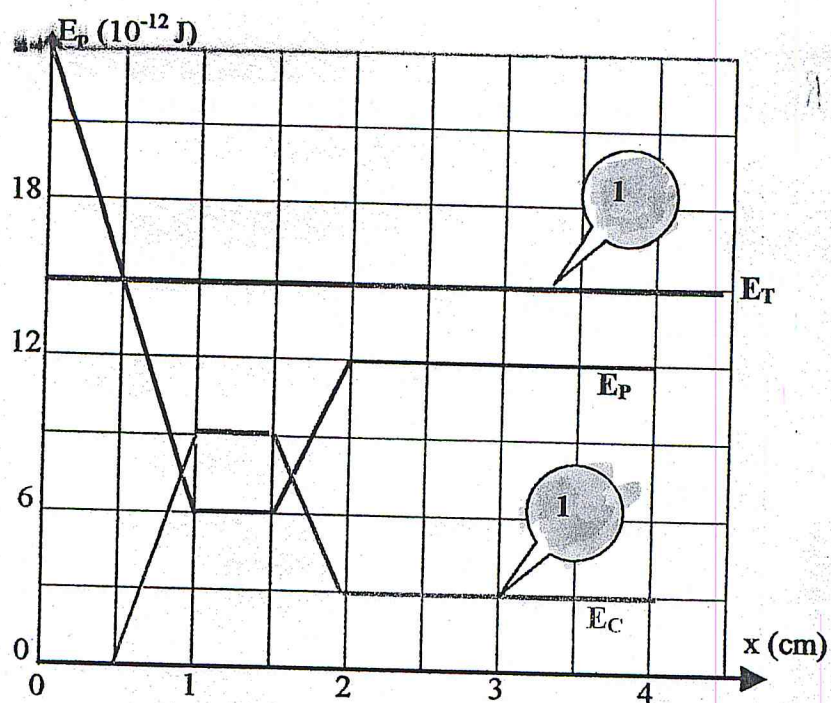


Figure 3-a

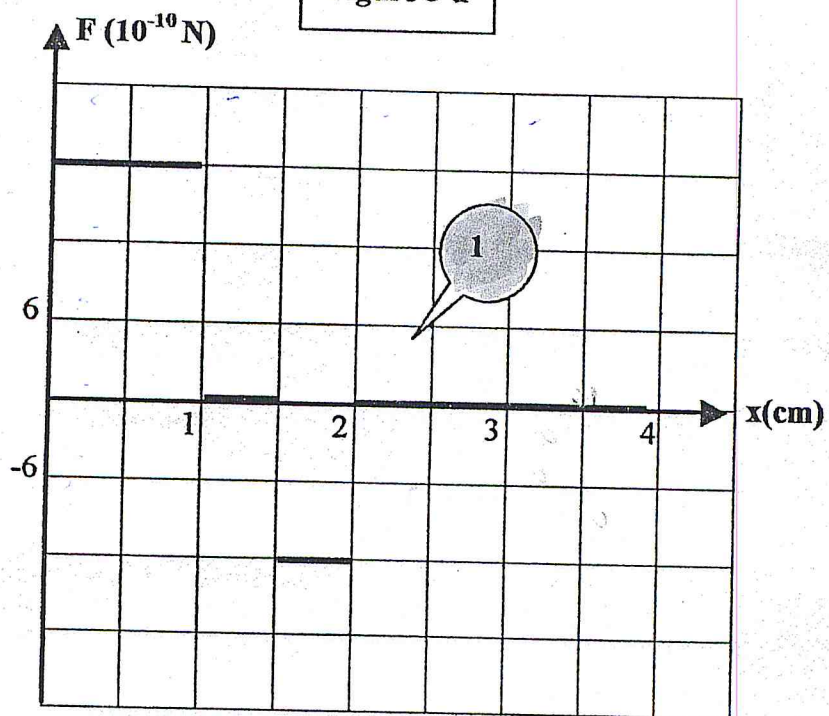


Figure 3-b

### Exercise 3 : (8.5 points)

(3,5pts) 1-  $\vec{P} + \vec{C} + \vec{T} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} ox: T - C_x - P_x = ma \\ oy: C_y - P_y = 0 \end{cases}$

0.5

0.25

0.25

0.5

$$\mu = \left| \frac{C_x}{C_y} \right| \Rightarrow C_x = \mu C_y \Rightarrow T = \mu P_y + P_x + ma$$

0.5

0.5

a- 1<sup>ère</sup> phase :  $a \neq 0 \Rightarrow T = m(\mu g \cos \theta + g \sin \theta + a) \Rightarrow T = 853 \text{ N}$

