

Université des sciences et de la Technologie H. Boumediene Alger

Les cours de la Faculté de physique



MASTER 2

Écoulement Pulsé

Domaine EMF

Pr Ghezal Abderrahmane

Collaborateurs

Dr Nouri Sabrina Eps Laziri

Dr Deghmoum Md Amine

Mr Belahda Kamal

Année universitaire 2017-2018

Préface

Ce cours du module écoulement pulsé est destiné aux étudiants de la deuxième année Master , spécialité Energétique et Mécanique des Fluides. Il couvre en cinq chapitres l'étude dynamique et thermique des écoulements pulsés.

L'enseignement de ce cours a débuté en 2006 au sein du département Energétique et Mécanique des Fluides. Il fait partie d'un axe de recherche de l'équipe de recherche dirigée par le Professeur A Ghezal et dont la production scientifiques de ses membres continue à enrichir cet enseignement.

Chaque chapitre commence par une introduction comportant une brève étude bibliographique et un exposé des points fondamentaux du cours.

Ce document est accompagné par des annexes comportant des rappels mathématiques et des grandeurs physiques ainsi que par des exercices d'application dont une partie est tirée des sujets de contrôle continu de la discipline, suivis des sujets d'examens accompagnés de leurs solutions détaillées.

Cette première édition comporte sûrement quelques imperfections, les auteurs serions reconnaissants à tous ceux qui leurs ferait part de leurs remarques et suggestions.

Le cours se trouve sur le lien :

A partir du mois d'octobre 2017

<http://perso.usthb.dz/~snouri/>

Les auteurs

Table des matières

PARTIE 1

ETUDE DYNAMIQUE

CHAPITRE 1

Ecoulement périodique

1.	Introduction	1
1.1.	Ecoulement périodique	2
1.2.	Généralités et définitions	3
1.3.	Expressions de la vitesse dans des cas limites de la fréquence	6
1.4.	Calcul du coefficient de frottement à la paroi, ρ	8
1.5.	Calcul de ρ à partir des expressions données par Zhao	10
1.6.	Détermination des positions du maximum de la vitesse	11
1.7.	Calcul du déphasage entre le gradient de pression et la vitesse et le coefficient de frottement	12
1.8.	Espace de phase	13

CHAPITRE 2

Ecoulement pulsé dans une conduite rectangulaire

2.	Ecoulement pulsé dans une conduite rectangulaire avec un gradient de pression arbitraire	18
2.1.	Cas particulier, écoulement purement oscillatoire	19
2.2.	Calcul de la position des maximums de la vitesse	25
2.3.	Calcul de la position des maximums de la vitesse dans le cas Rectangulaire	26
2.4.	Calcul du coefficient de frottement	27
2.5.	Position de renversement de l'écoulement	28
2.6.	Vorticité	29

CHAPITRE 3

Écoulement oscillatoire dans une conduite cylindrique

3.1.	Écoulement oscillatoire dans une conduite cylindrique avec un gradient de pression pulsé	31
3.2	Profil de vitesse dans une conduite cylindrique	36
3.3	Profil de vitesse dans l'espace annulaire	39

CHAPITRE 4

Écoulement pulsé dans une conduite cylindrique

4.1	Écoulement pulsé dans une conduite cylindrique avec un gradient de pression pulsé	40
4.2	Cas de faibles fréquences ($Re < 16$)	41
4.3.	Cas de fortes fréquences ($Re > 16$)	42
4.4.	Influence de la fréquence sur le coefficient de frottement	51
4.5.	Etude de déphasage	52

Annexe1 : Sujets d'examens avec solutions

Annexe2: Rappels Mathématiques

NOMENCLATURE

A_0 : Gradient de pression moyen
 A_1 : Amplitude de gradient de pression
 L : Longueur (m)
 Nu : Nombre de Nusselt local
 Pr : Nombre de Prandtl (/)
 P : Pression Pa
 R : Rayon de la conduite (m)
 r : Coordonnée radiale
 $Remax$: Nombre de Reynolds maximum
 Rt : Rayon du tube extérieur m
 $Robs$: Rayon du tube intérieur (obstacle) m
 Re : Fréquence adimensionnelle
 t : Temps
 t_0 : Temps de référence
 T : Température K
 T^* : Température adimensionnelle
 T^*_{ad} : Température adimensionnelle de la paroi adiabatique
 U : Composante axiale de la vitesse
 Um : vitesse débitante instantanée
 $Vdeb$: Vitesse débitante
 X : Cordonnée axiale (axe de la conduite) m
 A_w : Amplitude de pulsation de la vitesse axiale
 Tp^* : Température adimensionnelle de la paroi chauffée
 x, y, z : Coordonnées
 u, w : Cordonnées radiale et axiale de la vitesse
 Re_S : Nombre de Reynolds cinétique (R^2 / s)
 Re : Nombre de Reynolds
 w_m : Vitesse moyenne

Symboles grecs

Nombre de Womersley

: Température adimensionnelle

: Viscosité cinématique (m^2/s)

: Fréquence adimensionnelle

: Taux d'amplitude (A_0)

Indices

f : Fluide

m : Moyen

s : Solide

0 Composante stationnaire

1 : Composante oscillatoire

e : Entrée

(*) Variable dimensionnelle (utilisée pour r,z,t, u,w, " et p).

