جامعة هواري بومدين
للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

USTHB, Faculté de physique

Année Universitaire

2016-2017

Vibrations et Ondes
Séries d'Exercices,
Spécialité ST

Série 1 : Généralités sur les vibrations et équations de Lagrange (2 séances)

Série 2 : Oscillations libres et forcées de systèmes à 1 degré de liberté (3 séances)

Série 3 : Oscillations libres et forcées de systèmes à 2 degrés de liberté (2 séances)

Série 4 : Les ondes mécaniques (3 séances)

Série 5 : Les ondes électromagnétiques (2 séances)

USTHB, Faculté de physique

Année Universitaire

2016-2017

Vibrations et Ondes
Séries d'Exercices, Spécialité ST

Série 1 : Généralités sur les vibrations et équations de Lagrange (2 séances)

Série 2 : Oscillations libres et forcées de systèmes à 1 degré de liberté (3 séances)

Série 3 : Oscillations libres et forcées de systèmes à 2 degrés de liberté (2 séances)

Série 4 : Les ondes mécaniques (3 séances)

Série 5 : Les ondes électromagnétiques (2 séances)

Progression du 1er et 2ième semestre 2016-2017
(12 séances de cours et 12 séances de T.D.)
Vibrations et ondes mécaniques

Semestre	Semaine	Cours	Travaux Dirigés
S1	17/09/2016 au 22/09/2016	1- Généralités sur les vibrations	Série 1 : Généralités sur les vibrations (2 séances)
S2	11/02/2016 au 16/02/2016		
S1	24/09/2016 au 29/09/2016	2- Introduction aux équations de Lagrange	
S2	18/02/2016 au 23/02/2016		
S1	01/10/2016 au 06/10/2016	3- Systèmes libres à un degré de liberté	Série 2 : Oscillations libres et forcées à un degré de liberté (3 séances)
S2	25/02/2016 au 02/03/2016		
S1	08/10/2016 au 13/10/2016	4- Systèmes forcés à un degré de liberté (1)	
S2	04/03/2016 au 09/03/2016		
S1	15/10/2016 au 20/10/2016	5- Systèmes forcés à un degré de liberté (2)	
S2	11/03/2016 au 16/03/2016		
S1	22/10/2016 au 27/10/2016	6- Oscillation libres d'un système á deux degrés de liberté	Série 3 : Oscillation libres et forcées á deux degrés de liberté (2 séances)
S2	18/03/2016 au 23/03/2016		
S1	29/10/2016 au 03/11/2016	7- Oscillation forcées d'un système á deux degrés de libertés	
S2	25/03/2016 au 30/03/2016		
S1	05/11/2016 au 10/11/2016	8- Phénomènes de Propagation à une dimension	Série 4 : Généralités sur les ondes, cordes vibrantes et ondes acoustiques (3 séances)
S2	01/04/2016 au 06/04/2016		
S1	12/11/2016 au 17/11/2016	9- Cordes Vibrantes	
S2	08/04/2016 au 13/04/20		
S1	19/11/2016 au 24/11/2016	Ondes acoustiques dans les fluides	
S2	15/04/2016 au 20/04/2016		
S1	26/11/2016 au 01/12/2016	10- Ondes Electromagnétiques (1)	Série 5 Ondes Electromagnétiques (2 séances)
S2	22/04/2016 au 27/04/2016		
S1	03/12/2016 au 08/12/2016	11- Ondes Electromagnétiques (2)	
S2	29/04/2016 au 04/05/2016		
S1	10/12/2016 au 15/12/2016	Séance de rattrapage	Séance de rattrapage
S2	13/05/2016 au 18/05/2016		

N.B. :

1- Cette progression des cours et des travaux dirigés est générale. Elle ne tient pas compte :
   - Des jours fériés
   - Du temps consacré au contrôle continu.

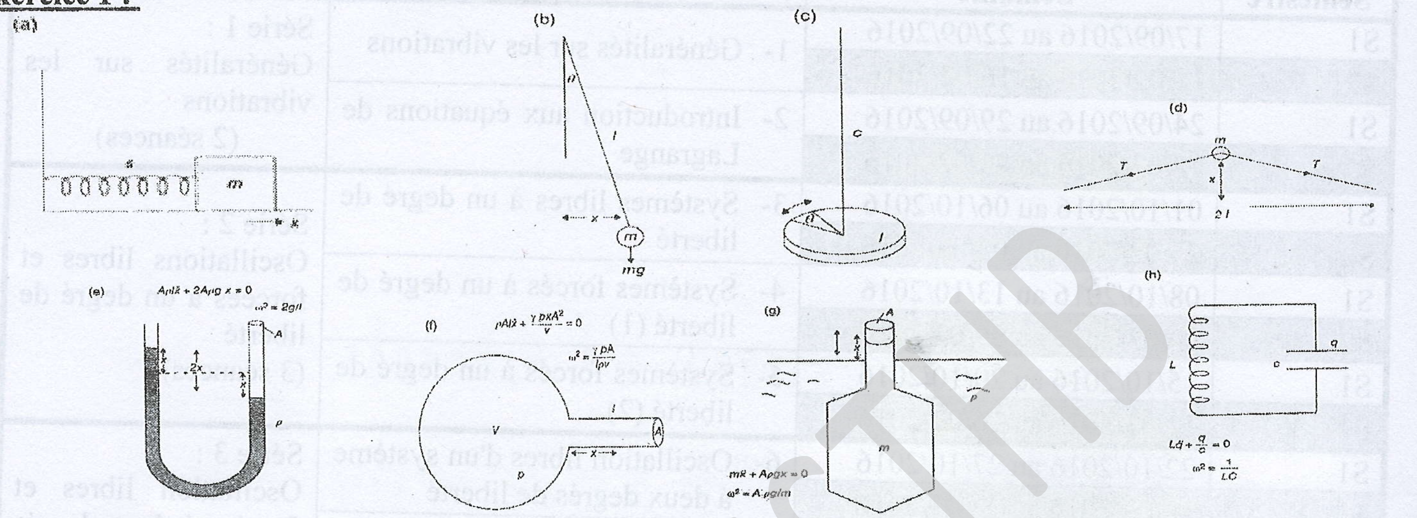
2- Les responsables des travaux dirigés sont tenus de traiter 3 exercices par séance. Le reste est la responsabilité des étudiants.

3- Tous les enseignants de cours et de TD sont priés de suivre la progression ci-dessus. Les examens porteront sur tout le programme.

Généralités sur les vibrations et équations de Lagrange

I- MOUVEMENT HARMONIQUE

Exercice 1 :



Une des choses les plus importantes à apprendre en physique est que de nombreux systèmes apparemment différents peuvent être décrits avec les mêmes termes mathématiques. Les huit systèmes physiques ci-dessus ont semblent avoir peu de choses en commun.

Tous ces systèmes sont de simples oscillateurs harmoniques qui quand légèrement perturbés de leur position d'équilibre vont osciller autour de cette position. Le but de ce premier exercice est de faire une analyse de certains de ces systèmes.

Figure (a) L'équation du mouvement $m\ddot{x} = -kx$ avec $\omega^2 = k/m$ est directement trouvée par application de la loi de Hooke et la deuxième loi de Newton.

1. Si la masse du pendule de la figure (b) est déplacée d'une petite distance x, montrer que la raideur (force de rappel par unité de distance) est mg/l et que $\omega^2 = g/\ell$ où g est l'accélération due à la gravité.

   Utiliser un petit déplacement angulaire θ au lieu de x et montrer que ω est le même.
2. Dans le cas de la figure (c), les oscillations angulaires sont rotationnelles, de sorte que la masse est remplacée par le moment d'inertie I du disque et que la raideur est remplacée par le couple de rappel du fil, qui est $K_t\,rad^{-1}$, de déplacement angulaire θ. Montrer que $\omega^2 = K_t/\ell$.
3. Figure (d) Montrer que la raideur est k=2T/l et que ω^2=2T/lm.
4. Figure (e) Montrer que k= 2ρAg, où A est la surface de section, et que $\omega^2 = 2\rho Ag/m$.
5. Figure (f), Seul le gaz dans le goulot oscille. Utiliser la relation adiabatique pV^γ = constante pour montrer que $dp = -\gamma p\, Ax/V$, où x est le déplacement du gaz dans le goulot. Montrer que $\omega^2 = \gamma pA/\ell\rho v$.
6. Figure (g) La surface de section du goulot est A et l'hydromètre est à une distance x au-dessus de son niveau normal de flottement, la force de rappel dépend du volume de liquide déplacé (principe d'Archimède). Montrer que ω^2=gρA/m.

Exercice 2 :

Montrer que par un choix approprié des valeurs A et B de l'équation $x = A cos\omega t + B\, sin\omega t$

Que des solutions également valides pour x sont :

$x = a\cos(\omega t + \phi)$ $\quad x = a\sin(\omega t - \phi)$ $\quad x = a\cos(\omega t - \phi)$

Vérifier que ces solutions satisfont l'équation : $\ddot{x}$ + ω2x = 0

Généralités sur les vibrations et équations de Lagrange

Exercice 3 :

Calculer $x = x_1 + x_2$ dans les cas suivants :

1- vibrations ayant la même fréquence (faire une figure) : $x_1 = a_1 \cos(\omega t + \phi_1)$, $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \phi_2)$

Trouver x dans le cas particulier : $a_1 = a_2 = a$

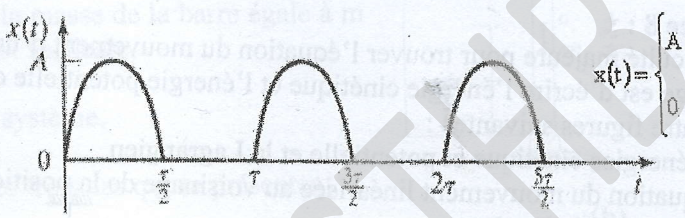
2- Vibration ayant des fréquences différentes mais la même amplitude $x_1 = a \sin \omega_1 t$ et $x_2 = a \sin \omega_2 t$ avec $\omega_2 \rangle \omega_1$

. Traiter le cas particulier $\omega_2 - \omega_1 = \delta\omega$, $\delta\omega \langle\langle \omega_1$

II- SERIES DE FOURIER

Exercice 4 :

La force d'impact d'un marteau-pilon peut être modélisée par la fonction x(t) de la figure. Déterminer le développement en série de Fourier de cette force d'impact.

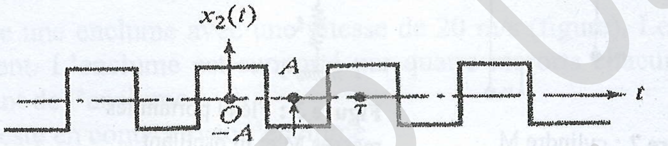


$$x(t) = \begin{cases} A \sin \dfrac{2\pi t}{\tau}, & 0 \le t \le \dfrac{\tau}{2} \\ 0 & \dfrac{\tau}{2} \le t \le \tau \end{cases}$$

Exercice 5 :

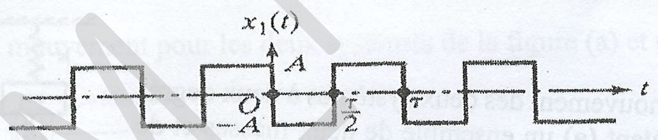
Soient les deux fonctions :

Fonction paire :



$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 \le t \le \dfrac{\tau}{4} \\ -A, & \dfrac{\tau}{4} \le t \le \dfrac{3\tau}{4} \\ A, & \dfrac{3\tau}{4} \le t \le \tau \end{cases}$$

Fonction impaire :



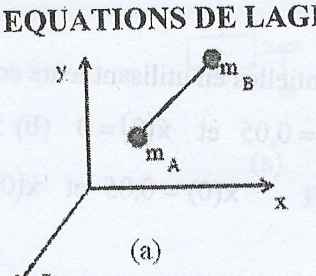
$$x(t) = \begin{cases} -A, & 0 \le t \le \dfrac{\tau}{2} \\ A, & \dfrac{\tau}{2} \le t \le \tau \end{cases}$$

- Trouver les développements en série de Fourier des deux fonctions.
- Montrer qu'il existe une relation directe entre les deux développements des deux fonctions.

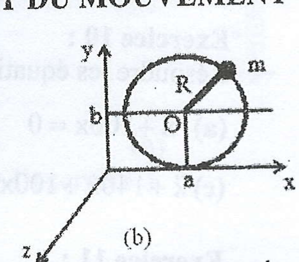
III- COORDONNEES GENERALISEES, EQUATIONS DE LAGRANGE ET DU MOUVEMENT

Exercice 6 :

Donner dans chacun des cas suivants, les liaisons, le nombre de degrés de liberté et les coordonnées que l'on peut utiliser pour définir le système.



Deux particules séparées par une distance d constante

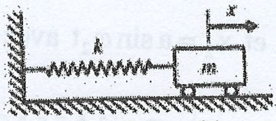


Particule se déplaçant sur un cercle

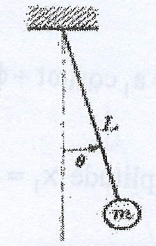
Exercice 7 :

On considère les quatre systèmes à un degré de liberté représentés sur les figures ci-après. On se propose d'étudier les mouvements de faible amplitude. Déterminer pour chaque système : l'énergie cinétique, l'énergie potentielle, le Lagrangien, l'équation différentielle du mouvement, la période T des petits oscillations.

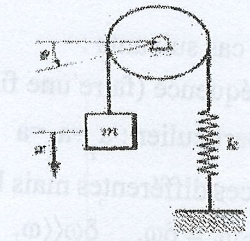
Généralités sur les vibrations et équations de Lagrange



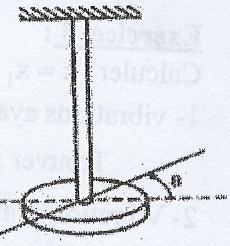
Système n°1



Système n°2



Système n°3



Système n°4

Exercice 8 :

La difficulté majeure pour trouver l'équation du mouvement d'un système oscillatoire à travers l'équation de Lagrange est d'écrire l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système. Définir pour chacun des systèmes des quatre figures suivantes :

1- Les énergies cinétique et potentielle et le Lagrangien

2- L'équation du mouvement linéarisée au voisinage de la position d'équilibre stable (c'est-à-dire l'équation des petites oscillations).