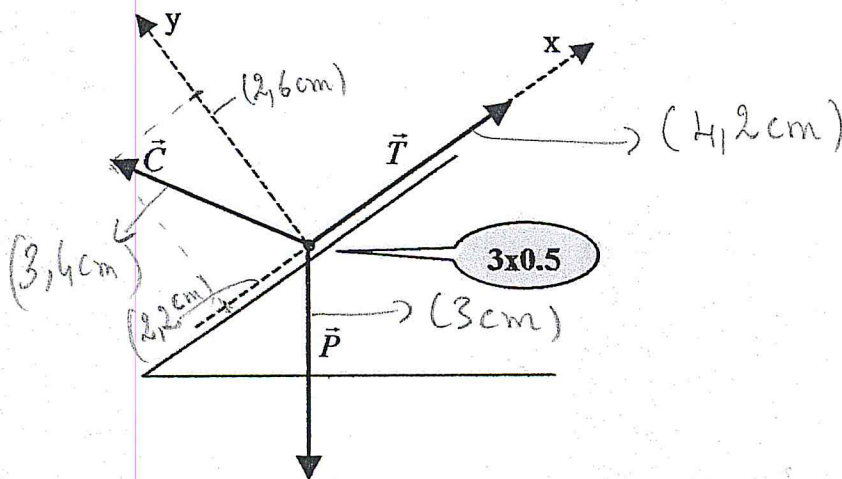
b- 2<sup>ème</sup> phase :  $a = 0 \Rightarrow T = m(\mu g \cos \theta + g \sin \theta) \Rightarrow T = 733 \text{ N}$

0.5

0.5

$P = 600 \text{ N}$  ( $P_x = 300 \text{ N}$ )  $P_y = 519.6 \text{ N}$   $C_x = 432.8 \text{ N}$

(1,5) 2-



3x0.5

(1) 3- Pas de frottements  $\Rightarrow E_{TB} = E_{TC} \Rightarrow$

$$v_c = \sqrt{2gBC \sin \beta} \Rightarrow v_c = 17.89 \text{ m/s} = 64.4 \text{ km/h}$$

2x0.5

(2,5)

4- Avec frottements  $\Delta E_T = W_{C_x} \Rightarrow \begin{cases} \Delta E_T = E_{Tc} - E_{TB} = \frac{1}{2}mv_c^2 - mgBC \sin \beta \\ W_{C_x} = -C_x BC \end{cases}$

0.5

0.5

0.5

$$\Rightarrow \mu = \frac{2gBC \sin \beta - v_c^2}{2gBC \cos \beta} \Rightarrow \mu = 0.115$$

0.5

0.5

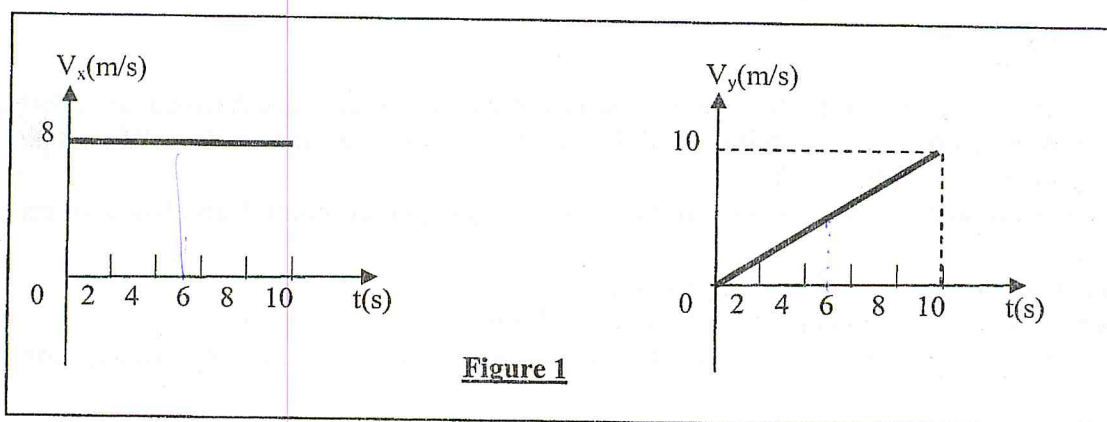


EPREUVE FINALE  
DUREE 1h30

**Exercice 1 : (06 points)**

Un mobile M se déplace dans le plan (Oxy). Les composantes en coordonnées cartésiennes de sa vitesse sont représentées en fonction du temps sur la figure 1.

- 1) a) Sachant qu'à  $t=0s$ ,  $x=16m$  et  $y=-4m$ , déterminer les expressions de  $x(t)$  et  $y(t)$ .  
b) En déduire l'équation de la trajectoire.
- 2) a) Déterminer les expressions des composantes de l'accélération en coordonnées cartésiennes  $a_x(t)$  et  $a_y(t)$ .  
b) Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération à l'instant  $t=6s$ .  
c) Quel est le rayon de courbure de la trajectoire au point où se trouve le mobile à l'instant  $t=6s$  ?
- 3) Déterminer les coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  de M ( $\theta$  étant repéré par rapport à l'axe Ox) à l'instant  $t=6s$ .



**Exercice 2 : (08 points)**

Un camion (A) de masse  $m_A = 5$  tonnes porte une caisse (B), de masse  $m_B = 500$  kg, qui n'est pas attachée à sa benne sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale (voir figure 2). Les frottements entre la caisse et la benne du camion sont caractérisés par les coefficients de frottement statique  $\mu_s = 0.6$  et de glissement  $\mu_g = 0.4$ .