ÉCOULEMENT PULSÉ (PÉRIODIQUE)

INTRODUCTION:

L'étude des écoulements oscillatoires est loin d'être nouvelle comme c'est souvent le cas pour les nombreux types d'écoulements. Elle date du début de 20^{ème} siècle. Car les écoulements pulsés intéressent de très nombreux domaines vu son implication dans différents phénomènes naturels et processus industriels on cite les moteurs Stirling, les échangeurs de chaleur, le transport des produits énergétiques, le raffinage du pétrole, ainsi que dans le domaine médical particulièrement le traitement des vaisseaux sanguins. Richardson et Tyler [1929] ont été les premiers à mettre en évidence par des mesures expérimentales, l'existence d'une des principales caractéristiques des écoulements oscillatoires, à savoir l'effet annulaire (dit de Richardson) sur les profils de vitesse et de température. Ceci est caractérisé par la présence d'un maximum près de la paroi et non pas au centre comme c'est le cas pour l'écoulement laminaire stationnaire (écoulement de Poiseuille). Par la suite, séparément, Womersley [1955] et Uchida [1956] ont déterminé analytiquement l'évolution des profils de vitesse pour un écoulement oscillant dans une conduite horizontale. Cette solution est fonction du nombre de Womersley et de la position radiale. De même, Siegle et Permmutte [1961] ont donné une solution exacte du profil de vitesse pour un écoulement complètement développé à travers un canal formé de deux plans parallèles. Atabek et Chang [1961] ont développé une solution analytique pour les profils de vitesse en écoulement laminaire pulsé dans un tube cylindrique. Ils ont considéré que l'écoulement est établi avec une vitesse débitante sous forme d'une somme algébrique des pulsations en sinus et cosinus. Ils ont obtenu une expression de la vitesse écrite sous forme d'une série de fonction de Bessel.

Pour un écoulement à gradient de pression arbitraire, Majdalani et Chibli [2002] ont donné une solution exacte du profil de vitesse sous forme d'une série de coefficients de Fourier. La solution obtenue pour un écoulement pulsé dépend de deux paramètres : le nombre de Reynolds angulaire Re et l'amplitude de la composante oscillatoire du gradient de pression. Ils ont montré que l'atténuation de l'écoulement due à l'augmentation de la fréquence adimensionnelle est plus rapide pour les grandes que pour les faibles amplitudes de la composante oscillatoire. Dans toutes les approches théoriques, les profils dépendent fortement de la fréquence adimensionnelle Re . Aux faibles valeurs de Re , les profils de vitesse sont paraboliques et similaires à ceux obtenus pour un écoulement stationnaire dans le régime laminaire. Aux grandes valeurs de Re les profils de vitesse s'aplatissent au centre de la conduite et atteignent un maximum au voisinage de la paroi. Ces résultats sont confirmés par des travaux numériques de Creff et al [1985], W.L.Cooper et al [1994] et Sert et Beskok [2003] et expérimentalement par Habib [2002] et Bouvier [2000]. Pour un écoulement à gradient de pression pulsé dans une cavité rectangulaire Yakhot et al [1999], ont étudié par la méthode des différences finies l'influence de la fréquence et le facteur de forme sur l'évolution du profil de vitesse et de la contrainte à la paroi. Ils ont montré que le déphasage varie de 0° , pour les faibles oscillations, jusqu'à 90° pour les oscillations rapides. A partir de l'expression de profil de vitesse donnée

par Uchida [1956] sur les écoulements pulsés, Seume et Simon [1988], ont obtenu pour un modèle unidimensionnel le déphasage du gradient de pression et de la contrainte par rapport à la vitesse débitante. Les amplitudes et le déphasage de τ_w et P sont des fonctions qui augmentent avec la fréquence adimensionnelle Re^* . Pour un écoulement dont Re^* varie entre 0 à 1000 et pour $Re^*=4000$, ils ont montré que la contrainte à la paroi est multipliée par 8 et la perte de charge par 130 par rapport au cas de l'écoulement permanent. Le gradient de pression et la contrainte représentent respectivement un déphasage qui varie de 0° pour les faibles fréquences à 90° et 45° pour les grandes fréquences.

Pour un écoulement oscillatoire, Zhao et Chang [1996] ont obtenu l'expression exacte du coefficient de frottement moyen sur un cycle puis l'ont comparé avec leurs résultats expérimentaux.

Ils ont constaté que :

- Le maximum du coefficient de frottement moyen est inversement proportionnel à Re^* .
- Le déphasage entre la contrainte et le débit varie de 0° à 40° . Cette valeur limite est inférieure de 5° par rapport à celle obtenue par Seume et Simon [1988].

Zhao et Chang [1998] ont utilisé l'expression du coefficient de frottement trouvée par Uchida [1956] pour représenter l'évolution de la différence des coefficients de frottements entre l'écoulement pulsé et l'écoulement moyen. Ils ont montré que le maximum du coefficient de frottement dépend de Re^* , de l'amplitude et du nombre de Reynolds. Ce coefficient est une fonction croissante de Re^* , ce qui confirme les résultats de Seume et Simon [1988].

Pour un écoulement pulsé dans une conduite à travers un orifice, Yakhot et Leopold [2003], utilisent le plan de phase pour représenter la trajectoire de vitesse et le gradient de pression imposé pendant un cycle. La représentation des trajectoires à chaque cycle dans le plan de phase pour différentes oscillations est une ellipse. Les résultats montrent que, la trajectoire est une ellipse dont l'axe de révolution et l'aplatissement dépendent de la fréquence et du rapport des amplitudes de la vitesse et du gradient de la pression. Ils montrent aussi que le déphasage pour les hautes fréquences atteint 90° . Ceci correspond à un cercle dans le plan de phase.

Yakhot et al [2004], dans les mêmes conditions et avec la méthode numérique Immersed-Boundary, ont montré que la longueur de la recirculation de l'écoulement possède une forme périodique, de même période que l'écoulement imposé et présente un déphasage de 180° pour le nombre de Womersley > 7 .

Une étude analytique faite par Gedeon [1981], montre aussi l'existence du déphasage entre la différence de température et le flux thermique dans le cas de l'écoulement d'un fluide soumis à des pulsations rapides entre des plans parallèles d'une canalisation. Ce déphasage tend vers 90° pour les grandes fréquences.