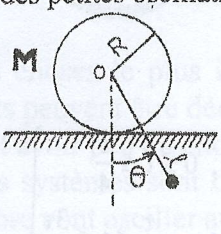


Figure 1 : bras de longueur ℓ d'un cylindre qui roule sans glisser

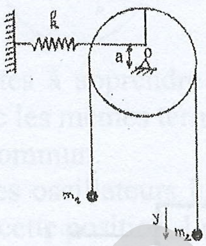


Figure 2 : cylindre M oscillant autour de O fixe, attaché à un ressort k. le fil s'enroule sans glisser

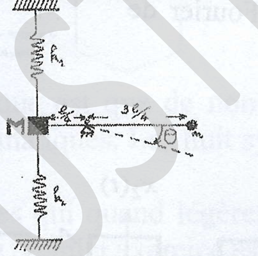


Figure 3 : Fléau portant les masses M et m oscillant autour du point fixe O A l'équilibre, θ=0

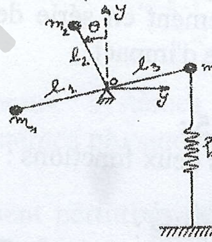
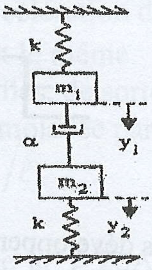
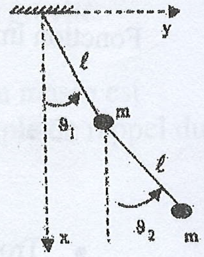


Figure 4 : Système de bras rigides tournent autour du point fixe O. A l'équilibre θ=0

Exercice 9 :

Trouver les équations du mouvement des deux systèmes à deux degrés de liberté suivant représentant (a) un ensemble de deux masses et de trois ressorts, (b) deux pendules simples identiques mis bout à bout.





IV- SOLUTION DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES DES VIBRATIONS :

Exercice 10 :

Résoudre les équations différentielles en utilisant leurs conditions initiales :

(a) $\ddot{x}+100x=0$ $\quad x(0)=0{,}05$ et $\dot{x}(0)=0$ $\quad$ (b) $\ddot{x}+\frac{1}{28}\dot{x}+100x=0$ $\quad x(0)=0{,}05$ et $\dot{x}(0)=0$

(c) $\ddot{x}+140\dot{x}+100x=0$ $\quad x(0)=0{,}05$ et $\dot{x}(0)=0$

Exercice 11 :

Résoudre les équations différentielles en utilisant leurs conditions initiales :

(a) $\ddot{x}+(1/28)\dot{x}+100x=30\cos 4t$; $x(0)=0{,}35$ et $\dot{x}(0)=0$

(b) $\ddot{x}+121x=121(\sin 2t+\cos 2t)$; $x(0)=1$ et $\dot{x}(0)=0$

(c) $\ddot{x}+25x=2/3\sin 2t$; $x(0)=0$ et $\dot{x}(0)=0$

(d) $\ddot{x}+81x=24{,}3\sin 9t$; $x(0)=0$ et $\dot{x}(0)=0$

Oscillations libres et forcées de systèmes à un degré de liberté

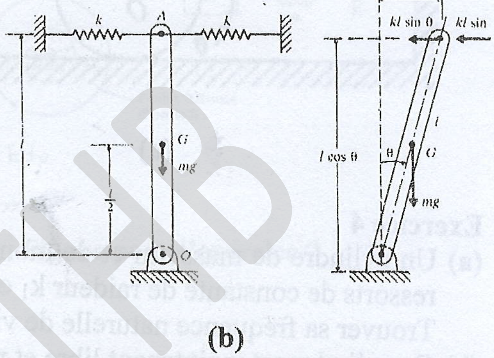
I- Oscillations libres de systèmes à un degré de liberté

Exercice 1 :

On considère une barre rigide uniforme qui pivote à une extrémité et qui est connectée symétriquement par deux ressorts à l'autre extrémité, comme le montre la figure. On suppose la masse de la barre égale à m et les ressorts au repos lorsque la barre est verticale.

(a) Établir l'équation du mouvement du système.

(b) Donner et discuter la solution dans les trois cas qui se présentent.



(b)

Figure pour l'exercice 1

Exercice 2 :

Un marteau percute une enclume avec une vitesse de 20 m/s (figure). Le marteau et l'enclume pèsent 50N et 500N respectivement. L'enclume est supporté par quatre ressorts chacun de raideur k=20 kN/m. Trouver le mouvement résultant de l'enclume :

(a) Si le marteau reste en contact avec l'enclume

(b) Si le marteau ne reste pas en contact avec l'enclume après le contact initial.

Exercice 3 :

Trouver l'équation du mouvement pour les deux systèmes de la figure (a) et (b).

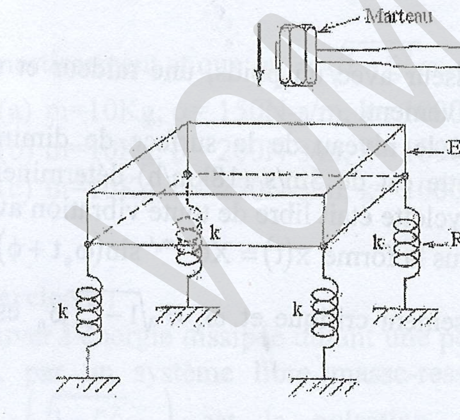
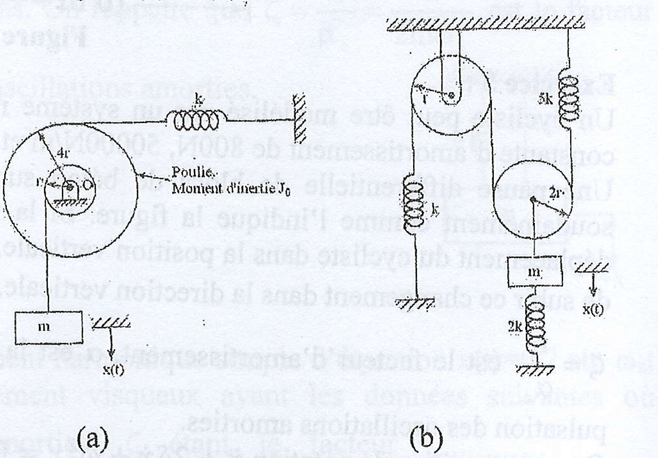


Figure pour l'exercice 2



(a) (b)

Figure pour l'exercice 3

Oscillations libres et forcées de systèmes à un degré de liberté

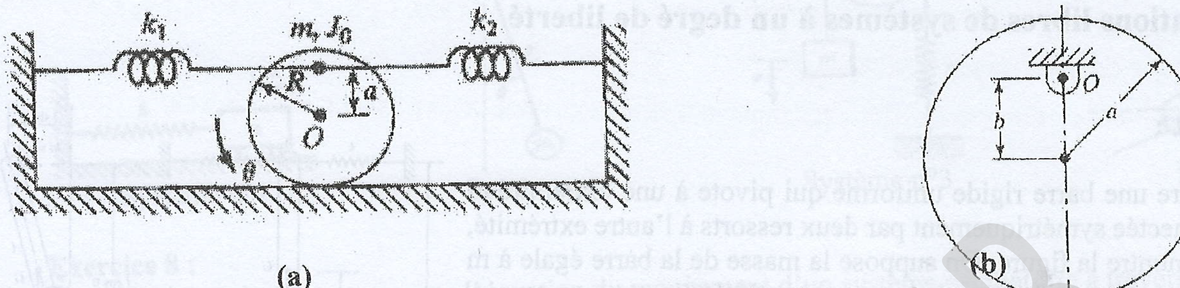


Figure pour l'exercice 4

Exercice 4 :

(a) Un cylindre de masse m et de moment d'inertie J_0 est libre de rouler sans glisser mais est retenu par deux ressorts de constante de raideur k_1 et k_2 comme le montre la figure (a).
Trouver sa fréquence naturelle de vibration. Trouver la valeur de a qui maximise cette fréquence

(b) Ce cylindre est maintenant libre et pivote au point O comme le montre la figure (b).
Trouver la fréquence naturelle du système et la fréquence maximale en faisant varier la distance b.

II- Oscillations libres de systèmes amortis à un degré de liberté

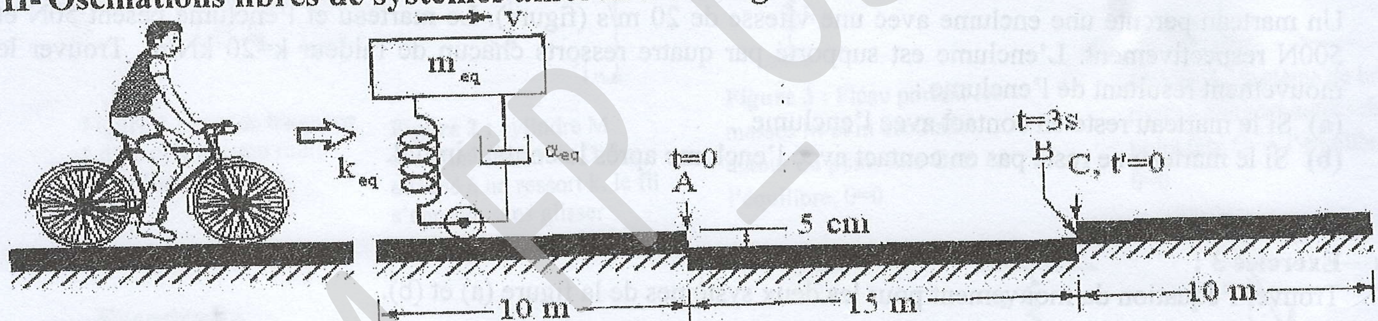


Figure pour l'exercice 5

Exercice 5 :

Un cycliste peut être modélisé par un système masse-ressort-amortisseur avec un poids, une raideur et une constante d'amortissement de 800N, 50000N/m et 1000 N.s/m, respectivement.
Une pause différentielle de blocs de béton sur l'autoroute a causé le niveau de la surface de diminuer soudainement comme l'indique la figure. Si la vitesse de la bicyclette est de 5m/s (18km/h) déterminer le déplacement du cycliste dans la position verticale, supposez que la bicyclette était libre de toute vibration avant de subir ce changement dans la direction verticale. Ecrire la solution sous la forme $x(t)=Xe^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_a t+\phi)$ où

$\zeta=\dfrac{\alpha}{\alpha_c}$ est le facteur d'amortissement, α est la constante d'amortissement critique et $\omega_a=\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$ est la pulsation des oscillations amorties.

On pourra utiliser la notation $\ddot{x}+2\delta\dot{x}+\omega_0^2x=0$ qui donne

Exercice 6 :

Le schéma simplifié d'un canon est montré sur la figure. Quand le canon tire un boulet, des gaz de haute pression accélèrent le projectile à l'intérieur d'un baril à une vitesse très élevée. La force de réaction qui en résulte pousse le baril dans la direction opposée du projectile. Puisqu'il est désirable de ramener le baril dans la position fixe dans le temps le plus court sans oscillations, on utilise l'amortissement critique d'un système masse-ressort-amortisseur qu'on appelle le mécanisme de rappel. La distance maximum de rappel du canon est spécifiée comme étant 0,5m. Si la vitesse initiale de rappel est 10m/s et la masse du canon est 500kg. Trouver la constante de raideur du mécanisme de rappel.

Oscillations libres et forcées de systèmes à un degré de liberté

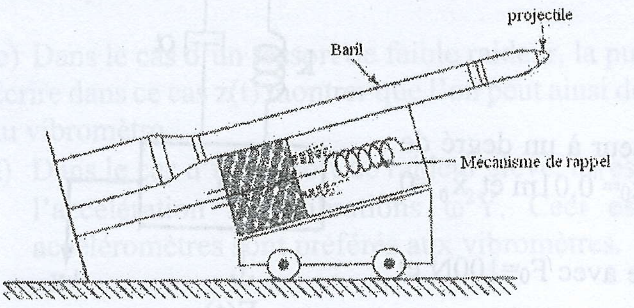


Figure pour l'exercice 6

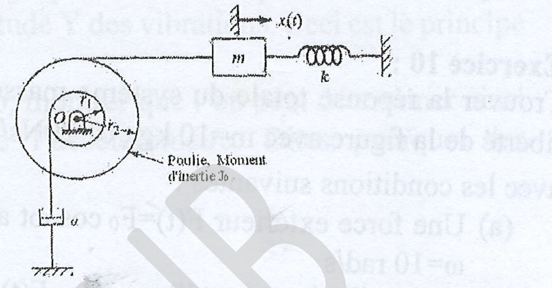


Figure pour l'exercice 7

Exercice 7 :

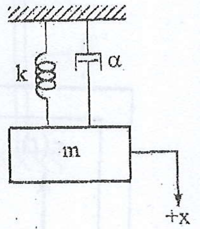
Le système montré dans la figure a une fréquence naturelle de 5Hz pour les données suivantes. M=10Kg, J_0=5 Kg.m², r_1=10cm, r_2=25cm. Quand le système subit une perturbation qui lui donne un déplacement initial, l'amplitude de vibration libre est réduite de 80% en 10 périodes. Déterminer les valeurs de K et de α.

On rappelle que le décrément logarithmique $\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$ est $\approx 2\pi\zeta$ si $\zeta<<1$ où ζ est le facteur d'amortissement = α/α_c.

Exercice 8 :

Déterminer les valeurs de ζ et de ω_a pour les systèmes amortis suivants et donner la solution du mouvement de la masse lorsque x_0=0,1m et $\dot{x}_0$ = 10m/s pour chacun des cas. On rappelle que $\zeta = \frac{\alpha}{\alpha_c} = \frac{\alpha}{2m\omega_n}$ est le facteur d'amortissement et que $\omega_a = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n$ est la pulsation des oscillations amorties.

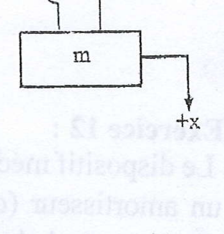
(a) m=10Kg, α= 150N-s/m, k= 1000N/m
(b) m=10Kg, α= 200N-s/m, k= 1000N/m
(c) m=10Kg, α= 250N-s/m, k= 1000N/m



Exercice 9 :

Trouver l'énergie dissipée durant une période d'un mouvement harmonique simple d'équation x(t)=0,2 sin ω_at (m), par un système libre masse-ressort avec amortissement visqueux ayant les données suivantes où $\omega_a = \left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_n\right)$ est la pulsation des oscillations amorties, ζ étant le facteur d'amortissement, $\zeta=\alpha/\alpha_c$.