- 1) Le camion est en mouvement rectiligne uniforme.
  - a) Calculer la valeur maximale de l'angle d'inclinaison  $\alpha_m$  du plan incliné à partir de laquelle la caisse glisse sur la benne du camion.
  - b) Dans le cas où  $\alpha = 15^\circ$ , représenter **qualitativement** les forces agissant sur la caisse et le camion pris séparément. (Pour le contact camion-sol, on représentera la force de contact totale). Déterminer chacune de ces forces.
- 2) Pour s'arrêter, le camion freine et la caisse glisse sur la benne. Calculer l'accélération de la caisse ( $\alpha = 15^\circ$ ).

3) On suppose maintenant que le camion est à l'arrêt sur le plan incliné ( $\alpha = 15^\circ$ ) et on veut faire glisser la caisse vers l'arrière du camion à l'aide d'un câble de masse négligeable.

a) Représenter **qualitativement** les forces agissant sur la caisse.

b) Calculer la valeur minimale de la tension du câble qu'on doit exercer parallèlement au plan incliné pour déplacer la caisse.

On donne :  $g=10\text{m/s}^2$

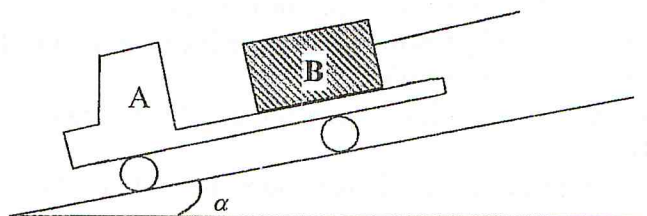


Figure 2

### Exercice 3 : (06 points)

Un solide A de masse  $m=100\text{g}$  peut coulisser sans frottement sur une tige horizontale. Il est relié à un ressort de constante de raideur  $k$ . A l'équilibre, le centre de masse du solide est au point d'abscisse  $x=0$  (voir figure 2).

- 1) On lâche A au point d'abscisse  $a=5\text{cm}$ . Sa vitesse de passage au point d'abscisse  $x=0$  est  $v_0=2\text{m/s}$ .
  - a) Calculer la constante de raideur  $k$  du ressort.
  - b) Calculer la vitesse de passage  $v$  de A au point d'abscisse  $a/2$ .
- 2) a) Tracer les graphes des énergies totale  $E_T$ , cinétique  $E_c$  et potentielle  $E_p$  de A en fonction de  $x$ .
  - b) En déduire la position d'équilibre en précisant sa nature.
- 3) a) En réalité, la vitesse de passage de A au point d'abscisse  $a/2$  est  $v'=1,5\text{m/s}$ . Calculer le module de la force de frottement que l'on supposera constante.
  - b) Pour quelle valeur de  $x$  le solide A rebrousse-t-il chemin ?

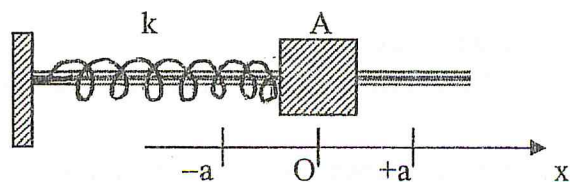


Figure 3

Exercice 1: (6 pts)

$$1.a) \begin{cases} x(t) = x_0 + \int_0^t v_x dt \\ y(t) = y_0 + \int_0^t v_y dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 8t + 16 & (1) \\ y(t) = \frac{1}{2} t \cdot t - 4 = \frac{t^2}{2} - 4 & (1) \end{cases}$$

$$1.b) \begin{cases} t = \frac{x}{8} - 2 \\ y = \frac{t^2}{2} - 4 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^2}{128} - \frac{x}{4} - 2 \quad (0,5)$$

$$2.a) \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 & (0,25) \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = 1 \text{ m/s}^2 & (0,25) \end{cases}$$

$$2.b) \begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} \\ v = (v_x^2 + v_y^2)^{1/2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = (t^2 + 64)^{1/2} & (0,5) \\ a_t = \frac{t}{(t^2 + 64)^{1/2}} & (0,25) \end{cases}$$

$$a_t(6s) = 0,6 \text{ m/s}^2 \quad (0,25)$$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = a_t^2 + a_n^2 \Rightarrow a_n = (a_y^2 - a_t^2)^{1/2} \quad (0,25)$$

$$a_n = 0,8 \text{ m/s}^2 \quad (0,25)$$

$$2.c) a_n = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_n} \quad (0,25) ; \rho(6) = 125 \text{ m} \quad (0,25)$$

$$3) r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta = \frac{y}{r} \quad (0,5)$$

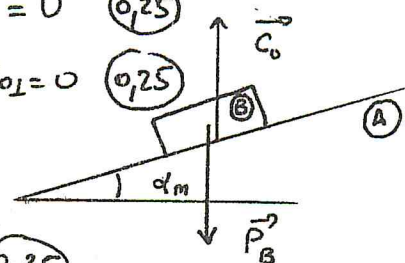
$$r(6s) = 65,96 \text{ m}, \quad \theta(6) = 0,21 \text{ rad} \quad (0,5)$$

Exercice 2: (8 pts)

$$1.a) \begin{cases} \vec{P}_B + \vec{C}_0 = \vec{0} & (0,25) \\ \mu_s = \frac{C_{01}}{C_{02}} & (0,25) \end{cases}$$