Seigel et Perlmutter [1962], ont montré que pour l'air ($Pr=0.7$) et pour le nombre de Womersley supérieur à 2.8, l'effet de l'écoulement pulsé sur le transfert thermique dans une conduite n'est pas important, à cause des faibles fluctuations de l'amplitude de la vitesse. Leur analyse donne une valeur limite de la position pour laquelle, l'utilisation de l'approximation quasi-stationnaire donne de bons résultats pour le calcul du taux de transfert de chaleur local. Cette approximation est valable à la zone d'entrée de la conduite. Par contre, pour les faibles nombres de Womersley, l'approximation quasistationnaire demeure valable le long de toute la conduite. Des résultats expérimentaux du transfert de chaleur entre la paroi d'une canalisation cylindrique et l'écoulement d'air turbulent pulsé ($Re=1.5 \cdot 10^5$) sont obtenus par Andre et Creff [1997].

Ils ont montré une modification importante du mécanisme de transfert convectif lors de la mise en résonance acoustique de la canalisation conduisant à des augmentations importantes de 150% du taux des transferts thermiques locaux par rapport à l'écoulement stationnaire ou pulsé hors résonance.

Dans le but de confirmer ces résultats, les auteurs ont étudié le même problème, en adoptant l'hypothèse d'un écoulement laminaire pulsé. Le résultat de cette analyse a confirmé l'existence de conditions particulières de fréquences de pulsations favorisant l'augmentation du transfert thermique. Les auteurs ont expliqué cette résonance par un accord entre la fréquence de pulsation et la fréquence propre associée aux propriétés physiques et géométriques de l'installation. Moshandreou et Zamir [1997], se sont basés sur l'expression classique du profil de vitesse donnée par Uchida [1956] pour déterminer la variation de la température et le nombre de Nusselt pour un écoulement pulsé dans un tube à flux de chaleur constant à la paroi. Les résultats montrent qu'autour de la fréquence adimensionnelle, $\omega = 15$, le taux de transfert augmente pour atteindre son maximum. Par contre, pour les fréquences approximativement inférieures à 5 et supérieure 25, l'effet de la pulsation s'inverse. Les auteurs, ont expliqué cette variation par l'effet de Richardson dans les basses et les hautes fréquences.

Guo et Sung [1997], ont étudié l'influence de l'amplitude sur quatre versions du nombre de Nusselt suivant la température moyenne du fluide. Ils ont opté pour une température calculée à partir de la moyenne de l'énergie massique. Pour les faibles amplitudes $0 < A_w < 1$, la variation du nombre de Nusselt dépend de la fréquence de pulsation. Cependant pour les grandes amplitudes $A_w > 1$, le transfert de chaleur augmente quelque soit la fréquence de pulsation.

Zhao et Cheng [1988], ont présenté une synthèse sur le comportement des paramètres dynamiques et thermiques des écoulements oscillatoires pour différents régimes d'écoulements et dans différentes géométries. Ils ont conclu que :

1. Dans le cas d'un écoulement de couche limite laminaire pulsé et pour une amplitude de la vitesse constante, le transfert de chaleur dépend du nombre de Strouhal (Str). Pour les basses et hautes fréquences, le taux de transfert de chaleur n'est pas différent de celui de l'écoulement stationnaire mais plus important pour les fréquences voisines de $Str=1$.
2. l'analogie de Reynolds pour la couche limite stationnaire et l'écoulement dans une conduite est non valable dans le cas d'un écoulement de la couche limite pulsé. D'après les auteurs, ce désaccord est dû à l'effet opposé de la fréquence sur la variation du coefficient de frottement et du transfert de la chaleur.
3. Le nombre de Nusselt moyen pour un écoulement laminaire pulsé dans une conduite dépend de la fréquence. Il peut être inférieur ou supérieur à celui de l'écoulement stationnaire suivant la gamme de la fréquence de pulsation.
4. le transfert de chaleur d'un écoulement pulsé augmente par rapport à son écoulement moyen en fonction de l'augmentation du taux de vitesse A_w .

Habib et al [2002] ont réalisé une étude expérimentale sur les caractéristiques du transfert de chaleur pour un écoulement laminaire pulsé dans une conduite, pour différentes conditions du nombre de Reynolds ($780 < Re < 1987$) et de la fréquence de pulsations ($1 < f < 29.5$ Hz).

Les auteurs ont constaté l'existence d'une bande de fréquences favorisant le transfert de chaleur et qui varie avec le nombre de Reynolds. Une réduction du nombre de Nusselt moyen relatif est enregistrée en dehors

de cette bande. Cette réduction est proportionnelle à la fréquence, elle est de 40% pour les fréquences qui varient de 4.1 à 17 Hz et de 20% pour les fréquences qui varient de 17 à 29 Hz. Une équation adimensionnelle empirique a été développée pour le nombre de Nusselt reliant le nombre de Reynolds ($750 < Re < 2000$) et la fréquence adimensionnelle ($3 < \omega < 18$).

Récemment Yu et al [2004], ont présenté une étude sur le transfert de chaleur par convection d'un écoulement laminaire pulsé dans un tube circulaire avec un flux de chaleur pariétal constant. Une solution analytique des équations de l'énergie et de la quantité de mouvement est obtenue en supposant que la solution est donnée sous forme d'un champ moyen plus une fluctuation. Les résultats, indiquent que la température et le nombre de Nusselt fluctuent périodiquement autour des solutions stationnaires de la convection laminaire, avec des amplitudes qui dépendent de la fréquence et l'amplitude de l'écoulement pulsé. Les auteurs ont montré aussi que les pulsations n'ont aucun effet sur le nombre de Nusselt moyen. Les résultats publiés sont parfois divergents, probablement en raison des conditions opératoires : des augmentations, des diminutions où pas d'effets sur les paramètres physiques. De plus, les résultats obtenus en écoulement oscillant ne sont pas valides dans l'écoulement pulsé. Car la partie stationnaire n'est pas prise en compte dans la résolution des équations de Navier Stocks.