(a) m=10Kg, α=50N-s/m, k= 1000N/m
(b) m=10Kg, α=150N-s/m, k= 1000N/m



Oscillations libres et forcées de systèmes à un degré de liberté

III-Système soumis à une force sinusoïdale

Exercice 10 :

Trouver la réponse totale du système masse-ressort-amortisseur à un degré de liberté de la figure avec m=10 kg , α=20Ns/m, k=4000N/m, x_0= 0,01m et $\dot{x}_0=0$ avec les conditions suivantes :

(a) Une force extérieur $F(t)=F_0 \cos \omega t$ agit sur le système avec F_0=100N et ω=10 rad/s

(b) Les oscillations sont libres avec F(t)=0

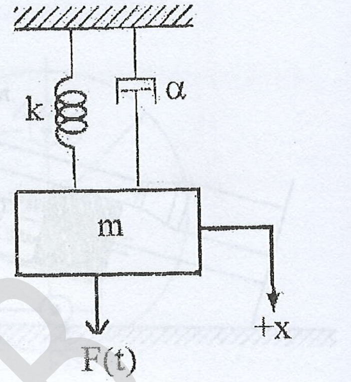


Figure pour l'exercice 10

Exercice 11 :

Une barre uniforme de masse m pouvant pivoter autour du point O, est connecté à ses extrémités par deux ressorts de constante de raideur k l'extrémité P du ressort PQ est soumise à un déplacement sinusoïdale $x(t)=x_0 \sin \omega t$ comme le montrent les figures (a) et (b)

Trouver pour les deux figures le déplacement angulaire en régime permanent de la barre quand ℓ=1m, k=1000N/m, m=10kg, x_0= 1 cm, ω=10rad/s et α=500Ns/m .

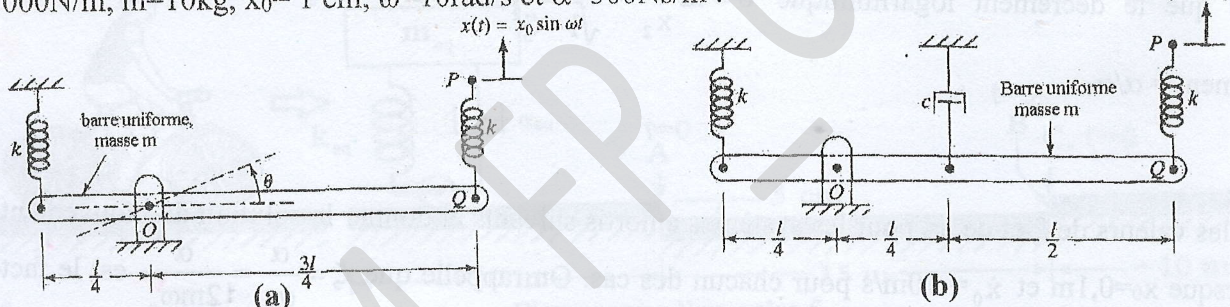


Figure pour l'exercice 11

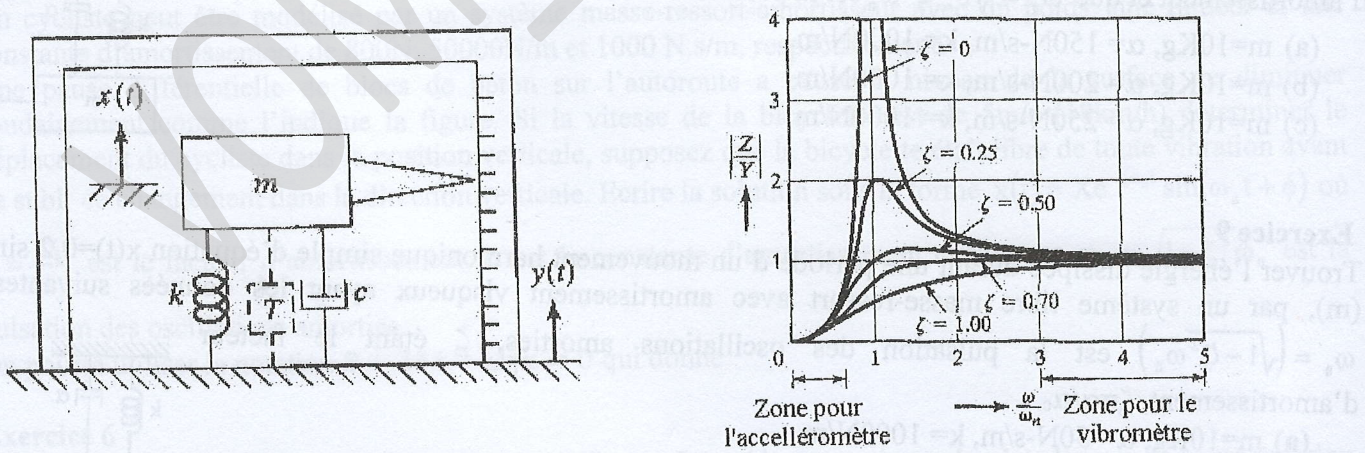


Figure pour l'exercice 12

Exercice 12 :

Le dispositif mécanique de la figure (a) est un instrument sismique qui consiste en une masse (m), un ressort (k), un amortisseur (α) et un traceur qui donne le mouvement de la masse m en fonction du temps. Soit x(t) le mouvement de la masse m et y(t) le mouvement de la base que l'on suppose de la forme $y(t)=Y \sin \omega t$.

(a) Établir l'équation du mouvement de la masse m en fonction du déplacement relatif $z(t)=x(t)-y(t)$.

(b) Déterminer la solution stationnaire z(t). Cette solution est donnée dans la forme $z(t)=Z\sin(\omega t-\phi)$. La variation [Z/Y] en fonction du rapport des fréquences $r=\dfrac{\omega}{\omega_n}$ est donnée dans la figure (b)

(c) Dans le cas d'un ressort de faible raideur, la pulsation propre ω_n est petite devant la pulsation ω. Écrire dans ce cas z(t) montrer que l'on peut ainsi déterminer l'amplitude Y des vibrations. Ceci est le principe du vibromètre.

(d) Dans le cas d'un ressort de raideur élevé, ω_n est grande devant ω, montrer que l'on peut déterminer ainsi l'accélération des vibrations $\omega^2 Y$. Ceci est le principe de l'accéléromètre. Dites pourquoi les accéléromètres sont préférés aux vibromètres.

Exercice 13 :

La bâtisse schématisée sur la figure (a) est soumise à une accélération harmonique du sol.

(a) Trouver la réponse subie par la dalle supérieure de masse m

(b) Trouver le déplacement horizontale de la dalle quand l'accélération du sol est donnée par $\ddot{x}_g = 100\sin\omega t \text{ mm/s}$. On suppose les données suivantes : m=2000 kg, k=0,1 MN/m , ω=25 rad/s et $x_g(t=0)=\dot{x}_g(t=0)=x(t=0)=\dot{x}(t=0)=0$

(c) Le sol de la figure (a) est maintenant sujet a un déplacement harmonique horizontal avec une fréquence ω=200 rad/s et une amplitude X_g= 15mm, trouver l'amplitude des vibrations de la dalle supérieure, on suppose la masse de la dalle toujours égale a 2000kg, mais la raideur des colonnes est égale a 0,5 MN/m.

(d) On se propose d'ajouter un amortisseur comme le montre la figure (b), pour absorber des vibrations dues a un mouvement horizontale du sol $y(t)=Y\cos\omega t$, Trouver l'expression de la constante d'amortissement de l'amortisseur qui absorbe le maximum d'énergie.

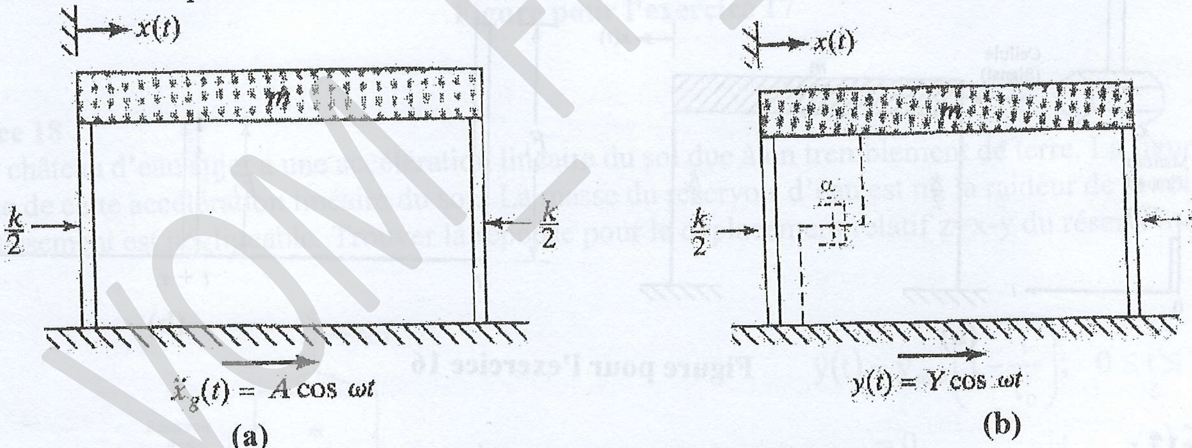


Figure pour l'exercice 13

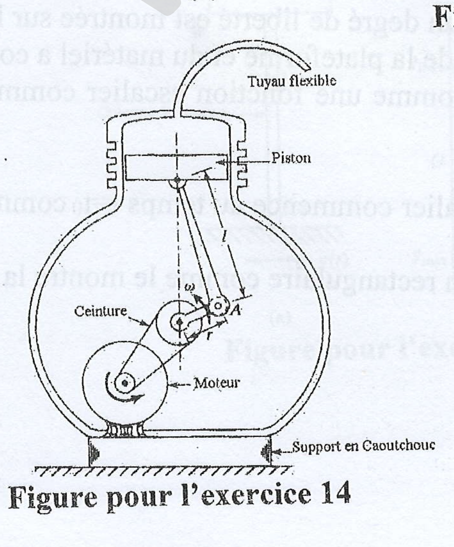


Figure pour l'exercice 14

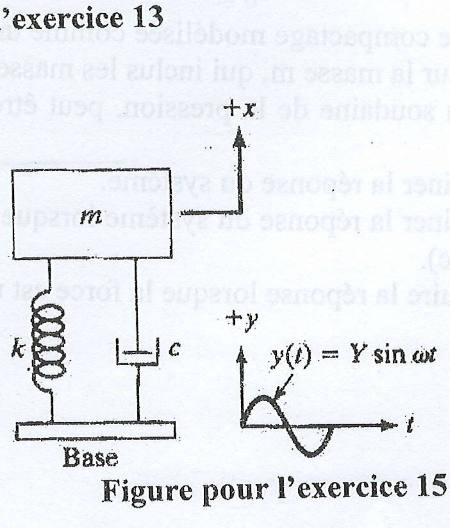


Figure pour l'exercice 15

Oscillations libres et forcées de systèmes à un degré de liberté

Exercice 14 :
Un compresseur à air monocylindre de masse 100kg est monté sur des supports en caoutchouc comme le montre la figure, les constantes d'élasticité et d'amortissement des supports en caoutchouc sont données par $k=10^6$ N/m et $\alpha=2000$ N.s/m, respectivement. Si le déséquilibre de rotation du compresseur est équivalent à une masse de 0,1 kg localisée à la fin de l'essieu (point A), déterminer la réponse du compresseur à une vitesse de l'essieu de 3000 rpm. Supposer r=10 cm.

IV- Systèmes soumis à une force quelconque :

Exercice 15 :
Trouver la réponse totale d'un système masse ressort à un degré de liberté avec amortissement visqueux soumis à une excitation harmonique de sa base comme le montre la figure pour les données suivantes : m=10kg, $\alpha=20$ N.m/s, k=4000N/m, $y(t)=0{,}05\sin 5t$(m), $x_0=0{,}02$m, $\dot{x}_0=10$m/s.

Exercice 16 :
Dans les tests de vibrations d'une structure, un marteau d'impact et une cellule mesurant la charge sont utilisés comme matériel d'excitation comme le montre la figure. En supposant m=5kg, k=2000N/m, α=10N.s/m, trouver la réponse du système :

(a) Dans le cas d'une force d'impact $\underline{F}$=20N.s donnée à t=0.

(b) Dans le cas d'un double impact comme le montre la figure (b) donnant lieu a une force appliquée $F(t)=20\delta(t)+10\delta(t-0{,}2)$

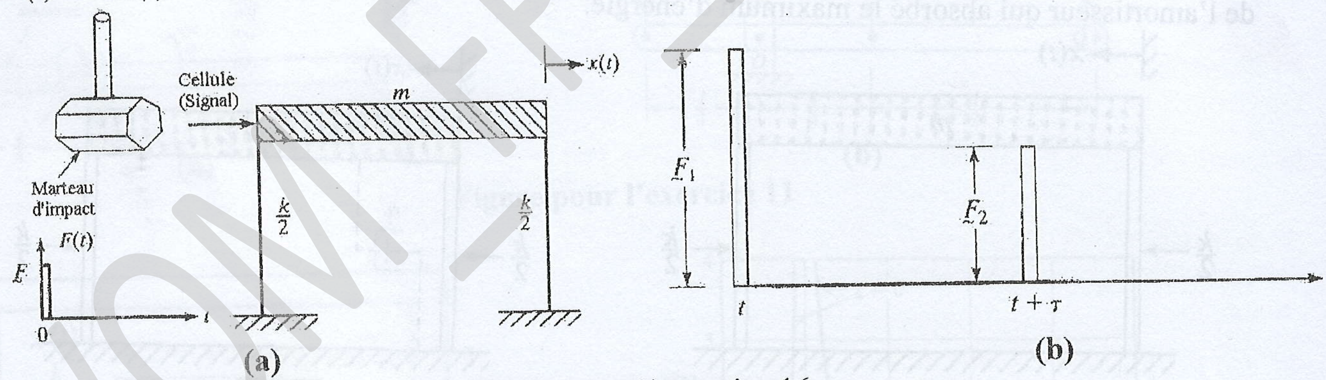


Figure pour l'exercice 16

Exercice 17 :
Une machine de compactage modélisée comme un système à un degré de liberté est montrée sur la figure (a), la force agissant sur la masse m, qui inclus les masses du piston, de la plateforme et du matériel a compacter, dûe à une application soudaine de la pression, peut être idéalisée comme une fonction escalier comme le montre la figure (b).

(a) Déterminer la réponse du système.

(b) Déterminer la réponse du système lorsque la force escalier commence au temps $t=t_0$ comme le montre la figure (c).

(c) En déduire la réponse lorsque la force est une pulsation rectangulaire comme le montre la figure (d).