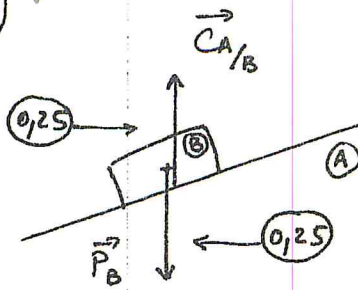
$$\Rightarrow \tan \alpha_m = \mu_s \quad (0,25) ; \alpha_m \approx 31^\circ \quad (0,25)$$

$$\begin{cases} m_B g \sin \alpha_m - C_{01} = 0 & (0,25) \\ -m_B g \cos \alpha_m + C_{02} = 0 & (0,25) \\ \mu_s = \frac{C_{01}}{C_{02}} & \end{cases}$$

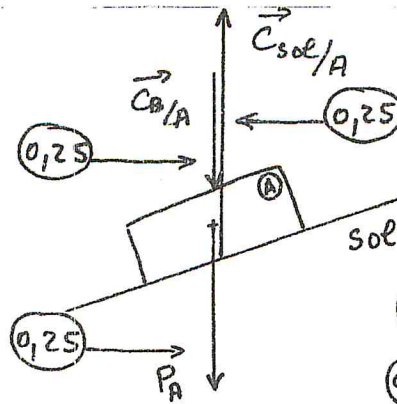




1.b)



$$P_B = C_{A/B} = 5 \cdot 10^3 \text{ N} \quad (0,25)$$



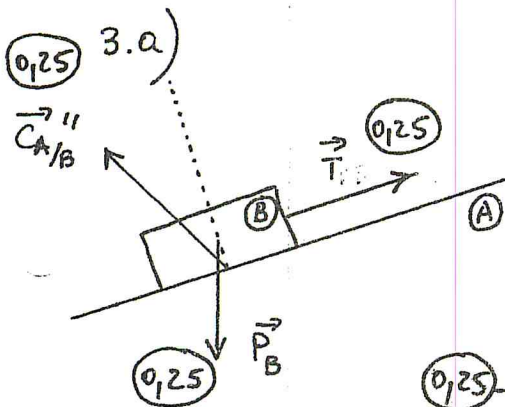
$$C_{B/A} = C_{A/B} = 5 \cdot 10^3 \text{ N} \quad (0,25)$$

$$P_A = 5 \cdot 10^4 \text{ N} \quad (0,25)$$

$$C_{sol/A} = 5,5 \cdot 10^4 \text{ N} \quad (0,25)$$

$$2) \begin{cases} \vec{P}_B + \vec{C}_{A/B}' = m_B \vec{a}_B \\ \mu g = \frac{(C_{A/B}')_{||}}{(C_{A/B}')_{\perp}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m g \sin \alpha - (C_{A/B}')_{||} = m_B \bar{a}_B \\ (C_{A/B}')_{\perp} - m_B g \cos \alpha = 0 \\ \mu g = \frac{(C_{A/B}')_{||}}{(C_{A/B}')_{\perp}} \end{cases} \quad (0,25) \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow \bar{a}_B = g(\sin \alpha - \mu g \cos \alpha) \quad (0,5) ; \bar{a}_B = -1,27 \text{ m/s}^2 \quad (0,5)$$



$$3.b) \begin{cases} \vec{P}_B + \vec{T}_m + \vec{C}_{A/B}'' = \vec{0} \\ \mu_s = \frac{(C_{A/B}'')_{||}}{(C_{A/B}'')_{\perp}} \end{cases} \quad (0,25) \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_B g \sin \alpha + (C_{A/B}'')_{||} - T_m = 0 \\ (C_{A/B}'')_{\perp} - m_B g \cos \alpha = 0 \end{cases} \quad (0,25) \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow T_m = m_B g (\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha) ; T_m = 4,2 \cdot 10^3 \text{ N} \quad (0,25)$$

### Exercice 3: (6 pts)

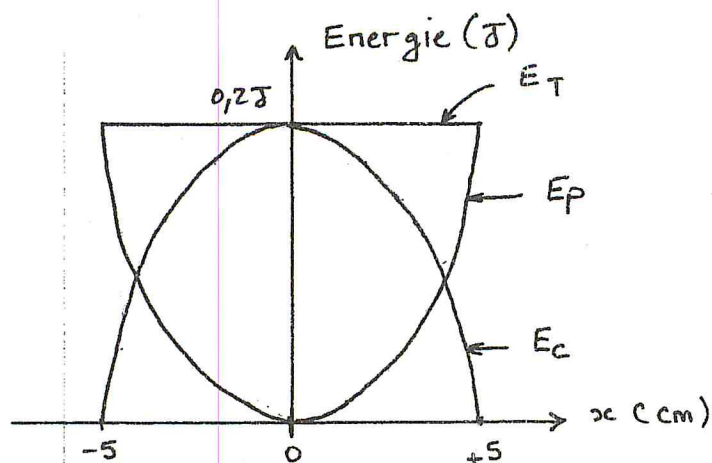
$$1.a) E_T = \text{constante} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k a^2 \Rightarrow k = \frac{m v_0^2}{a^2} \quad (0,25)$$

$$k = 160 \text{ N/m} \quad (0,25)$$

$$1.b) \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m \left(v\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow v\left(\frac{a}{2}\right) = \left(v_0^2 - \frac{k a^2}{4m}\right)^{1/2} \quad (0,25)$$

$$v\left(\frac{a}{2}\right) = 1,73 \text{ m/s} \quad (0,25)$$

2.a)