• DÉFINITION :

Les écoulements instationnaires ou périodiques sont souvent régis par des équations de type suivant :

$$x = x_0 \cos (\omega t + \varphi) \quad (1)$$

Où x est le déplacement des particules sur l'axe (ox).

Ces écoulements sont générés dans certains cas soit par un gradient de pression de type périodique et qui est donné par l'équation suivante :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = p_0 + p_1 \cos \omega t \quad (2)$$

Ou dans d'autre cas par un débit de type périodique décrit par :

$$Q = Q_0 + Q_1 \cos \omega t \quad (3)$$

L'allure de la vitesse d'un écoulement pulsé dans une conduite cylindrique se présente comme suit :

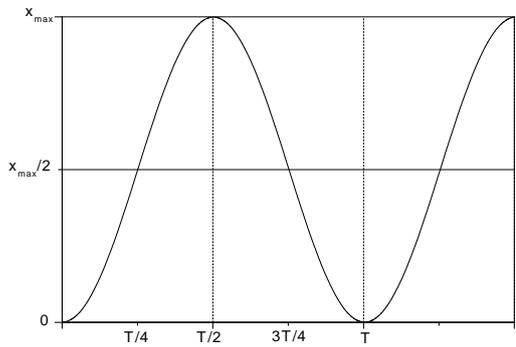


Fig 1. Déplacement des particules sur l'axe (ox) en fonction du temps.

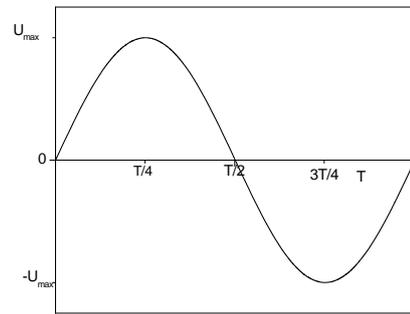


Fig 2. Vitesse des particules sur l'axe (ox) en fonction du temps.

La vitesse est maximale au niveau des parois de la conduite, en revanche elle est aplatie au centre, ceci contrairement à l'écoulement de type Poiseuille.

Paramètre de similitude :

Dans les écoulements périodiques les paramètres sont : l'amplitude et la fréquence.

Par analogie à l'écoulement stationnaire caractérisé par le nombre adimensionnel qui est le nombre de Reynolds, on définit pour les écoulements périodiques un nombre de Reynolds cinétique comme suit :

$$R_{e\omega} = \frac{\omega D^2}{\nu} \tag{4}$$

Dans ce type d'écoulements il y a deux parties, une partie stationnaire et une autre partie instationnaire.

Pour la partie stationnaire, on définit un nombre de Reynolds maximum comme suit:

$$R_{e\max} = \frac{U_{\max} D}{\nu} \tag{5}$$

On a :

$$x = \frac{x_{\max}}{2} (1 - \cos \omega t) \quad (6)$$

$$U = \frac{dx}{dt} = \frac{x_{\max}}{2} \sin \omega t \quad (7)$$

On définit l'amplitude adimensionnelle pulsée :

$$A_0 = \frac{x_m}{D} \quad (8)$$

L'équation de Navier -Stokes dans le cas pulsé est donnée comme suit :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{A_0}{2} (\nabla \vec{V}) \vec{V} = - \nabla \vec{P} + \frac{1}{R_{eS}} \nabla^2 \vec{V} \quad (9)$$

Signification physique du nombre de Reynolds cinétique :

On a :

$$R_{e\max} = \frac{U_{\max} D}{\nu} = \frac{\omega x_{\max} D}{\nu} \quad (10)$$

Remplaçant (9) dans (10), on a :

$$R_{e\max} = \frac{\omega A_0 D^2}{\nu} \quad (11)$$

Par conséquent :

$$R_{e\max} = A_0 R_{e\omega} \quad (12)$$

Remarque

Le nombre de Reynolds cinématique est lié à la géométrie de la conduite à travers son diamètre et à la nature du fluide à travers sa viscosité.

Dans certains travaux expérimentaux, on utilise le nombre de **Womersley** défini comme suit :

$$\lambda^2 = \frac{\omega a^2}{\nu} \quad (13)$$

Avec a est le rayon et qui vaut $D/2$.

$$\lambda^2 = \frac{\omega D^2}{4\nu} = \frac{1}{4} \frac{\omega D^2}{\nu} \quad (14)$$

Par conséquent :

$$\lambda^2 = \frac{1}{4} R_{e\omega} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{R_{e\omega}} \quad (15)$$

Profil de vitesse d'un écoulement pulsé :

La vitesse de l'écoulement pulsé est défini comme suit :

$$U(r, t) = U_s(r) + U_{inst}(r, t) \quad (16)$$

La valeur moyenne est exprimée par :

$$\langle U(r, t) \rangle = \langle U_s(r) \rangle + \langle U_{inst}(r, t) \rangle \quad (17)$$

Lorsque la partie instationnaire est dominante, dans ce cas l'écoulement moyen stationnaire est faible. Par conséquent, l'écoulement est complètement instationnaire ou oscillatoire.

Cas d'un écoulement oscillatoire :

On étudie le cas d'un écoulement oscillatoire généré par un gradient de pression de type sinusoïdale. Le gradient de pression s'écrit alors sous la forme suivante :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = A \cos(\omega t) \quad (18)$$

A : Amplitude adimensionnelle de gradient de pression.