Oscillations libres et forcées de systèmes à un degré de liberté

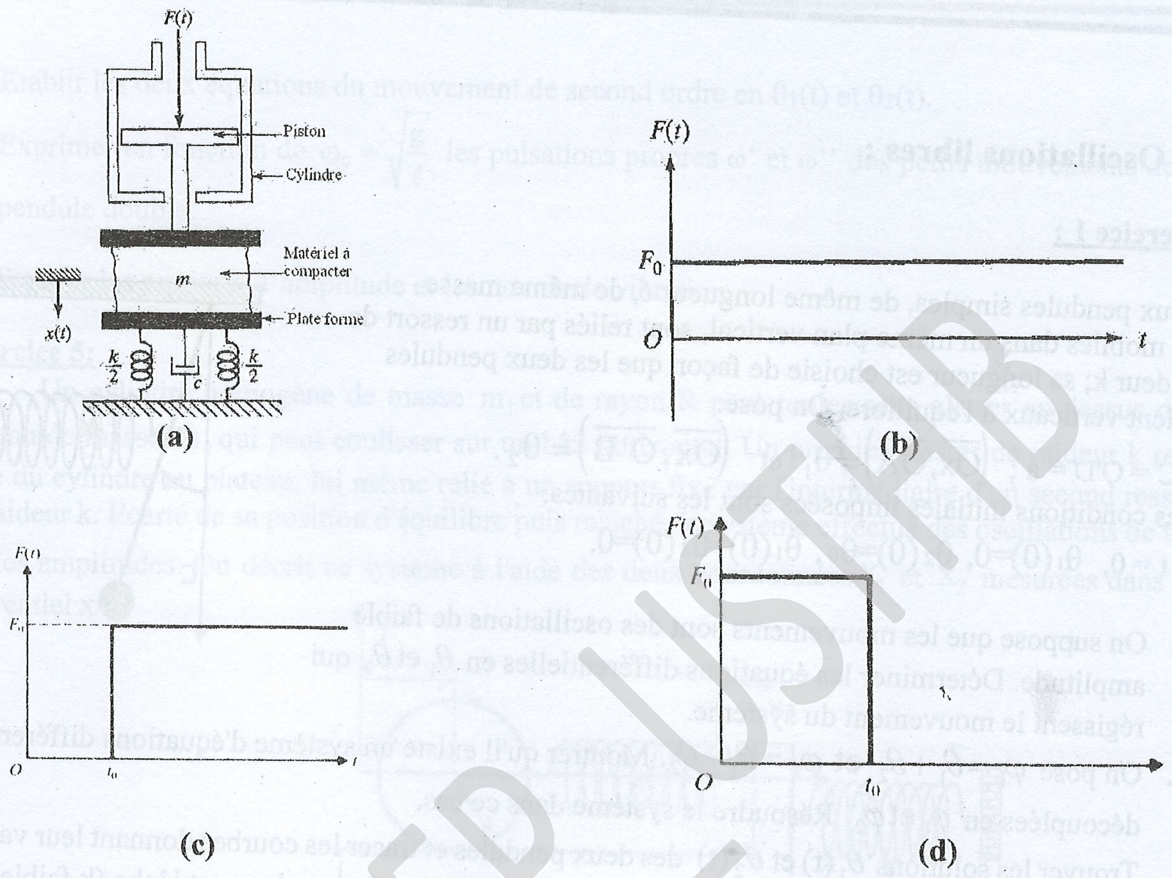
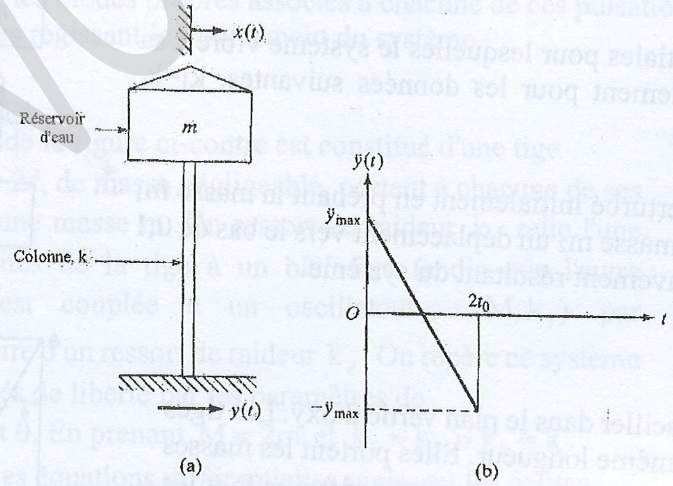


Figure pour l'exercice 17

Exercice 18 :

Soit un château d'eau sujet a une accélération linéaire du sol due à un tremblement de terre. La figure (b) montre la forme de cette accélération linéaire du sol. La masse du réservoir d'eau est m, la raideur de la colonne est k et l'amortissement est négligeable. Trouver la réponse pour le déplacement relatif z=x-y du réservoir d'eau.



$$\ddot{y}(t) = \ddot{y}_{max}\left(1 - \frac{t}{t_0}\right); \quad 0 \le t \le 2t_0$$

$$= 0 \quad ; \quad t > 2t_0$$

Figure pour l'exercice 18

Oscillations libres et forcées des systèmes à deux degrés de Liberté

a- Oscillations libres :

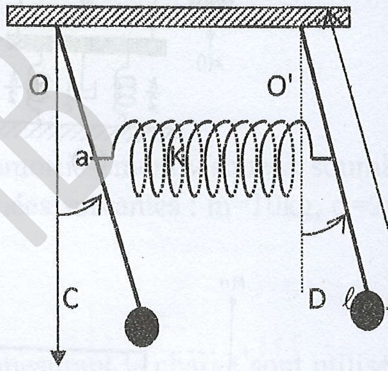
Exercice 1 :

Deux pendules simples, de même longueur ℓ, de même masse m, mobiles dans un même plan vertical, sont reliés par un ressort de raideur k; sa longueur est choisie de façon que les deux pendules soient verticaux à l'équilibre. On pose:

$OC = O'D = a$; $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OA}\right) = \theta_1$ et $\left(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{O'B}\right) = \theta_2$.

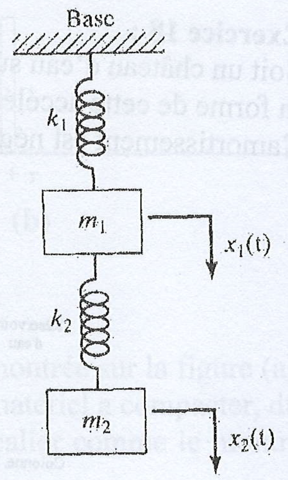
Les conditions initiales imposées sont les suivantes:

à $t = 0$, $\theta_1(0)=0$, $\theta_2(0)=\theta_0$, $\dot{\theta}_1(0)=\dot{\theta}_2(0)=0$.



1. On suppose que les mouvements sont des oscillations de faible amplitude. Déterminer les équations différentielles en θ_1 et θ_2 qui régissent le mouvement du système.
2. On pose $\varphi_1 = \theta_1 + \theta_2$ et $\varphi_2 = \theta_1 - \theta_2$. Montrer qu'il existe un système d'équations différentielles découplées en φ_1 et φ_2. Résoudre le système dans ce cas.
3. Trouver les solutions $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ des deux pendules et tracer les courbes donnant leur variation en fonction du temps. Que deviennent ces solutions lorsque le couplage est lâche (k faible).

Exercice 2 :



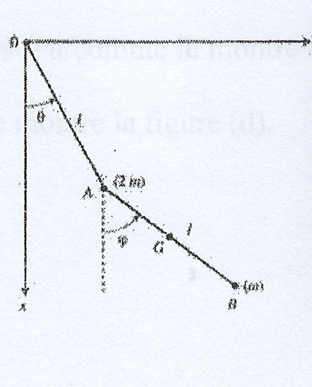
(a) Trouver les fréquences naturelles du système de la figure, avec $m_1=m$, $m_2=2m$, $k_1=k$ et $k_2=2k$. Déterminer la réponse du système quand $k=1000N/m$, $m=20kg$, et les valeurs initiales des déplacements sont de 1 et de -1, respectivement. (Les unités de déplacements sont quelconques, dm par exemple).

(b) Déterminer les conditions initiales pour lesquelles le système vibre à sa fréquence la plus basse seulement pour les données suivantes. $k_1=k$, $k_2=2k$, $m_1=m$ et $m_2=2m$.

(c) Le système est maintenant perturbé initialement en prenant la masse m_1 stationnaire et en donnant la masse m_2 un déplacement vers le bas de 0,1 m. Discuter la nature du mouvement résultant du système.

Exercice 3 :

Un pendule double, est libre d'osciller dans le plan vertical oxy. Les tiges sont de masse négligeable et de même longueur. Elles portent les masses 2m et m. On désignera par $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ les angles respectifs que font les tiges avec la verticale descendante Ox, à l'instant t. On suppose que ce pendule double n'est soumis qu'à de petites oscillations.



Oscillations libres et forcées des systèmes à deux degrés de Liberté

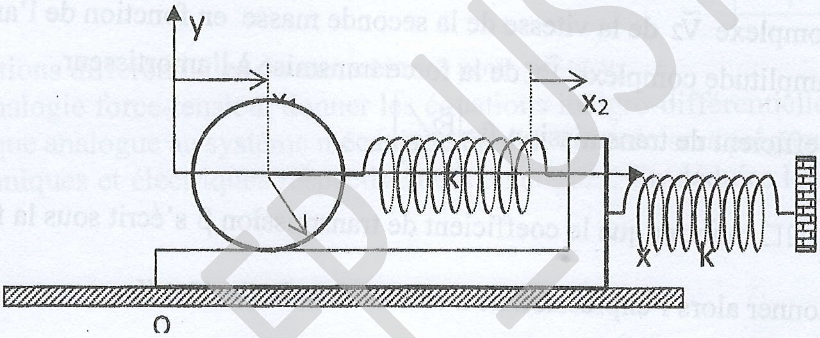
(a) Etablir les deux équations du mouvement de second ordre en $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$.

(b) Exprimer en fonction de $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ les pulsations propres ω' et ω'' des petits mouvements de ce pendule double.

(c) Trouver les rapports d'amplitude et les nœuds de vibration.

Exercice 5:

Un cylindre homogène de masse m_1 et de rayon R peut rouler sans glisser au-dessus d'un plateau de masse m_2 qui peut coulisser sur un bâti horizontal. Un premier ressort de raideur k relie l'axe du cylindre au plateau, lui même relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un second ressort de raideur k. Ecarté de sa position d'équilibre puis relâché, le système effectue des oscillations de très faibles amplitudes. On décrit ce système à l'aide des deux coordonnées x_1 et x_2 mesurées dans un référentiel xOy



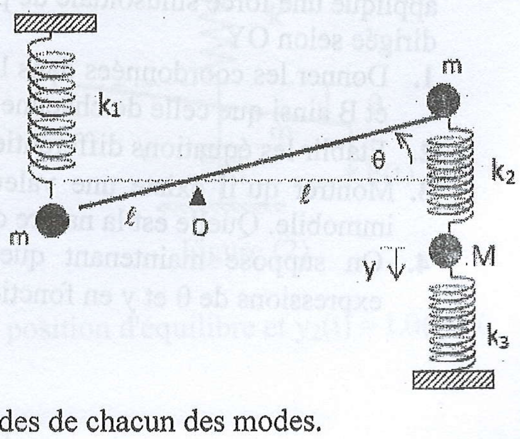
1. Calculer l'énergie potentielle de ce système.
2. Montrer que son énergie cinétique s'écrit sous la forme:
3.

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{3m}{2}\right)\dot{x}_1^2-\frac{1}{2}m\dot{x}_1\dot{x}_2+\frac{1}{2}\left(\frac{5m}{2}\right)\dot{x}_2^2 \quad \text{avec} \quad m_1=m \text{ et } m_2=2m$$

4. Déterminer les pulsations propres du système.
5. Trouver les modes propres associés à chacune de ces pulsations propres et écrire les solutions générales régissant le mouvement du système.

Exercice 6 :

Le système de la figure ci-contre est constitué d'une tige de longueur 2ℓ, de masse négligeable, portant à chacune de ses extrémités une masse m. Un ressort de raideur k_1 relie l'une des extrémités de la tige à un bâti fixe tandis que l'autre extrémité est couplée à un oscillateur (M, k_3) par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k_2. On repère ce système à deux degrés de liberté par les paramètres de position y et θ. En prenant $M = 2m$ et $k_1 = k_2 = k_3 = k$:



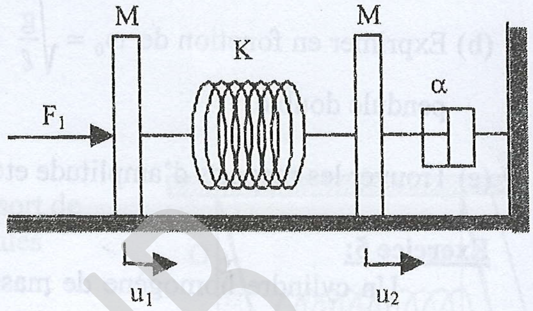
1) Etablir les équations différentielles régissant les petites oscillations.
2) Déterminer les pulsations propres et les rapports des amplitudes de chacun des modes.
3) Ecrire les solutions générales $y(t)$ et $\theta(t)$.

Oscillations libres et forcées des systèmes à deux degrés de Liberté

b- Oscillations forcées :

Exercice 8 :

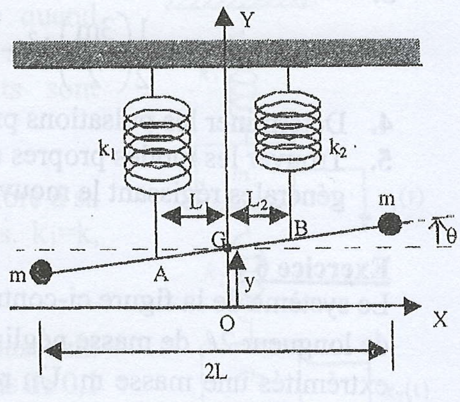
On considère le système à deux degrés de liberté représenté par la figure ci-dessus. Il est constitué par deux masses identiques M reliées par un ressort de raideur K. La seconde masse est reliée à un bâti fixe par un amortisseur de coefficient de frottement visqueux α, tandis que la première masse est soumise à une force sinusoïdale F_1 de pulsation ω. Les deux masses glissent sans frottement sur le plan horizontal. u_1 et u_2 représentent les positions respectives de chacune des masses par rapport à l'équilibre.



1. Etablir les équations différentielles du mouvement pour les coordonnées u_1 et u_2.
2. Dans le cas où α est négligeable devant $\left(M\omega-\frac{K}{\omega}\right)$, calculer en régime permanent sinusoïdal l'amplitude complexe $\tilde{V}_2$ de la vitesse de la seconde masse en fonction de l'amplitude de $\tilde{F}_1$.
3. En déduire l'amplitude complexe $\tilde{F}_2$ de la force transmise à l'amortisseur.
4. Calculer le coefficient de transmission $\beta=\left|\tilde{F}_2/\tilde{F}_1\right|$.
5. Si $\omega>>\sqrt{K/M}$ □□ montrer que le coefficient de transmission β s'écrit sous la forme : $\beta=\frac{a}{M^2\omega^3}$; donner alors l'expression de a en fonction de □α □et K.