2.b)  $x = 0$  est une position d'équilibre stable car l'énergie potentielle est minimum. (0,5)

3.a)  $\Delta E_T = -C_x \Delta x \Rightarrow \frac{1}{2} k \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} m v'^2 - \frac{1}{2} k a^2 = -C_x \frac{a}{2}$  (0,5)  
 $\Rightarrow C_x = \frac{3}{4} k a - \frac{m v'^2}{a}$  (0,25)

$$C_x = 1,5 \text{ N} \quad (0,25)$$

3.b)  $\Delta E_T = -C_x \Delta x \Rightarrow \frac{1}{2} k x^2 - \frac{1}{2} k a^2 = -C_x (a - x)$  (0,5)

$$x^2 - 2 \frac{C_x}{k} x + \left(2 \frac{C_x}{k} a - a^2\right) = 0$$

(0,5)  $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 2 \frac{C_x}{k} - a \end{cases}$

(0,5)  $\begin{cases} x_1 = a = 5 \text{ cm} & \text{est le point de départ} \\ x_2 = -3,12 \text{ cm} & \text{est le point où A rebrousse chemin.} \end{cases}$

EPREUVE FINALE  
Durée 1h30

Exercice 1 : (Question de cours) (2 points)

Soient  $r$  et  $\theta$  les coordonnées polaires d'un mobile situé au point M (voir figure (1)).

- 1/ Déterminer les composantes  $V_r$  et  $V_\theta$  du vecteur vitesse en coordonnées polaires.
- 2/ En déduire les composantes  $a_r$  et  $a_\theta$  du vecteur accélération en coordonnées polaires.

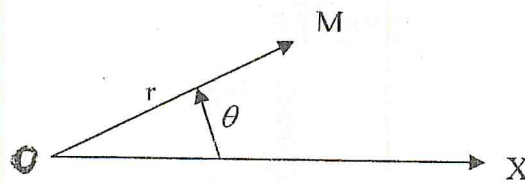


Figure 1

Exercice 2 : (7 points)

Une voiture (assimilée à un point matériel) est arrêtée au feu rouge situé au point  $O'$ . Un piéton (assimilé à un point matériel) se trouve à  $t=0s$  au point  $O$  et traverse la rue (voir figure 2.1). Au moment où le piéton atteint le point  $O'$ , le feu devient vert et la voiture démarre tandis que le piéton poursuit son chemin.

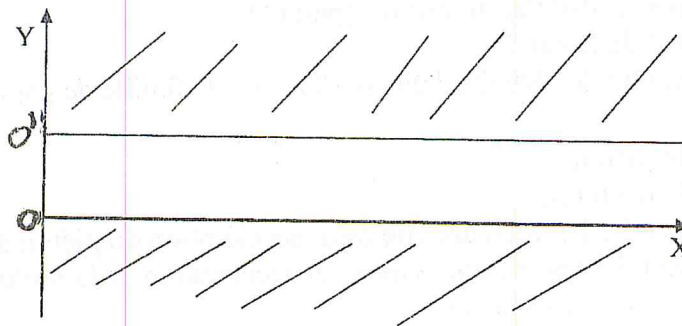


Figure 2.1

Les figures (2.2) et (2.3)) donnent l'évolution en fonction du temps des composantes cartésiennes de la vitesse  $\vec{V}_p$  du piéton et de la vitesse  $\vec{V}_v$  de la voiture.



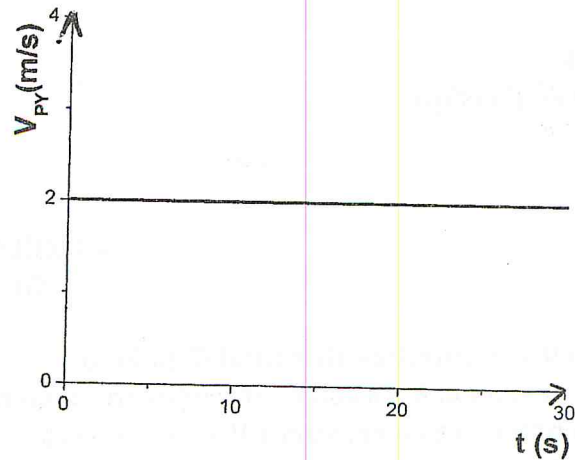
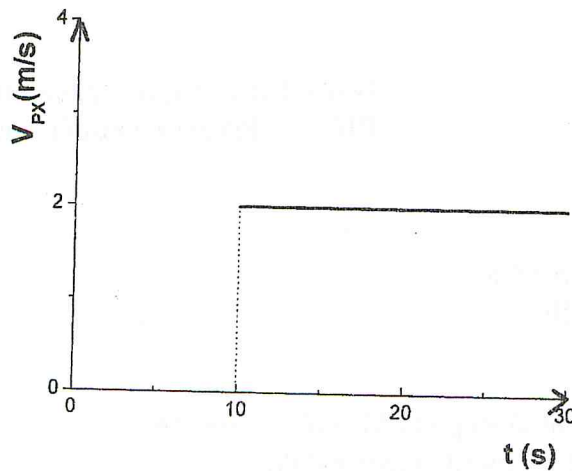