On montre que les profils de vitesse possèdent la forme que le gradient de pression et qui est donnée par Uschida (1950) dans une conduite cylindrique comme suit :

$$U(r, t) = U_m [B \cos \omega t + (1 - A) \sin \omega t] \quad (19)$$

Avec A et B des fonctions de Bessel qui dépendent de la fréquence et qui se trouvent dans les fonctions cylindriques et sphériques.

Etant donnée la complexité de ces expressions, on les étudie dans les deux cas limites à savoir le cas de faible fréquences et celui de grandes fréquences.

Le cas à faible fréquence :

Si la fréquence est faible, le profil de vitesse est donné par la relation suivante :

$$U(r,t) = Cte \left[1 - (r/a)^2 \right] \cos \omega t + \frac{Re\omega}{32} \left[(r/a)^4 + 4(r/a)^2 - 5 \right] \sin \omega t \quad (20)$$

En adimensionnel, l'équation (20) s'écrit comme suit :

$$U(r^*, \tau) = \frac{2}{\sigma} \left[1 - r^{*2} \right] \cos \tau + \frac{Re\omega}{32} \left[r^{*4} + 4r^{*2} - 5 \right] \sin \tau \quad (21)$$

Remarque :

Dans l'équation (21), il n'y a pas de fonction de Bessel.

On vérifie l'adhérence à la paroi par les conditions aux limites suivantes :

$$U(r, \pm a) = 0$$

On vérifie que la forme du profil de vitesse au centre ressemble à celle de Poiseuille, ceci par

l'application de la condition suivante : $\left. \frac{dU}{dr} \right|_{r=0} = 0 \Rightarrow U = U_{\max}$

Le cas à grande fréquence :

Si la fréquence est grande, le profil de vitesse est donné par la relation suivante :

$$U(r^*, \tau) = \frac{Cte}{Re\omega} \left[\sin \tau - \frac{e^{-E}}{\sqrt{r^*}} \sin(\tau - E) \right] \quad (22)$$

Avec :

$$E = \left[1 - r^{*2} \right] \sqrt{\frac{Re\omega}{8}}, \quad \sigma = \frac{8}{\beta} \sqrt{(\lambda - 2c_1)^2 + 4c_2^2}, \quad \lambda = \frac{Re\omega}{2} \quad (23)$$

L'expression (22) indique la variation sinusoïdale de la vitesse en fonction du temps. Elle montre la dépendance de la vitesse à la fréquence. Il est à noter que l'expression (22) vérifie l'adhérence à la paroi.

Calcul des forces de frottements

Le calcul des forces de frottement dans le cas des écoulements pulsés est différent de celui dans le cas stationnaire. Car les frottements dépendent à la fois de la position et du temps. Parmi les applications des forces de frottement dans le cas pulsé c'est le cas des écoulements sanguins dans les veines. Les forces de frottement dans ce type d'écoulement peuvent engendrer la destruction des tissus des veines. C'est le cas des Sténose où des rétrécissements apparaissent au niveau des veines empêchant la bonne circulation du sang.

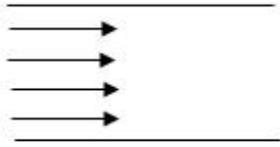


Fig3 : Veine normale

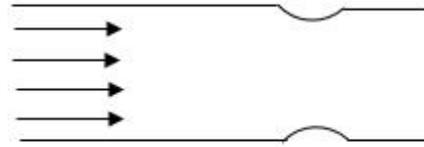


Fig4 : Veine malade

Dans le cas pulsé il faut faire apparaître le temps dans l'expression des forces, ceci en procédant à faire le bilan des forces dans une tranche de fluide de la conduite de la manière suivante:

Bilan des forces dans le cas d'une conduite cylindrique:

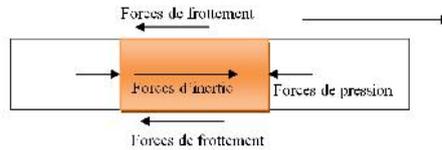


Fig 5 : Bilan des forces dans le cas d'une conduite cylindrique

Le bilan des forces par unité de longueur s'écrit comme suit:

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \quad (24)$$

Cas unidimensionnel :

$$m \vec{a} = \vec{F}_{\text{pression}} + \vec{F}_{\text{frottement}} \quad (25)$$

$$m a = F_{\text{pression}} + F_{\text{frottement}} \quad (26)$$

$$\pi R^2 \rho \frac{\partial U}{\partial t} = -\pi R^2 \frac{\partial P}{\partial z} - 2\pi R \tau \quad (27)$$

$$\tau = -\frac{R}{2} \left(\frac{\partial P}{\partial z} + \rho \frac{\partial U}{\partial t} \right) \quad (28)$$

D'où :

$$\tau = f(r, t) \quad (29)$$

Le calcul des forces de frottement se fait à partir des expressions de la vitesse dans les deux cas de faible et de grande fréquence comme suit :

- **Grande fréquence**

On a :

$$U = 2 \left(1 - r^{*2} \right) + \frac{R_{e\omega}}{16} (B \cos \omega t + (1-A) \sin \omega t) \quad (30)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = -2 \times 2 r^* + \text{cst} (B \cos \tau' + (1-A) \sin \tau') \quad (31)$$

$$\tau = 4 + f(\tau', R_{e\omega}) \quad (32)$$

L'expression de τ contient deux termes ; un qui représente le cas stationnaire qui est constant et l'autre représente le cas instationnaire qui est fonction du temps et de la fréquence.