Exercice 9 :

Le système représenté sur la figure ci-dessus est assujetti à se déplacer, sans frottement, sur un plan horizontal. La tige de longueur 2L est sans masse. Le mouvement du système peut être décrit par les coordonnées généralisées θ et y. θ représente l'angle de rotation de la tige autour du centre de masse G; y est le déplacement du centre de masse par rapport à la position d'équilibre. On considère les mouvements de faible amplitude et on suppose qu'à l'équilibre $\theta=0$ et $y=0$. Au point G on applique une force sinusoïdale de pulsation ω d'amplitude F_0 et dirigée selon OY.

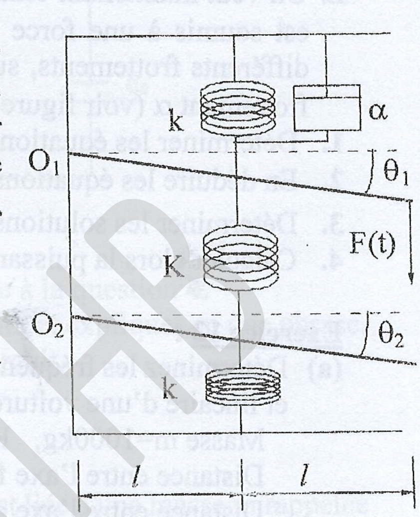


1. Donner les coordonnées dans le repère XOY, des points A et B ainsi que celle de chacune des masses ponctuelles m.
2. Etablir les équations différentielles du mouvement de θ et y.
3. Montrer qu'il existe une valeur de la pulsation ω pour laquelle le centre de masse G reste immobile. Quelle est la nature du mouvement dans ce cas ?
4. On suppose maintenant que $k_1L_1= k_2L_2$. Calculer, en régime permanent sinusoïdal, les expressions de θ et y en fonction du temps. Quelle est la nature du mouvement dans ce cas ?

Oscillations libres et forcées des systèmes à deux degrés de Liberté

Exercice 10 :

Le système ci-contre est constitué de deux tiges rectilignes identiques, homogènes de masse m et de longueur $2l$. Ces deux tiges sont reliées, en leur milieu, à deux bâtis fixes par deux ressorts identiques de raideur k. De plus elles sont couplées par un ressort de raideur K. A l'équilibre les tiges sont horizontales. Elles oscillent dans un plan vertical, autour de leurs extrémités respectives O_1 et O_2 en effectuant des oscillations de faible amplitude représentées par les angles θ_1 et θ_2. On pose $y_1 = l\,\theta_1$, $y_2 = l\,\theta_2$ et $\theta_0 = \sqrt{k/m}$.



Les différents frottements supposés faibles sont représentés par un amortisseur de coefficient de frottement α. Le système est soumis à une force extérieure sinusoïdale d'amplitude F_0 et de pulsation ω. Cette force verticale agit sur l'extrémité de la première tige.

1. Etablir les équations différentielles du mouvement pour y_1 et y_2.
2. En utilisant l'analogie force-tension, donner les équations intégro-différentielles qui régissent le système électrique analogue au système mécanique étudié. On précisera soigneusement toutes les grandeurs mécaniques et électriques respectivement analogues. En déduire le schéma électrique analogue.

Exercice 11 :

A/ Sur la figure 1, la masse M est reliée à un bâti fixe par un ressort de raideur k. La barre homogène, de masse $m = M/2$ et de longueur 2L, est reliée en son milieu à la masse M, par un ressort de raideur k, et pouvant osciller autour d'un point fixe O. Le système effectue des oscillations de faible amplitude dans le plan vertical. On suppose qu'à l'équilibre la barre est horizontale. On pose : $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

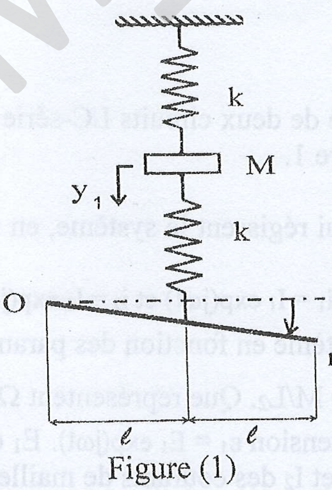


Figure (1)

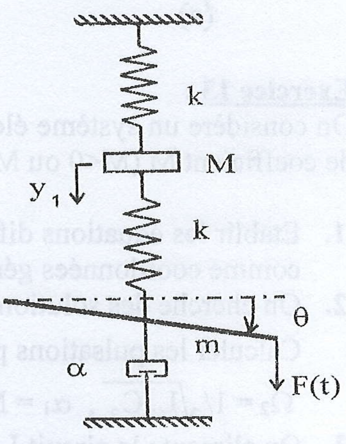


Figure (2)

On appelle $y_1(t)$ le déplacement de la masse M par rapport à la position d'équilibre et $y_2(t) = L\theta(t)$ où $\theta(t)$ est l'écart angulaire de la barre par rapport à l'horizontale.

1. Etablir les équations différentielles en $y_1(t)$ et $y_2(t)$.
2. Déterminer les pulsations propres du système en fonction de ω_0.

Oscillations libres et forcées des systèmes à deux degrés de Liberté

B/ On veut maintenant étudier les oscillations du système autour de la position d'équilibre lorsqu'il est soumis à une force extérieure sinusoïdale verticale d'amplitude F_0 et de pulsation ω. Les différents frottements, supposés visqueux, sont représentés par un amortisseur de coefficient de frottement α (voir figure 2). On suppose que F(t) reste verticale pour de faibles oscillations.

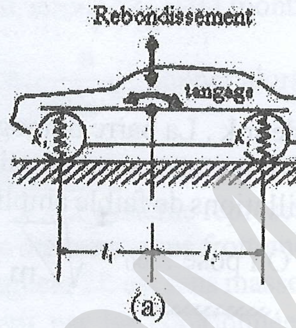
1. Déterminer les équations différentielles en $y_1(t)$ et $y_2(t)$.
2. En déduire les équations aux vitesses de $y_1(t)$ et de $y_2(t)$ en fonction de ω_0.
3. Déterminer les solutions $y_1(t)$ et $y_2(t)$ pour la pulsation $\omega = \omega_0 / \sqrt{2}$.
4. Calculer alors la puissance moyenne fournie au système pour cette pulsation.

Exercice 12 :

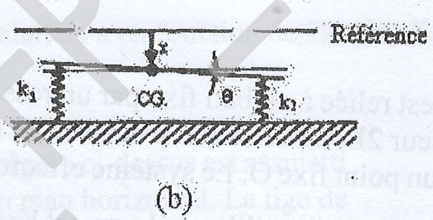
(a) Déterminez les fréquences et les localisations des nœuds de vibration, des mouvements angulaire et linéaire d'une voiture avec les données suivantes (figures (a) et (b)) :

Masse m=1000kg, Rayon de giration r=0,9m,
Distance entre l'axe frontal et le centre de gravité ℓ_1=1m,
Distance entre l'axe arrière et le centre de gravité ℓ_2=1,5m,
Raideur des amortisseurs avant k_f=18kN/m,
Raideur des amortisseurs arrières k_r=22kN/m

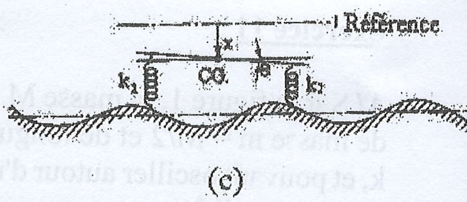
(b) La voiture roule maintenant sur une route rugueuse dont la surface varie sinusoïdalement avec une amplitude de 0,05 m et une longueur d'onde de 10 m (figure (c)). Trouver les équations du mouvement de la voiture si sa vitesse est de 50 km/h.



(a)



(b)



(c)

Exercice 13 :

On considère un système électrique formé de deux circuits LC-série couplés par induction mutuelle de coefficient M (M<0 ou M>0) voir figure 1.

1. Etablir les équations différentielles qui régissent le système, en utilisant les courants de mailles comme coordonnées généralisées.
2. On cherche des solutions de la forme $i_1 = I_1 \exp(j\omega t)$ et $i_2 = I_2 \exp(j\omega t)$.
   Calculer les pulsations propres du système en fonction des paramètres $\Omega_1 = 1/\sqrt{L_1C_1}$, $\Omega_2 = 1/\sqrt{L_2C_2}$, $\alpha_1 = M/L_1$ et $\alpha_2 = M/L_2$. Que représentent Ω_1 et Ω_2 ?
3. On alimente le circuit L_1C_1 avec une tension $\varepsilon_1 = E_1 \exp(j\omega t)$. E_1 étant réel.
   Calculer les amplitudes complexes I_1 et I_2 des courants de maille.
   Calculer l'impédance complexe aux bornes du générateur "ε_1".
4. Pour quelle valeur particulière, non nulle, de la pulsation d'excitation ω, le courant I_1 est-il nul ?

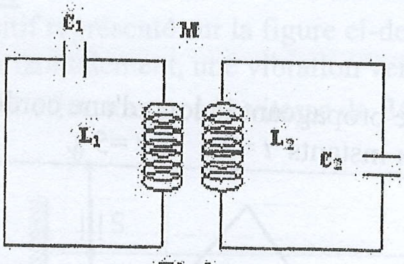


Fig.1

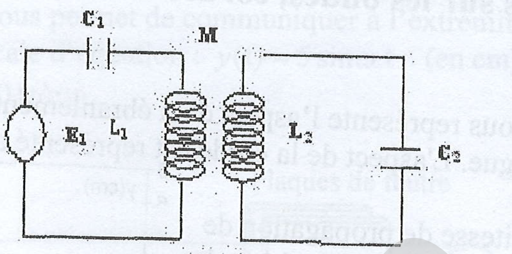
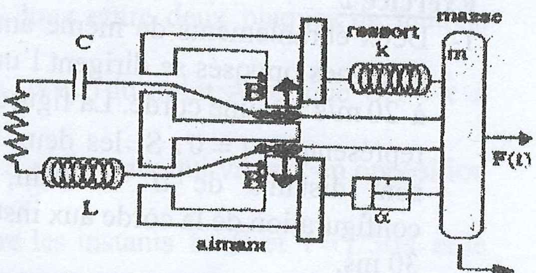


Fig.2

5. On suppose que le générateur "ε_1" fonctionne à la pulsation calculée à la question 4. Calculer alors la f.e.m. induite par le deuxième circuit dans le premier et expliquer en une phrase, pourquoi il ne peut y avoir d'oscillations forcées dans le premier circuit.

Exercice 14 :

Dans le circuit ci-dessous, utilisé en récepteur, la bobine est mobile et est liée à une masse m rappelée à une position d'équilibre par un ressort de constante de raideur k. Ce système est amorti et la constante d'amortissement est α. La masse m est repérée, par rapport à sa position d'équilibre, par la coordonnée x. On applique, sur la tige une force F(t) de type sinusoïdale, d'amplitude F_0 et de pulsation ω.



1. Le circuit électrique est-il traversé par un courant lorsque :
   a/ $B = 0$ et $F_0 = 0$ b/ $B = 0$ et $F_0 \neq 0$
   c/ $B \neq 0$ et $F_0 \neq 0$ d/ $B \neq 0$ et $F_0 = 0$
2. Etablir les équations integro-différentielles régissant le fonctionnement de ce système. En déduire l'impédance mécanique $Z = f(t) / v(t)$, f(t) étant la forme complexe de F(t) et v(t) celle de x(t).

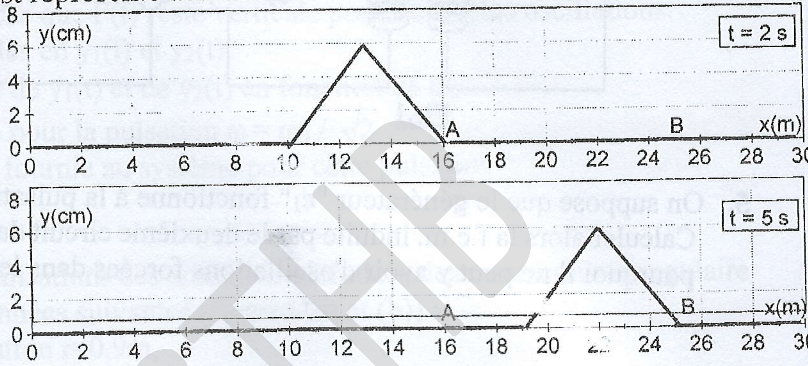
Calculer le rendement du système. A quelle pulsation ω_0, ce rendement est-il maximal ? Donner, alors, sa valeur.

Les ondes mécaniques

a- Généralités sur les ondes, cordes vibrantes

Exercice 1

La figure ci-dessous représente l'aspect d'un ébranlement se propageant le long d'une corde indéfiniment longue. L'aspect de la corde est représenté aux instants $t = 2$ s et $t = 5$ s.



1- Calculer la vitesse de propagation de cet ébranlement. Quelle est la position de l'ébranlement à $t = 0$?

2- A quel instant t_1 le point B aura t - il une amplitude maximale ?

3- A quel instant t_2 le point B revient-il à sa position initiale ?

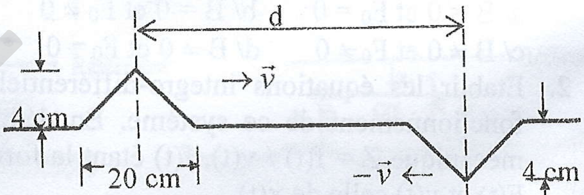
4- A quel instant t_3 le point M retrouvera-t-il pour la première fois une élongation nulle ?

5- Tracer sur un même graphe les amplitudes $y_A(t)$ et $y_B(t)$ des points A et B de la corde.

6- Représenter la courbe de vitesse $\dot{y}_B(t)$ du point B.