Figure 2.2

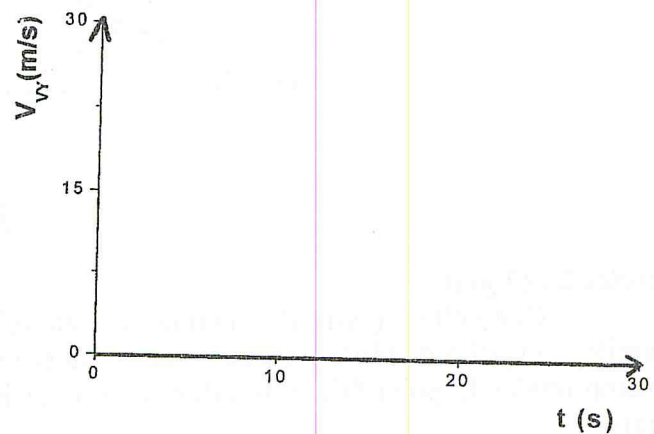
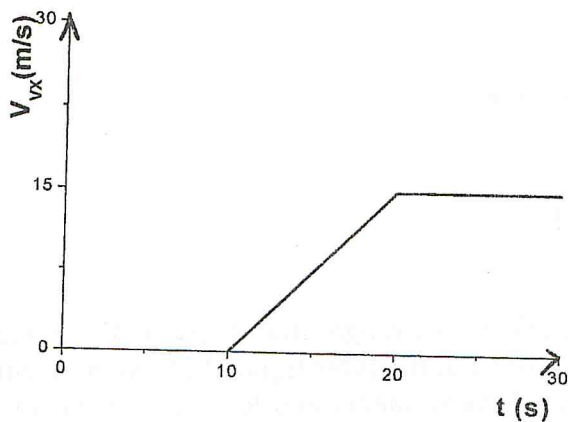


Figure 2.3

- 1/ a) A quel instant le piéton atteint-il l'autre trottoir (point O') ?  
b) Quelle est la largeur OO' de la rue ?
- 2/ Dessiner dans le plan (Ox, Oy), à l'échelle  $1 \text{ cm} \rightarrow 10 \text{ m}$ , sur la feuille de papier quadrillé ci-jointe :

- a) la trajectoire du piéton
- b) la trajectoire de la voiture

- 3/ a) Représenter sur la trajectoire les vecteurs vitesse et accélération du piéton à  $t=15\text{s}$ .  
b) Représenter sur la trajectoire les vecteurs vitesse et accélération de la voiture à  $t=15\text{s}$ .

Echelles :  $1 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ m/s}$        $1 \text{ cm} \rightarrow 1 \text{ m/s}^2$

- 4/ Soit  $\vec{V}_{P/V}$  le vecteur vitesse du piéton par rapport à un passager de la voiture. Tracer les graphes des composantes cartésiennes de ce vecteur en fonction du temps.

### Exercice 3: (7 points)

1/ Une masse  $m_1$ , de dimensions négligeables, animée d'une vitesse initiale  $V_A$  se trouve à  $t=0\text{s}$  au point A (voir figure (3.1)). Elle glisse sans frottements sur le plan incliné AB de hauteur  $h$ . Elle parcourt ensuite la portion horizontale BC entre les instants  $t_B$  et  $t_C$ . Le contact entre BC et  $m_1$  est caractérisé par le coefficient de frottement dynamique  $\mu_d$ .

- 1) Déterminer au point B la vitesse  $V_B$  de la masse  $m_1$ .

- 2) a) Représenter **qualitativement** les forces qui s'exercent sur  $m_1$  pendant le trajet BC.  
 b) A l'aide de la relation fondamentale de la dynamique, déterminer l'expression de la vitesse  $V_C$  de  $m_1$  au point C en fonction de  $V_A$ ,  $t_B$ ,  $t_C$ ,  $g$ ,  $h$  et  $\mu_d$ .

II/ La masse  $m_1$  entame, sans frottements, une trajectoire circulaire de rayon  $R$ . Elle fait un tour complet par l'intérieur, puis elle continue son mouvement, également sans frottements, sur une portion horizontale au-delà du point C.

- 1) Quelle est au point D la vitesse  $V_D$  de  $m_1$  ?  
 2) Quelle condition doit satisfaire la vitesse  $V_C$  pour que  $m_1$  arrive au point D sans tomber ?

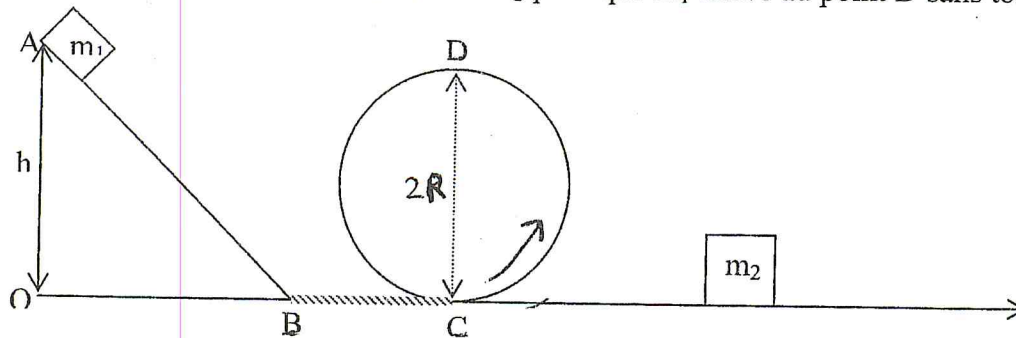


Figure 3.1

III/ Sur la portion située après le point C, la masse  $m_1$  s'arrête lorsqu'elle entre en collision avec une masse immobile  $m_2$ .