Remarque : on calcul parfois le τ dit normalisé comme suit :

$$\tau_{\text{normalisé}} = \frac{\tau}{\tau_{\text{stationnaire}}} \quad (33)$$

$$\tau_{\text{normalisé}} = 1 + f(\tau', R_{e\omega}) \quad (34)$$

Selon Zhao l'expression de la vitesse, dans le cas de faible fréquence est :

$$U(r^*) = \text{Cte} \left(1 - r^{*2} \right) \cos \tau' + \frac{R_{e\omega}}{16} \left[r^{*4} + 4r^{*2} - 5 \right] \sin \tau' \quad (35)$$

$$\tau = - \left. \frac{\partial U}{\partial r^*} \right|_{r^*=1} = 2 \left(r^* \right)_{r^*=1} \cos \tau' + \frac{R_{e\omega}}{16} \left[4 \left(r^* \right)_{r^*=1}^3 + 4 \times 2 \left(r^* \right)_{r^*=1} \right] \sin \tau' \quad (36)$$

$$\tau = \text{Cte.} \cos \tau' + \frac{R_{e\omega}}{2} \sin \tau' \quad (36)$$

On remarque que le coefficient de frottement τ est proportionnel à la fréquence, ce qui signifie que la pulsation fait augmenter les frottements.

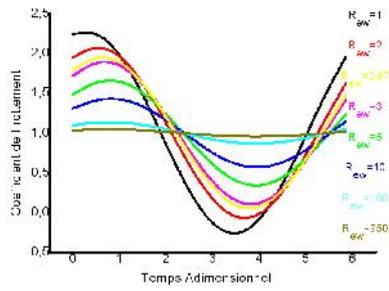


Fig. 6 : Variation du coefficient de frottement adimensionnel en fonction du temps pour différentes valeurs de la fréquence

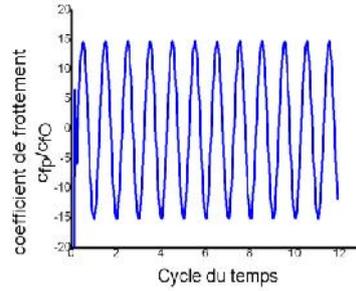


Fig. 7 : Variation du coefficient du frottement en fonction du temps pour les grandes fréquences

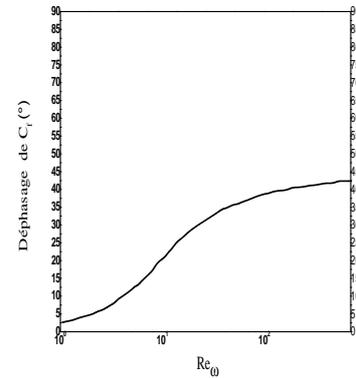


Fig. 8 : Courbe de déphasage du coefficient de frottement en fonction de la fréquence

Détermination du maximum de la vitesse

Cas de faible fréquence

L'expression de la vitesse est donnée par :

$$U(r^*, \tau') = 2(1 - r^{*2}) \cos \tau' + \frac{Re_{\omega}}{16} [r^{*4} + 4r^{*2} - 5] \sin \tau' \quad (37)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r^*} = 0 \Rightarrow U(r^*, \tau') = U_{\max}(r^*, \tau') \quad (38)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r^*} = 0 \Rightarrow r^* = 0 \quad (39)$$

C'est la même position que dans le cas de l'écoulement de Poiseuille.

Cas de grandes fréquences

L'expression de la vitesse est donnée par :

$$U(r^*, \tau') = \sin \tau' - \frac{e^{-E}}{\sqrt{r^*}} \sin(\tau' - E) \quad (40)$$

$$\frac{\partial U(r^*, \tau')}{\partial r^*} = 0 + f(r^*) = 0 \quad (41)$$

On remarque que la position du maximum de la vitesse dépend de la fréquence à travers l'expression précédente sa résolution se fait avec le logiciel Matlab.

Calcul de déphasage

Entre les paramètres de l'écoulement, il existe un déphasage. Exemple entre la vitesse et la pression. Vitesse -température. Température et Nusselt.

Ce déphasage est dû au retard mis pour que l'information donnée par les sources d'excitation arrive au récepteur. Pour calculer le retard (déphasage) il ya plusieurs méthodes, de la méthode directe à la méthode de plan de phase utilisée pour les écoulements pulsés, car les courbes ne sont pas totalement périodiques et le calcul direct devient difficile.

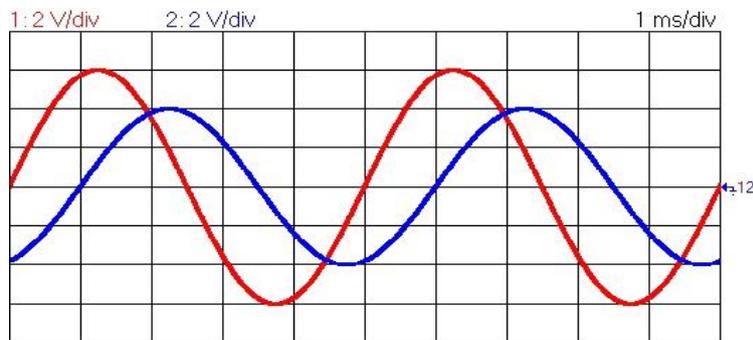


Fig. 9 : Méthode directe de mesure de déphasage entre deux grandeurs

- **Le plan de phase :**

Ce plan est constitué de deux axes, chaque axe porte une grandeur. Les grandeurs sont normalisées. Dans ce plan le déphasage est représenté par des courbes fermées. Si le déphasage entre la vitesse et la pression est nul. Dans ce cas, la trajectoire est une droite confondue avec la première bissectrice. Cette situation se présente pour les écoulements pulsés à faibles fréquences.