Exercice 2

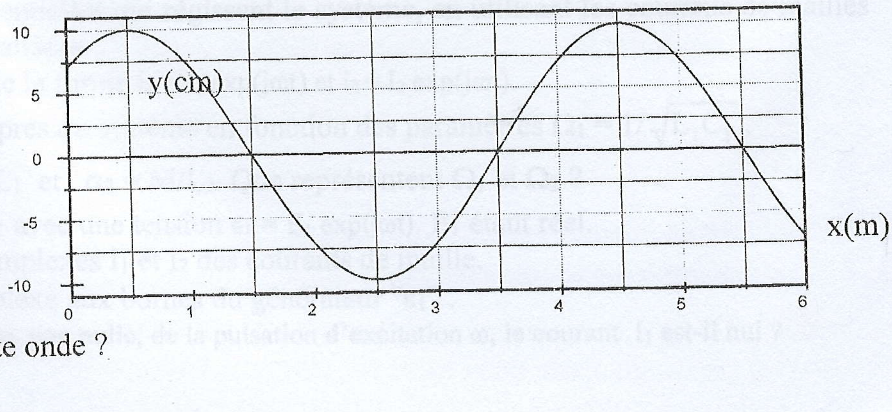
1- Deux ébranlements de même amplitude mais de signes opposés se dirigent l'un vers l'autre à 20 m/s sur une corde. La figure ci-contre les représente à $t = 0$. Si les deux ébranlements sont distants de $d = 60$cm, dessinez la configuration de la corde aux instants 10, 15 et 30 ms.



2- Répondre aux mêmes questions si l'ébranlement de droite est du même signe que celui de gauche.

Exercice 3

Une onde transversale sinusoïdale, se propage le long d'une corde dans le sens des x négatifs à la vitesse $V = 10$m/s. La figure ci-dessous illustre le déplacement des particules sur la corde en fonction de la position à un instant t.



Calculer :

a) l'amplitude de cette onde,

b) sa longueur d'onde,

c) sa vitesse de phase,

d) sa période,

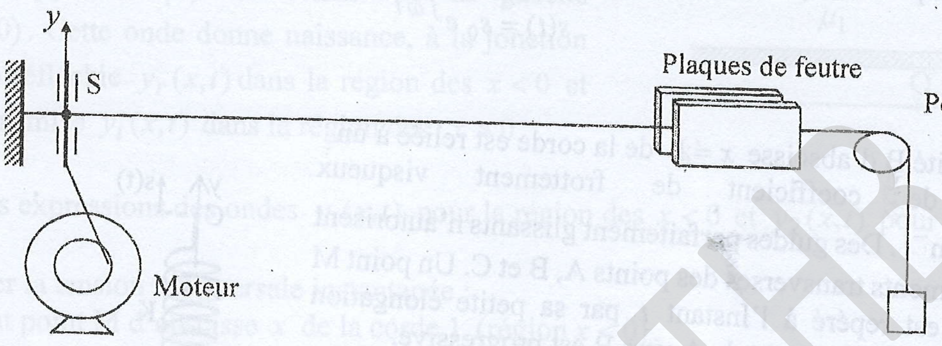
e) la vitesse maximale d'une particule sur la corde.

f) Quelle est l'équation de cette onde ?

Les ondes mécaniques

Exercice 4

Le dispositif représenté sur la figure ci-dessous permet de communiquer à l'extrémité S d'une corde tendue horizontalement, une vibration verticale d'équation : $y(t) = 5 \sin\omega\, t$ (en cm). Le moteur utilisé à cet effet, tourne à la vitesse de 3600 tr/mn.



La vitesse des ondes transversales dans une corde de masse linéique μ subissant une tension F est donnée par : $V = \sqrt{F/\mu}$.

1- La longueur totale de la corde est $L = 5\,\text{m}$ et sa masse est $m = 100$ g. Quelle doit être la masse M du poids tenseur agissant sur le brin vertical de la corde, pour que la longueur d'onde des vibrations transversales de pulsation ω soit $\lambda = 1\,\text{m}$.

2- Juste avant la poulie, la corde est pressée à frottement doux entre deux plaques de feutres, empêchant toute réflexion de se produire.

a) Ecrire l'expression en fonction du temps de l'élongation $y(x,t)$ du point A tel que SA $= x$ à l'instant t

b) Donner les abscisses des points qui vibrent en phase avec S et de ceux qui vibrent en opposition de phase avec S.

c) Représenter sur un même graphe le mouvement de S entre les instants $t = 0$ et $t = 1/30\,\text{s}$ et le mouvement du point A tel que $x = 2{,}75$ m.

d) Représenter l'aspect de la corde sur un même graphe aux instants $t = 0$ et $t = 1/600\,\text{s}$, entre $x = 0$ et $x = 4$ m.

Exercice 5

Le dispositif proposé dans l'exercice 4 peut être utilisé dans l'expérience de Melde. En effet, le moteur responsable des vibrations de la corde, peut être remplacé par un diapason dont la fréquence de vibrations, entretenues électriquement, est $f = 30$Hz.

1- On règle la masse M de façon qu'il n'y ait pas de nœud de vibration entre les deux extrémités du fil et l'on trouve $M = 720$ g. Déduire de cette expérience la masse $\boldsymbol{m}$ de la corde si la longueur L du fil entre le diapason et la poulie est de 2 mètres.

2- Quelles valeurs devra-t-on donner à f et à M pour obtenir entre les extrémités du fil un nœud de vibration, puis deux nœuds ? On donne $g = 9.8\ \text{m/s}^2$.

Exercice 6

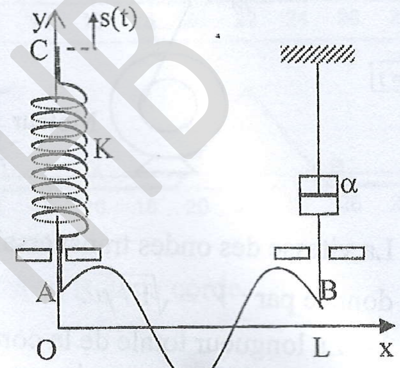
Une corde AB horizontale, de masse $m = 80$ g et de longueur $L = 2$ m, est tendue avec une tension T réglable. La corde est reliée à son extrémité A d'abscisse $x = 0$ par un ressort de raideur K dont

Module VOM **SÉRIE D'EXERCICE N° 4 (3 SEANCES)** **Année 2016/2017**

Les ondes mécaniques

l'extrémité C est reliée à un vibreur. Celui-ci communique au ressort un mouvement sinusoïdal transversal d'amplitude $s_0 = 1\,\text{cm}$ et de pulsation $\omega = 100\,\pi$ rad/s :

$$s(t) = s_0\, e^{j\omega t}$$



L'autre extrémité B d'abscisse $x = \text{L}$ de la corde est reliée à un amortisseur de coefficient de frottement visqueux $\alpha = 0{,}2\ \text{N}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$. Des guides parfaitement glissants n'autorisent que les mouvements transverses des points A, B et C. Un point M d'abscisse x est repéré à l'instant t par sa petite élongation $y(x,t)$. L'onde se propageant de A vers B est progressive.

1- Pour quelle tension T, exprimée en fonction de μ et α, l'onde qui s^{22222222222222222222}e propage le long de la corde est progressive. En déduire la vitesse de phase V de l'onde et sa longueur d'onde λ.

2- Montrer que les extrémités A et B de la corde vibrent en phase.

3- Exprimer les forces qui s'exercent au point A et écrire l'équation différentielle du mouvement de ce point.

4- Etablir les expressions de l'amplitude y_0 et de la phase φ de l'élongation $y(0,t)$ du point A. En déduire l'élongation $y(x,t)$ d'un point quelconque de la corde. Dans quel cas la phase φ est nulle ? Que vaut dans ce cas l'amplitude de vibration de chaque point de la corde ?

Exercice 7

Deux cordes 1 et 2, de longueurs L_1 et L_2, sont reliées à la jonction O pour former une longue corde fixée à ses deux extrémités et tendue horizontalement avec une tension T cons tante (figure a). Les cordes 1 et 2 ont respectivement pour masses linéiques μ_1 et μ_2. On étudie les vibrations transversales sinusoïdales de ce système.

1- Montrer que ce système est équivalent au système représenté sur la figure b).

2- Ecrire les conditions aux limites pour la figure b).

3- En déduire l'équation aux pulsations propres.

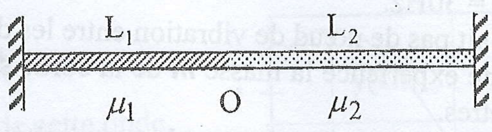


Figure a

⇔

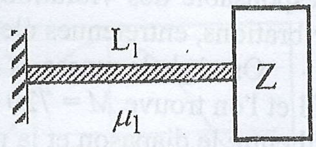


Figure b

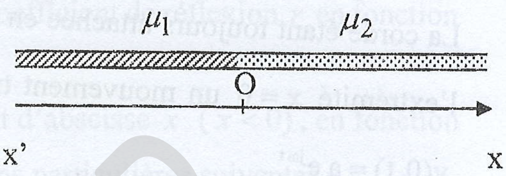
Exercice 8

Deux cordes 1 et 2, de masses linéiques μ_1 et μ_2, sont soudées à la jonction O et sont tendues horizontalement suivant l'axe Ox avec une tension T. On choisit l'abscisse $x = 0$ à la jonction O des deux cordes.

Module VOM **SÉRIE D'EXERCICE N° 4 (3 SEANCES)** **Année 2016/2017**

Les ondes mécaniques

Soit une onde incidente de la forme $y_i(x,t) = a_i \exp j(\omega t - k_1 x)$ et venant de la gauche (région $x < 0$). Cette onde donne naissance, à la jonction O, une onde réfléchie $y_r(x,t)$ dans la région des $x < 0$ et une onde transmise $y_t(x,t)$ dans la région des $x > 0$.



1- Ecrire les expressions des ondes $y_1(x,t)$ pour la région des $x < 0$ et $y_2(x,t)$ pour la région des $x > 0$.

2- Exprimer la tension transversale instantanée :
- en tout point M d'abscisse x de la corde 1 (région $x < 0$),
- en tout point M d'abscisse x de la corde 2 (région $x > 0$).

3- Ecrire les deux équations de continuités au niveau de la jonction O pour le déplacement et la tension transversale.

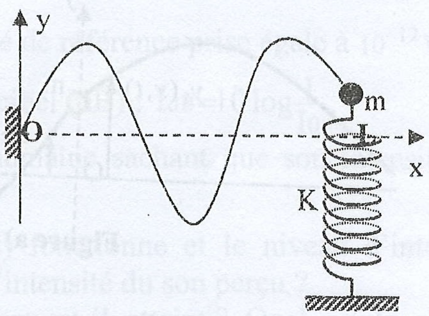
4- En déduire les coefficients de réflexion r et de transmission t en déplacement en fonction de μ_1 et μ_2.

5- Application numérique : calculer r et t lorsqu'un fil d'acier (corde 1) de diamètre $d_1 = 2\,\text{mm}$ est relié à la jonction O à un autre fil d'acier (corde 2) de diamètre $d_2 = 1\,\text{mm}$.

6- Application numérique : mêmes questions, l'onde incidente venant de la droite pour aller vers la jonction O.

Exercice 9

Une corde, de longueur L et de masse linéique μ, est soumise à une tension T constante. Soit V la vitesse de propagation des ondes transversales. La direction de la corde au repos est prise comme axe Ox.



Vibrations libres

la corde est fixée à l'une de ses extrémités $x = 0$; l'autre extrémité, $x = \text{L}$, est attachée à une lame vibrante qu'on assimile à une masse m reliée à un ressort de raideur K. On cherche les oscillations libres stationnaires de la forme : $y(x,t) = A(x)\, e^{j\omega t}$

1- Ecrire l'équation différentielle satisfaite par l'amplitude $A(x)$.

2- Résoudre l'équation différentielle et exprimer la condition aux limites en $x = 0$.

3- En écrivant la condition aux limites en $x = \text{L}$, montrer que l'équation aux pulsations propres s'écrit :

$$\text{tg}\frac{\omega \text{L}}{\text{V}} = \frac{\dfrac{\text{T}\omega}{\text{V}}}{m\omega^2 - \text{K}}$$

4- Que devient cette équation dans le cas où la masse m de la lame est faible. Proposer alors une méthode qui permet de déterminer les trois pulsations possibles les plus basses.

Les ondes mécaniques

Vibrations forcées

La corde étant toujours attachée en $x = \mathrm{L}$ à la lame vibrante, un vibreur communique maintenant à l'extrémité $x = 0$ un mouvement transversal sinusoïdal de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}}}$ et d'amplitude a : $y(0,t) = a\, e^{j\omega t}$.

1- Calculer l'impédance mécanique de la corde en $x = \mathrm{L}$. En déduire le coefficient de réflexion r_{L} en déplacement. Comment se comporte la corde dans ce cas ?

2- Déterminer l'équation $y(x,t)$ du mouvement de la corde en tout point M d'abscisse x, à l'instant t. Conclure.

3- Calculer l'amplitude et les positions des ventres de vibration. Pour quelles longueurs L observe-t-on le phénomène de résonance d'amplitude ?

4- Calculer la composante verticale de la force exercée par la corde sur le vibreur en $x = 0$.

Exercice 10

Une corde de longueur infinie, de masse linéique μ, est tendue sous la tension T. La direction de la corde au repos est parallèle à l'axe $x'Ox$. Une masse m est fixée à l'origine $x = 0$ (figure a). On négligera le poids de la corde et celui de la masse m devant les autres forces.

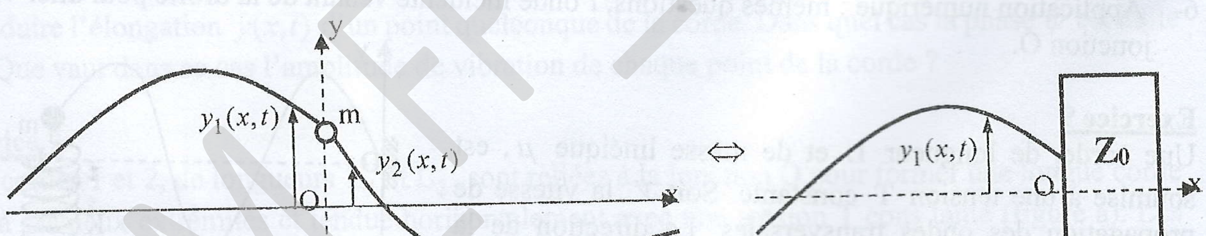


Figure a) **Figure b)**

On considère une onde incidente de déplacement de la forme : $y_i(x,t) = a_i \exp j(\omega t - kx)$ venant de la gauche (région $x < 0$) et se propageant dans le sens des x croissants. Elle donne naissance en $x = 0$ à une onde réfléchie $y_r(x,t)$ et à une onde transmise $y_t(x,t)$. On notera r et t les coefficients complexes de réflexion et de transmission relatifs aux amplitudes des déplacements au point O.

1- Donner l'expression complexes de l'onde transversale $y_1(x,t)$ pour la région des $x < 0$ et de l'onde transversale $y_2(x,t)$ pour la région des $x > 0$.