- 1) a) Déterminer le vecteur vitesse  $\vec{V}_2$  de la masse  $m_2$  après le choc.  
 b) Que devient  $\vec{V}_2$  si la portion BC est parfaitement lisse ?

**Exercice 4 : (4 points)** Un enfant de masse  $m$  se laisse glisser d'une hauteur  $y_A = 3\text{m}$  sur une piste ABC sans vitesse initiale. Le tronçon AB est parfaitement lisse. Le contact entre l'enfant et le tronçon rectiligne BC est caractérisé par un coefficient de frottement dynamique  $\mu_d \approx 0.4$ . (voir figure 4.1). La figure (4.2) représente la variation de l'énergie potentielle de l'enfant en fonction de l'altitude  $y$ .

1/ Dédurre du graphe (4.2) :

- a) le graphe de l'énergie cinétique de l'enfant sur la piste AB.  
 b) la masse  $m$  de l'enfant.  
 c) La vitesse de l'enfant quand il passe par le point B.

2/ A quelle distance du point B l'enfant s'arrête de glisser ?

On donne  $g = 10\text{m/s}^2$ .

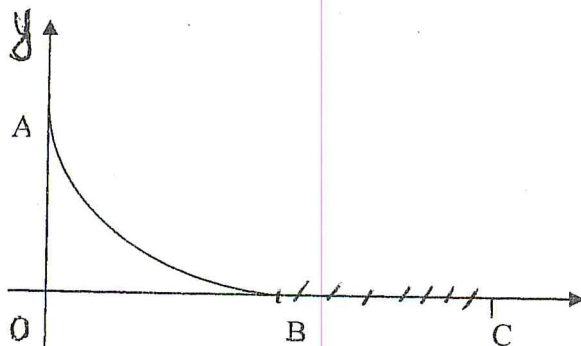


Figure 4.1

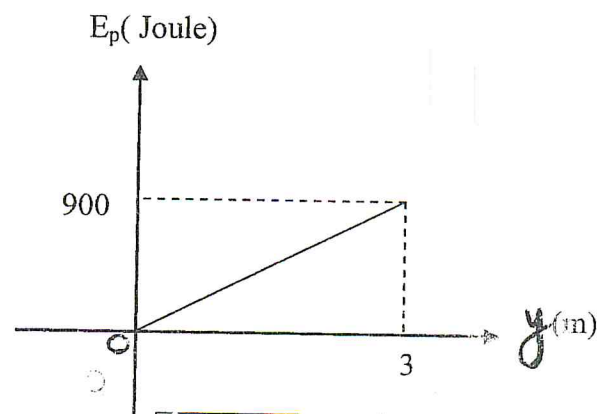


Figure 4.2

### Exercice 1 :

Sachant que  $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$  et  $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \vec{u}_r$ , on a :

$$1) \vec{r} = r \vec{u}_r \Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta \quad (1)$$

$$2) \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \vec{u}_r + \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] \vec{u}_\theta \quad (1)$$

### Exercice 2 :

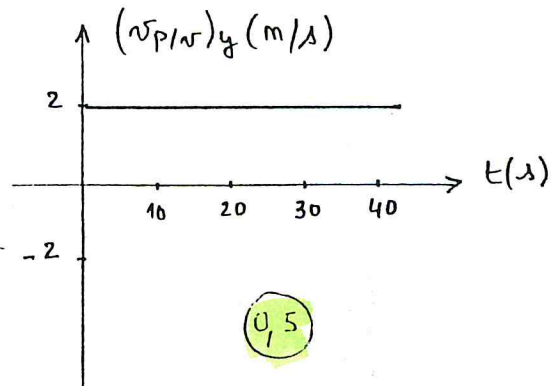
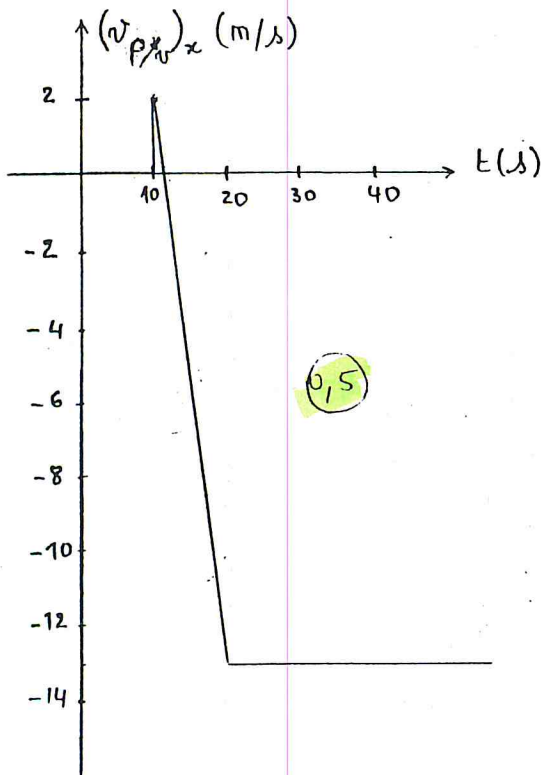
1. a) A t = 10 s (0,5)