Fig10 : Plan de phase

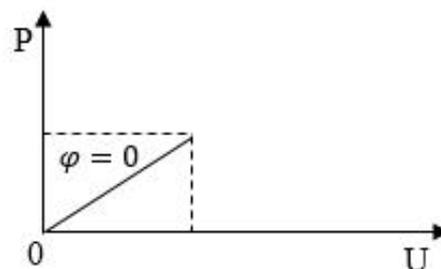


Fig11 : Déphasage nul

Dans le cas où la trajectoire est un cercle de rayon $R=1/2$, le déphasage est un angle droit. Cette situation se présente pour les écoulements pulsés à grandes fréquences.

Dans le cas où la trajectoire est une ellipse d'axes principaux les deux bissectrices, le déphasage est quelconque.

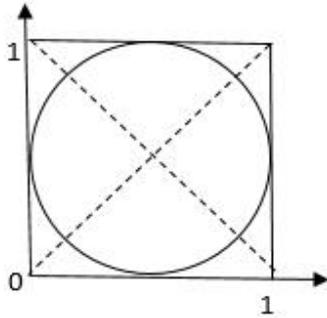


Fig12 : Cas de déphasage égale un angle droit

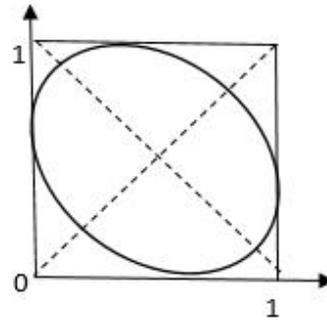


Fig13 : Cas de déphasage quelconque

Détermination du déphasage

On calcule l'angle de déphasage entre deux grandeurs, à savoir la pression et la vitesse de la manière suivante :

Si la pression est considérée comme la source d'excitation, sa variation en fonction du temps est donnée par :

$$\Delta P = \Delta P_0 (1 + \delta \sin \omega t) \quad (42)$$

La vitesse s'exprime alors par :

$$U = U_0 (1 + \delta \sin(\omega t + \varphi_u)) \quad (43)$$

Où : φ_u est le déphasage de la vitesse par rapport à la source (pression)

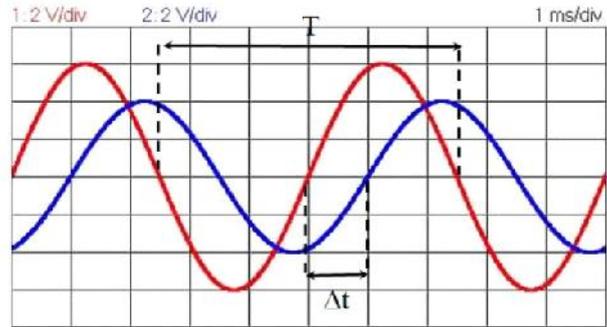


Fig14 : Courbe de la vitesse et de la pression

Pour trouver la trajectoire des variables à étudier (U, P), on passe du plan (o,x,y) au plan (o, x',y'). On procède au changement de variable suivant :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases} \quad (44)$$

Cas de déphasage entre x,y :

$$\begin{cases} x = \sin(\omega t + \varphi_x) \\ y = \sin(\omega t + \varphi_y) \\ \Delta\varphi(x, y) = \varphi_y - \varphi_x \end{cases} \quad (45)$$

Dans le cas :

$$\Delta\varphi(x, y) = \varphi_y - \varphi_x = \frac{\pi}{2} \quad (46)$$

Le système d'équation précédent donne :

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (43)$$

On constate alors que lorsque le déphasage égale à $\pi/2$, la trajectoire est un cercle de rayon $R = 1$ et de centre o.

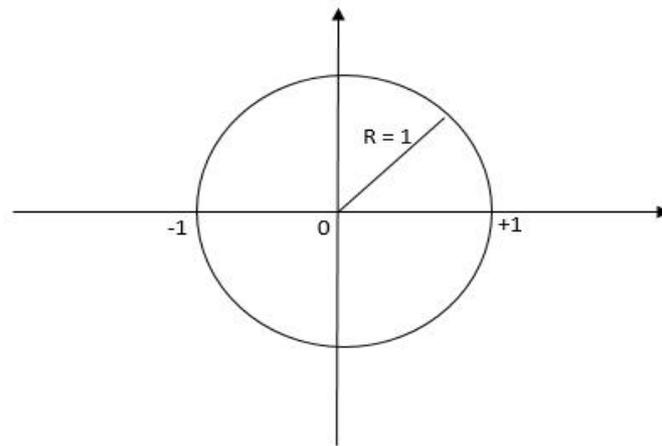


Fig15 : Cas de déphasage égale à $\pi/2$

Dans le cas général où le déphasage est quelconque on étudie la transformation de cette trajectoire dans le plan (ox',oy') comme suit :

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin(\xi t + \xi_x) + \sin(\xi t + \xi_y)) \\ = \sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\xi_x - \xi_y}{2}\right) \sin\left(\xi t + \frac{\xi_x + \xi_y}{2}\right) \right) \end{cases} \quad (47)$$

$$\begin{cases} y' = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\sin(\xi t + \xi_x) + \sin(\xi t + \xi_y)) \\ = \sqrt{2} \left(\sin\left(\frac{\xi_x - \xi_y}{2}\right) \cos\left(\xi t + \frac{\xi_x + \xi_y}{2}\right) \right) \end{cases} \quad (48)$$

On pose :

$$\begin{cases} p + q = \omega t + \varphi_x & p = \omega t + 1/2(\varphi_x + \varphi_y) \\ p - q = \omega t + \varphi_y & q = 1/2(\varphi_x - \varphi_y) \end{cases} \quad (49)$$

On a :

$$\begin{aligned} \sin(p + q) + \sin(p - q) &= 2 \sin p \cos q \\ -\sin(p + q) + \sin(p - q) &= 2 \sin q \cos p \end{aligned}$$