2- Montrer que la force transversale qui s'exerce sur la masse m s'écrit :

$$\mathrm{F_y}(0,t) = \mathrm{T}\left[\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)_{x=0} - \left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)_{x=0}\right].$$

3- Montrer que, compte tenu de la condition de continuité du déplacement en $x = 0$ et de l'équation du mouvement de la masse m, les coefficients de réflexion r et de transmission t s'écrivent :

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{jm\omega}}{\mathrm{jm\omega} + 2\mathrm{Z_c}} \quad \text{et} \quad \mathrm{t} = \frac{2\mathrm{Z_c}}{\mathrm{jm\omega} + 2\mathrm{Z_c}}, \quad \text{avec } Z_c = \sqrt{\mathrm{T}\mu}.$$

Quelles sont les limites de ces deux coefficients lorsque $m \to 0$ et $m \to \infty$?

4- Montrer que le système de la figure a) est équivalent au système de la figure b) constitué d'une corde semi-infinie occupant la région des $x < 0$ et fermée en O par une impédance Z_0 dont on calculera l'expression en fonction de Z_c, m et ω. Donner le coefficient de réflexion r en fonction de l'impédance réduite $Z_0 = Z_0 / Z_c$.

5- Calculer l'impédance mécanique ramenée $Z(x)$ en tout point d'abscisse x ($x < 0$), en fonction de Z_c, Z_0, k et x. Que vaut cette impédance pour les positions particulières suivantes :

$a)\ x_n = n\dfrac{\lambda}{2}$ $\quad b)\ x_n' = (2n+1)\dfrac{\lambda}{4}$, où λ est la longueur d'onde et $n = 0, -1, -2, \ldots$

6- Ecrire l'onde résultante de déplacement $y_1(x,t)$ sous la forme : $y_1(x,t) = A(x) \cdot y_i(x,t)$. Déterminer les positions et l'amplitude $A_{\min}$ des nœuds de déplacement ainsi que les positions et l'amplitude $A_{\max}$ des ventres de déplacement. En déduire le taux d'ondes stationnaire défini par le rapport $\rho = \dfrac{A_{\max}}{A_{\min}}$.

7- A quelle distance se trouve le premier maximum le plus proche de la terminaison $x = 0$.

b- Ondes Acoustiques dans les fluides

Exercice 1 :

Soit I l'intensité acoustique d'une onde sonore et I_0 l'intensité de référence prise égale à $10^{-12}\,\text{W/m}^2$.

On appelle I_{dB} le niveau d'intensité acoustique exprimé en décibel (dB) : $I_{dB} = 10 \log \dfrac{I}{I_0}$.

1. Calculer en décibels le seuil de douleur pour l'oreille humaine sachant que son intensité est $10\,\text{W/m}^2$.
2. Un des haut-parleurs d'une chaîne haute-fidélité (Hi-Fi) fonctionne et le niveau d'intensité acoustique où se trouve l'auditeur vaut 65 dB. Quelle est l'intensité du son perçu ?
3. Les deux haut-parleurs fonctionnent. Le seuil de douleur est-il atteint ? Quel est le niveau acoustique pour l'auditeur.

Exercice 2 :

1. Chez l'homme, l'amplitude de pression maximale tolérable par l'oreille (seuil de douleur) est $p_m = 28\,\text{Pa}$. Quelle est l'amplitude de déplacement u_m d'une telle **onde** sonore dans l'air à la fréquence $f = 1000\,\text{Hz}$. Calculer son intensité acoustique.
2. Mêmes questions si l'amplitude de pression minimale tolérable par l'oreille humaine (seuil d'audibilité) est $p_m = 2{,}8 \cdot 10^{-5}\,\text{Pa}$ à la même fréquence.

On donne pour l'air : $\rho = 1{,}2\,\text{kg/m}^3$ et $V = 340\,\text{m/s}$.

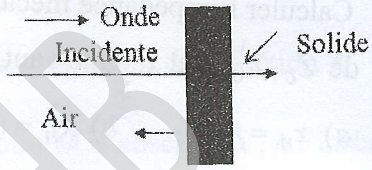
Les ondes mécaniques

Exercice 3 :

On définit l'impédance acoustique spécifique d'un milieu par le rapport, en notation complexe, de la pression acoustique sur la vitesse des particules :

$$Z = \frac{p}{\dot{u}}$$

1° Calculer Z pour une onde progressive plane sinusoïdale se propageant vers les x croissants. A-N : on donne pour l'air $\rho = 1{,}21\,\mathrm{kg/m^3}$ et $V = 343\,\mathrm{m/s}$.



2° Une onde incidente $u_i(x,t) = u_0\, e^{j(\omega t - kx)}$, se propageant dans l'air, arrive en incidence normale sur la surface d'un solide dont l'impédance acoustique spécifique en x = 0 vaut $Z_0 = \dfrac{p(0,t)}{\dot{u}(0,t)}$.

a) Calculer, en un point d'abscisse x $(x \le 0)$, l'impédance ramenée $Z(x) = \dfrac{p(x,t)}{\dot{u}(x,t)}$ en fonction de $\rho V, Z_0$ et $tg(kx)$.

b) Quelle est la valeur de l'impédance $Z(-\lambda/4)$ ramenée au point $x = -\lambda/4$? Etudier les cas particuliers : $Z_0 \to \infty$; $Z_0 = \rho V$; $Z_0 = jX$ (où X est un réel positif) et donner pour chacune de ces impédances $p(-\lambda/4,t)$ et $\dot{u}(-\lambda/4,t)$.

c) Mêmes questions pour $x = -\lambda/2$.

Exercice 4 :

On considère deux milieux matériels semi-infinis, d'impédances caractéristiques $\rho_1 V_1$ et $\rho_2 V_2$, séparés par une interface plane en x = 0. Une onde de pression incidente $p_i(x,t)$ de pulsation ω et d'amplitude p_1 se propage dans le milieu (1) dans le sens des x croissants.

1° Ecrire, en fonction des coefficients de réflexion r et de transmission t en pression, les expressions des pressions réfléchie p_r et transmise p_t. En déduire les expressions des vitesses des particules $\dot{u}_i, \dot{u}_r$ et $\dot{u}_t$.

2° Ecrire les équations de continuité en x = 0. En déduire, en fonction de ρ_1, V_1, ρ_2 et V_2, les expressions de r et t.

3° Donner les intensités acoustiques moyennes I_i, I_r et I_t et définir les facteurs de réflexion R et de transmission T (en intensité).

4° Application : une onde plane sinusoïdale ultrasonore de fréquence $f = 50\,\mathrm{kHz}$, se propage dans l'eau $(\rho_1 = 1000\,\mathrm{kg/m^3}; V_1 = 1450\,\mathrm{m/s})$ avec une intensité $I_i = 4\,\mathrm{W/m^2}$, et rencontre perpendiculairement la coque en acier d'un navire $(\rho_2 = 7800\,\mathrm{kg/m^3}; V_2 = 5000\,\mathrm{m/s})$.

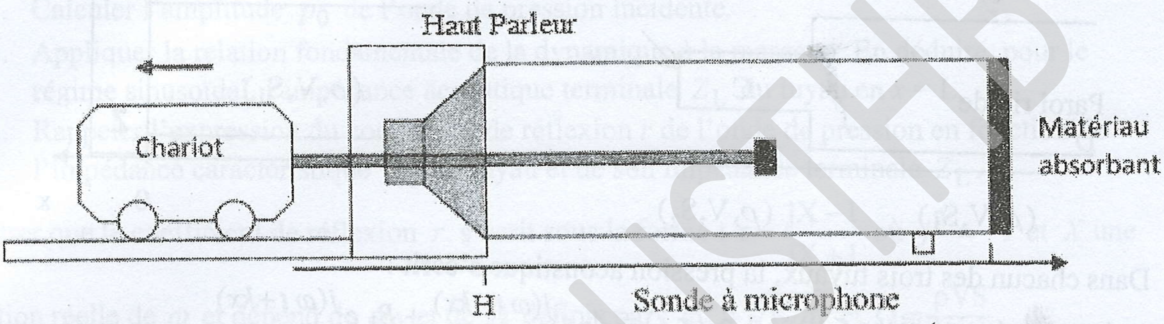
a) Calculer pour l'onde incidente dans l'eau, les amplitudes a_1 du déplacement des particules et p_1 de la pression acoustique.

b) Calculer pour l'onde réfléchie dans l'eau, l'intensité I_r et les amplitudes a'_1 et p'_1.

c) Calculer pour l'onde qui pénètre dans l'acier: I_t, a_2 et p_2.

<u>Exercice 5 :</u>

On considère un tuyau cylindrique de section S contenant un fluide de masse volumique ρ. Il est fermé en $x = \mathrm{L}$ par un matériau absorbant d'impédance acoustique complexe $Z_L = X + jY$, où X et Y sont deux nombres réels que l'on déterminera. Une source sonore (haut-parleur) placée en $x = 0$, émet des ondes acoustiques qui se propagent le long du tuyau à la vitesse V. Une sonde à microphone déplacée le long du tuyau grâce à un chariot, permet de mesurer l'amplitude de la pression en tout point x du tuyau.



On écrit la pression acoustique $p(x,t)$ en un point quelconque d'abscisse x du tuyau sous la forme

$$p(x,t) = A\, e^{j(\omega t - kx)} + B\, e^{j(\omega t + kx)}.$$

1° a) Donner l'expression du coefficient de réflexion r_p en pression au point $x = \mathrm{L}$ en fonction de Z_L et de l'impédance caractéristique Z_C du tuyau.

b) En écrivant r_p sous forme trigonométrique, soit $r_p = R\, e^{j\theta}$, montrer que la pression acoustique peut se mettre sous la forme : $p(x,t) = P(x)\, e^{j(\omega t - kx)}$

où $P(x)$ est une fonction complexe de x à déterminer.

c) Déterminer les positions et l'amplitude P_{min} des minima de pression (nœuds) ainsi que les positions et l'amplitude P_{max} des maxima de pression (ventres).

En déduire le <u>taux d'ondes stationnaires</u> (T.O.S) défini par le rapport $s = \dfrac{P_{max}}{P_{min}}$.

2° En déplaçant la sonde à microphone de la terminaison $x = \mathrm{L}$ vers l'origine $x = 0$, on mesure les valeurs de P_{max} et P_{min} et on repère le minimum (nœud) de pression le plus proche de la terminaison $x = \mathrm{L}$.

a) Sachant que le T.O.S mesuré est $s = 2$, en déduire la valeur de R.

b) Sachant que le premier nœud est à la distance $d = \dfrac{3}{8}\lambda$ de l'extrémité $x = \mathrm{L}$, calculer la valeur de θ.

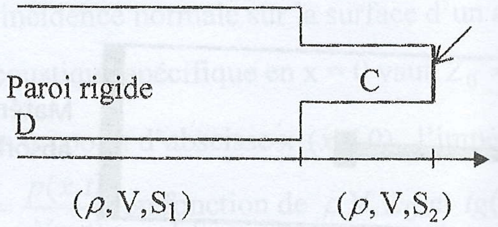
c) En déduire la valeur de l'impédance terminale Z_L.

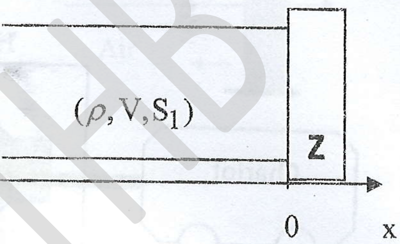
On donne : $\rho = 1{,}2\ \mathrm{kg/m^3}$; $V = 340\ \mathrm{m/s}$ et $\mathrm{S} = 8 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m^2}$.

Les ondes mécaniques

Exercice 6 :

Un tuyau de longueur semi-infinie et de section S_1 est raccordé en $x = 0$ à un second tuyau de longueur CD = d et de section $S_2 < S_1$, fermé en D par une paroi rigide (figure a). Ces tuyaux contiennent le même fluide de masse volumique ρ dans lequel se propagent les ondes acoustiques à la vitesse V. Les impédances caractéristiques des tuyaux de sections S_1 et S_2 sont respectivement $Z_1 = \rho V/S_1$ et $Z_2 = \rho V/S_2$.





I) Dans chacun des trois tuyaux, la pression acoustique s'écrit :

- tuyau semi-infini ($x \le 0$) : $p_1(x,t) = A_1\, e^{j(\omega t - kx)} + B_1\, e^{j(\omega t + kx)}$
- tuyau CD ($0 \le x \le d$) : $p_2(x,t) = A_2\, e^{j(\omega t - kx)} + B_2\, e^{j(\omega t + kx)}$

1° Ecrire les expressions respectives, $\dot{u}_1(x,t)$ et $\dot{u}_2(x,t)$, des vitesses particulaires dans les tuyaux de sections S_1 et S_2.

2° Ecrire les équations de continuité en x = 0 pour la pression acoustique $p(x,t)$ et pour le débit $S\dot{u}(x,t)$. En déduire les deux équations reliant les coefficients A_1, B_1, A_2 et B_2.

3° Ecrire la condition à la limite en $x = d$ pour la vitesse particulaire. En déduire une relation entre les coefficients A_2 et B_2.

4° En déduire le coefficient de réflexion en pression $r = A_1 / B_1$.

5° Trouver la condition sur d pour que la pression présente un nœud en $x = 0$.

6° La condition précédente étant satisfaite, déterminer en fonction A_1, l'amplitude de la pression acoustique sur la paroi rigide en $x = d$ dans le cas où $S_1 = 2S_2$.

II) 1° Montrer qu'en régime de vibration harmonique, le système de la figure (a) peut être considéré comme un tuyau de longueur semi-infinie et de section S_1, fermé par une impédance Z (figure b) que l'on calculera.

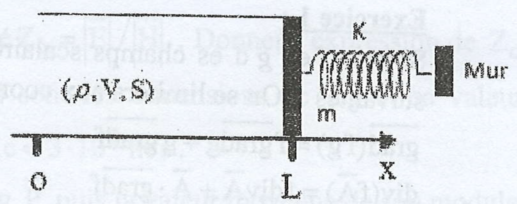
2° Donner, en fonction de Z et Z_1, le coefficient de réflexion r en pression. Retrouver le résultat de la question I) 4°.

3° Trouver la condition sur d pour que l'impédance Z soit nulle. Retrouver le résultat de la question I) 5°. En déduire dans ce cas le coefficient de réflexion r.

Exercice 7 :

Un tuyau cylindrique de section S contient de l'air de masse volumique ρ. La vitesse de propagation des ondes acoustiques est V. Ce tuyau semi-infini est terminé à son extrémité, située en x = L, par un

Les ondes mécaniques



système masse-ressort représenté sur la figure ci-contre. La masse m peut glisser sans frottement à l'intérieur du cylindre. La constante de raideur du ressort est K.

Une onde acoustique plane sinusoïdale de pulsation ω d'intensité $I_0 = 10^{-6}$ W/m^2 est envoyée de $-\infty$ dans le sens des x croissants. On donne :

$\rho = 1{,}29$ kg/m^3; $V = 340$ m/s .