1. b) OO' = 20 m (0,5)

2. a) , 2. b) , 3. a) et 3. b) : voir feuille jointe

$$4) \vec{v}_{P/S} = \vec{v}_{P/N} + \vec{v}_{N/S} \Rightarrow \vec{v}_{P/N} = \vec{v}_{P/S} - \vec{v}_{N/S} \quad (0,75)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (v_{P/N})_x = (v_{P/S})_x - (v_{N/S})_x \\ (v_{P/N})_y = (v_{P/S})_y - (v_{N/S})_y \end{cases}$$

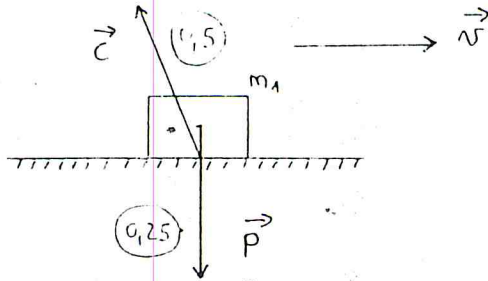




### Exercice 3 :

I) 1)  $E_{TA} = E_{TB} \Rightarrow m_1 g h + \frac{1}{2} m_1 v_A^2 = \frac{1}{2} m_1 v_B^2 \Rightarrow v_B = (v_A^2 + 2gh)^{1/2}$  (0,5)

2.a)



2.b)  $\vec{P} + \vec{C} = m_1 \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} -C_x = m_1 a \\ C_y = m_1 g \end{cases}$  et  $\mu_d = \frac{C_x}{C_y}$  ; d'où  $a = -\mu_d g$  (0,5)

$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \int_{v_B}^{v_C} dv = \int_{t_B}^{t_C} a dt \Rightarrow v_C = -\mu_d g (t_C - t_B) + (v_A^2 + 2gh)^{1/2}$  (0,5)

II) 1)  $E_{TC} = E_{TD}$  (0,5)  $\Rightarrow m_1 g 2R + \frac{1}{2} m_1 v_D^2 = \frac{1}{2} m_1 v_C^2 \Rightarrow v_D = (v_C^2 - 4gR)^{1/2}$  (0,5)

2) Au point D :  $\vec{P} + \vec{C} = m_1 \vec{a}$  (0,25) avec  $a = \frac{v^2}{R}$  (0,25) ; d'où  $C = m_1 a - m_1 g$  (0,5)

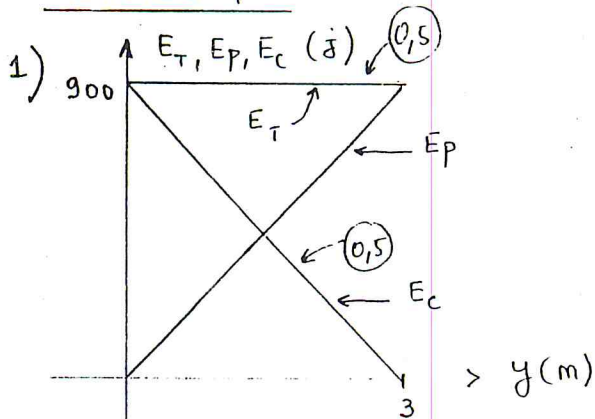
Pour que  $m_1$  ne tombe pas, il faut que  $C > 0$  (0,5)  $\Rightarrow \frac{v_D^2}{R} - g > 0 \Rightarrow v_C > \sqrt{5gR}$  (0,5)

III) 1)  $\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow m_1 \vec{v}_1 = m_2 \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_2} \vec{v}_1$  (0,5)

d'où  $\vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_2} \left[ -\mu_d g (t_C - t_B) + (v_A^2 + 2gh)^{1/2} \right] \vec{x}$  (0,5)

2) Si  $\mu_d = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = \frac{m_1}{m_2} (v_A^2 + 2gh)^{1/2} \vec{x}$  (0,25)

### Exercice 4 :



1.a)  $E_T = \text{cte} \Rightarrow E_C = E_T - E_P$

1.b)  $E_P = mgy \Rightarrow m = \frac{E_{PA}}{gy_A} = 30 \text{ kg}$  (0,5)

1.c) En B,  $E_P = 0 \Rightarrow E_T = \frac{1}{2} m v_B^2$   
 $\Rightarrow v_B = \left( \frac{2E_T}{m} \right)^{1/2} = 7,74 \text{ m/s}$  (0,5)

2)  $\Delta E_T = \int_B^M \vec{C} \cdot d\vec{\ell} = -C_x (BM) \Rightarrow (BM) = -\frac{\Delta E_T}{C_x}$  (0,5)

$C_x = \mu_d C_y = \mu_d mg$  (0,5) et  $\Delta E_T = -E_{CB} = -E_{PA}$  d'où  $(BM) = \frac{E_{PA}}{\mu_d mg} = 7,5 \text{ m}$  (0,5)