1. Calculer l'amplitude p_0 de l'onde de pression incidente.
2. Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à la masse m. En déduire, pour le régime sinusoïdal, l'impédance acoustique terminale Z_L du tuyau en $x = L$.
3. Rappeler l'expression du coefficient de réflexion r de l'onde de pression en fonction de l'impédance caractéristique Z_C du tuyau et de son impédance terminale Z_L.

Montrer que le coefficient de réflexion r s'écrit sous la forme : $r = \dfrac{jX - 1}{jX + 1}$ où $j^2 = -1$ et X une fonction réelle de ω et dépend de ω_0 et de Ω définis par : $\omega_0 = \sqrt{K/m}$ et $\Omega = \dfrac{\rho V S}{m}$.

Déterminer l'expression de X. Préciser la dimension de Ω.

4° Pour $\omega = \omega_0$:

4.a Calculer r

4.b Déterminer l'expression de la pression $p(x,t)$ en tout point du tuyau.

4.c En déduire les positions des maxima et minima d'amplitude de pression. Calculer les valeurs de ces maxima et minima.

4.d Déterminer l'expression de la vitesse de particules $\dot{u}(x,t)$ en tout point du tuyau.

4.e Calculer les amplitudes maximale et minimale de la vitesse de particules.

5° Pour les grandes valeurs de ω ($\omega >> \omega_0$ et $\omega >> \Omega$). Répondre aux mêmes questions que 4°.

Les ondes électromagnétiques

Exercice 1 :

Soient f et g d es champs scalaires, $\vec{A}$ et $\vec{B}$ des champs vectoriels, démontrer les relations suivantes : (On se limitera aux coordonnées cartésiennes)

$$\overrightarrow{\text{grad}}(fg) = f\,\overrightarrow{\text{grad}}g + g\,\overrightarrow{\text{grad}}f$$
$$\text{div}(f\vec{A}) = f\,\text{div}\vec{A} + \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}f$$
$$\text{div}(\vec{A}\wedge\vec{B}) = \vec{B}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} - \vec{A}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}(f\vec{A}) = f\,\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} + (\overrightarrow{\text{grad}}f)\wedge\vec{A}$$
$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

On rappelle les relations suivantes :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \vec{\nabla}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_z\ ; \qquad \text{div}\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\Delta f = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\ ; \qquad \Delta\vec{A} = \Delta A_x\vec{e}_x + \Delta A_y\vec{e}_y + \Delta A_z\vec{e}_z$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{e}_y$$

Exercice 2 :

1° Déterminer l'état de polarisation des ondes électromagnétiques représentées par leurs champs électriques : $\vec{E}_0$, $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$.

$E_o \rightarrow E_x = E_0\cos\alpha\cos(\omega t - kz);\quad E_y = E_0\sin\alpha\cos(\omega t - kz);\quad E_z = 0$

$\vec{E}_1 \rightarrow E_x = E_1\cos(\omega t - kz);\quad E_y = E_1\sin(\omega t - kz);\quad E_z = 0$

$\vec{E}_2 \rightarrow E_x = E_2\cos(\omega t - kz);\quad E_y = -E_2\sin(\omega t - kz);\quad E_z = 0$

2° Quel est l'état de polarisation de l'onde dont le champ électrique est $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ avec $E_1 = E_2$

Exercice 3 :

Une onde électromagnétique plane sinusoïdale, de pulsation ω, se propage dans l'espace vide rapporté à un repère orthonormé direct Oxyz de vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$. Elle posède un vecteur champ magnétique donné par :

$$\vec{H}(y,t) = H_0\cos(\omega t - ky)\vec{e}_z\,,$$

où H_0 et k sont des constantes réelles et positives.

1° Quelle est la direction de propagation de cette onde ?

2° Calculer les composantes du vecteur champ électrique $\vec{E}$. En déduire la polarisation de cette onde.

3° On appelle impédance caractéristique la quantité $Z_c = |\vec{E}|/|\vec{H}|$. Donner l'expression de Z_c en fonction des caractéristiques du vide. Quelles sont les dimensions de Z_c et sa valeur numérique. On donne : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ MKSA et $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

4° Calculer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{P}$ puis la valeur moyenne de son module au cours du temps que l'on notera $\langle|\vec{P}|\rangle$.

5° Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique u, puis sa valeur moyenne au cours du temps que l'on notera $\langle u \rangle$. Quelle relation existe-t-il entre $\langle u \rangle$ et $\langle|\vec{P}|\rangle$?

6° <u>Application</u> : Un faisceau laser de section circulaire de diamètre d = 2 mm transporte une puissance de 600 W/m^2. Calculer les valeurs de $\langle|\vec{P}|\rangle$, $\langle u \rangle$, H_0 et E_0.

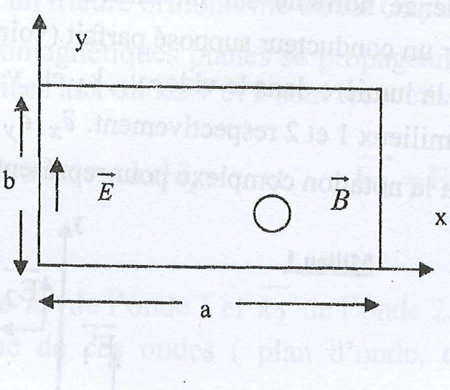
<u>Exercice 4 :</u>

Une source de rayonnement électromagnétique de puissance $P = 500\ W$ et de longueur d'onde $\lambda = 25\ m$ émet de façon isotrope dans l'espace.

1°) Comment varie l'amplitude E_0 du champ électrique avec la distance d à la source ? Calculer alors E_0 à une distance $d = 100\ km$ de la source de rayonnement.

2°) Un cadre formé de $N = 50$ spires conductrices est placé dans le plan xOy à une distance $d = 100\ km$ de la source de rayonnement éléctromagnétique et a une forme rectangulaire de dimensions $a = 1{,}25m$ et $b = 0{,}80m$ et est disposé perpendiculairement à l'induction magnétique $\vec{B}$. Le champ électrique est polarisé rectilignement selon Oy ($\vec{E} = E_0 e^{j\omega t}\vec{e}_y$) en O $(x = 0, y = 0)$ (voir figure ci-dessous).

Exprimer le flux $\phi(t)$ de l'induction magnétique à travers le cadre. Déduire la valeur efficace de la force électromotrice induite apparaissant aux bornes du cadre.



Les ondes électromagnétiques

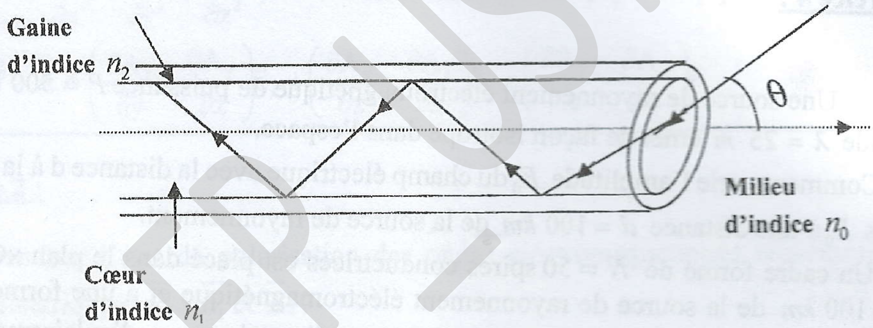
Exercice 5 :

La fibre optique est un guide de lumière, régi par la loi de Snell-Descartes. Elle est constituée d'un cœur d'indice de réfraction n_1 dans lequel se propage une onde lumineuse en se réfléchissant sur une gaine optique constituée d'une mince couche d'un matériau d'indice de réfraction n_2 plus faible (voir figure ci-dessous).

On considère une fibre optique baignant dans un milieu d'indice n_0. On envoie un faisceau de lumière sous un angle d'incidence θ par rapport à la normale à la face d'entrée

Déterminer la valeur limite θ_l de θ pour laquelle la lumière subit effectivement la réflexion totale sur la surface de la gaine.

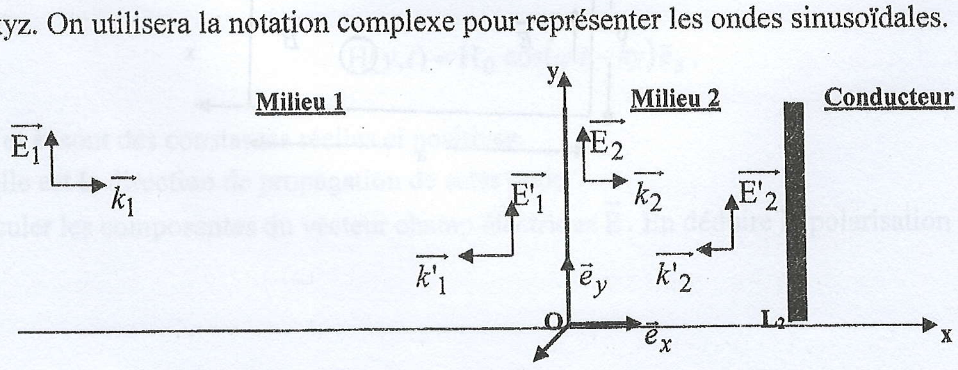
A.N : Calculer θ_l dans le cas où : $n_0 = 1$; $n_1 = 1{,}48$; $n_2 = 1{,}46$



Exercice 6 :

Une onde électromagnétique plane sinusoïdale, de pulsation ω, d'intensité I, polarisée suivant la direction Oy, se propage suivant la direction Ox dans un milieu 1, diélectrique parfait d'indice n_1. Elle arrive en incidence normale sur un milieu 2, diélectrique parfait d'indice n_2 et d'épaisseur L_2 déposé sur un conducteur supposé parfait (voir figure ci-dessous)

On notera c la vitesse de la lumière dans le vide, v_1, k_1 et v_2, k_2 les modules des vitesses et vecteurs d'onde dans les milieux 1 et 2 respectivement. $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont les vecteurs unitaires du repère Oxyz. On utilisera la notation complexe pour représenter les ondes sinusoïdales.



Les ondes électromagnétiques

<u>1-Préliminaires</u>:

a- Donner les expressions de v_1 et v_2, puis de k_1 et k_2 en fonction de ω, n_1 et n_2.

b- Ecrire les expressions des champs électriques $\overrightarrow{E_1}, \overrightarrow{E'_1}, \overrightarrow{E_2}$ et $\overrightarrow{E'_2}$ en notant A_1, A'_1, A_2 et A'_2 leurs amplitudes respectives.

c- Ecrire les expressions des champs électriques résultants $\vec{\Xi}_1$ et $\vec{\Xi}_2$ dans les milieux 1 et 2.

d- En déduire les champs magnétiques résultants $\overrightarrow{H_1}$ et $\overrightarrow{H_2}$ dans les milieux 1 et 2.

<u>2-Réflexion</u>:

a- Ecrire les relations de continuité pour le champ électrique et le champ magnétique en x = 0.

b- Ecrire les relations de continuité pour le champ électrique en $x = L_2$.

c- En déduire les équations reliant les amplitudes A_1, A'_1, A_2 et A'_2.

d- Calculer le coefficient de réflexion $r = \dfrac{A'_1}{A_1}$. En donner le module et la phase.

<u>3-Mesure de l'indice</u> n_2 :

a- Quelle est la condition pour que, dans le milieu 2, le champ électrique possède un nœud en x = 0 et un seul ventre ?

b- Sachant que le premier nœud du champ électrique dans le milieu 1 se situe en $x = -L_1$, calculer l'indice n_2 en fonction de n_1, L_1 et L_2.

c- L'expérience est réalisée, dans les conditions ci-dessus, avec de l'air comme milieu 1 ($n_1 = 1$) et du méthanol comme milieu 2. On mesure $L_1 = 15$ mm et $L_2 = 11{,}3$ mm. Quel est l'indice de réfraction du méthanol.

<u>Exercice 7 :</u>

L'espace est rapporté à un trièdre orthonormé direct Oxyz de vecteurs unitaires $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$. Soient deux ondes électromagnétiques planes se propageant dans le vide et dont les vecteurs champs électriques associées aux ondes 1 et 2 sont respectivement :

$$\overrightarrow{E_1} = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{E_2} = E_0 \cos(\omega t - ky)\vec{e}_z .$$

1° On demande :

a) les vecteurs d'onde $\overrightarrow{k_1}$ de l'onde 1 et $\overrightarrow{k_2}$ de l'onde 2.

b) de décrire chacune de ces ondes (plan d'onde, direction et sens de propagation, polarisation).

c) Les champs magnétiques $\overrightarrow{H_1}$ et $\overrightarrow{H_2}$ associés aux ondes 1 et 2 respectivement.

2° Calculer le champ électrique $\vec{\Xi} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2}$ de l'onde résultante et l'écrire sous la forme :

$$\vec{\Xi} = \vec{E}(x,y)\cos[\omega t - \Phi(x,y)].$$

a) Donner les expressions de $\vec{E}(x,y)$ et de $\Phi(x,y)$.

b) Décrire cette onde (direction et sens de propagation, vitesse de phase, polarisation, uniformité).

3° Calculer la valeur moyenne $\langle \Xi^2 \rangle$, au cours du temps, du carré du module du champ résultant $\vec{\Xi}$. Déterminer :

a) les plans où $\langle \Xi^2 \rangle$ est maximale ?

b) les plans où $\langle \Xi^2 \rangle$ est minimale ?

Exercice 8 :

Un résonateur électromagnétique est constitué par deux plans métalliques parallèles supposés conducteurs parfaits occupant les positions $y = 0$ et $y = a$. On étudie les propriétés d'une onde plane sinusoidale de pulsation ω et polarisée selon Oz, dans l'espace vide entre les deux plans (voir figure ci-dessous).

1° Etablir l'expression du champ électrique $\vec{E}(y,t)$ entre les plans conducteurs en un point quelconque $M(x,y,z)$. En déduire l'expression de l'induction magnétique $\vec{B}(y,t)$.

2° Calculer les pulsations propres ω_m des ondes stationnaires dans la cavité.

A.N : Calculer la fréquence propre f_1 la plus basse pour une distance entre les plans $a = 5cm$

3° Calculer la valeur moyenne dans le temps de la densité d'énergie électromagnétique $\langle U \rangle$ dans la cavité pour les différents modes (différentes valeurs de m).

4° Calculer la densité surfacique de courant $j_s(t)$ qui apparaît sur le plan $x = 0$ pour chaque mode, ainsi que la pression de radiation électromagnétique p à laquelle est soumise ce plan. A.N : Amplitude du champ électrique $E_0 = 200V/m$. Calculer $\langle U \rangle$ et p pour $m = 1$.