On trouve alors :

$$\begin{aligned}x' &= a \sin \left(\omega t + \frac{\varphi_x + \varphi_y}{2} \right) \\y' &= b \cos \left(\omega t + \frac{\varphi_x + \varphi_y}{2} \right)\end{aligned}\tag{50}$$

Avec :

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{2} \cos (\Delta\varphi / 2) \\b &= \sqrt{2} \sin (\Delta\varphi / 2)\end{aligned}\tag{51}$$

L'équation de la trajectoire est alors :

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \sin^2 \left(\omega t + \frac{\varphi_x + \varphi_y}{2} \right) + b^2 \cos^2 \left(\omega t + \frac{\varphi_x + \varphi_y}{2} \right)\tag{51}$$

Cas particulier :

$$a = b \text{ si } \cos \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right) = \sin \left(\frac{\Delta\varphi}{2} \right) \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}\tag{52}$$

On retrouve l'équation du cercle. Dans le cas général, on a :

$$\begin{aligned}x' &= a \sin \left(\omega t + \frac{\varphi_x + \varphi_y}{2} \right) \\y' &= b \cos \left(\omega t + \frac{\varphi_x + \varphi_y}{2} \right)\end{aligned}\tag{53}$$

L'équation de la trajectoire est donnée par :

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1\tag{54}$$

C'est l'équation d'une ellipse dont les axes principaux sont tournés d'un angle γ par rapport aux deux axes ox et oy et donné par la relation suivante :

$$\tan 2\gamma = \frac{2ab}{(a^2 - b^2)} \cos \Delta\varphi\tag{55}$$

D'où l'angle de déphasage

$$\cos \Delta \varphi = \frac{(a^2 - b^2)}{2ab} \tan 2\gamma \quad (56)$$

Cas particulier :

$$\text{Si : } a = b \Rightarrow \cos \Delta \varphi = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = \Pi / 2$$

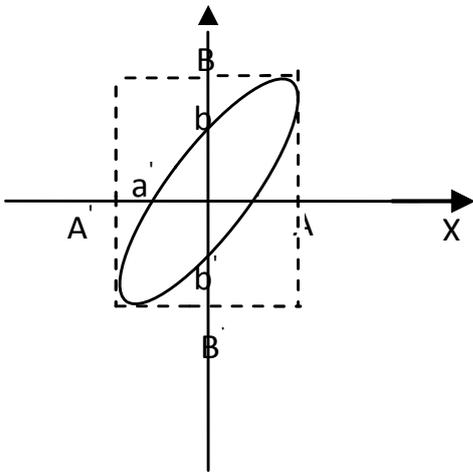


Fig. 16 : Ellipse de déphasage

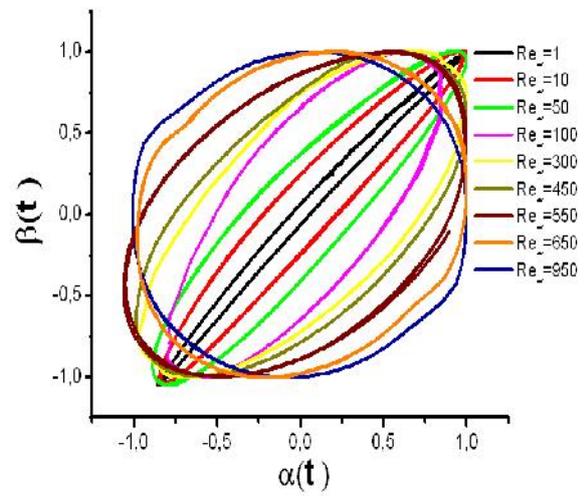


Fig. 17 : Ellipses de déphasage entre le coefficient de frottement et le gradient de pression pour différentes valeurs de la fréquence

Etude Dynamique de l'écoulement pulsée dans une conduite rectangulaire :

On étudie le comportement dynamique de l'écoulement pulsée d'un fluide visqueux isotherme dans une conduite rectangulaire d'axeur $h = 2a$ de longueur l . A $t = 0$, le fluide est pulsé à la section d'entrée de la conduite suivant l'axe de cette dernière avec une pulsation . On s'intéresse à chercher le profil de vitesse U .

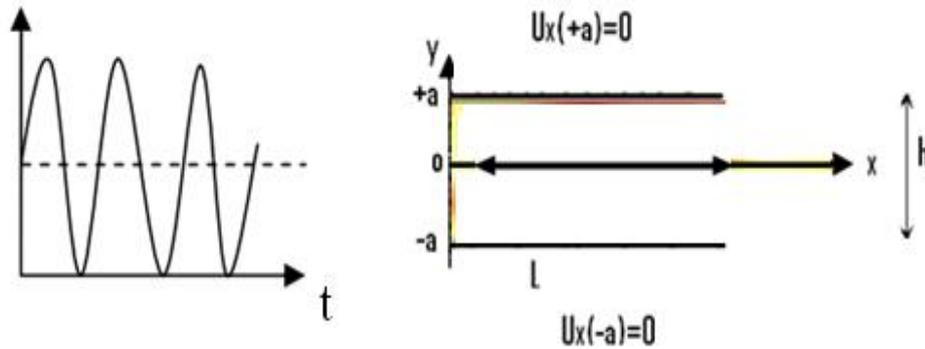


Fig18 : Conduite rectangulaire

Equation de continuité :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (57)$$

Equation de mouvement :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (58)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (59)$$

Hypothèses : Ecoulement unidirectionnel, l'équation du mouvement selon x se simplifie comme suit :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (60)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (43)$$

On trouve alors que la pression ne dépend pas de y, elle dépend uniquement de x.

$$-\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \Rightarrow p = f(x) \quad (61)$$

La dépendance de la pression de l'abscisse x signifie que les lignes isobares sont verticales à l'axe de la conduite.

Pour que l'écoulement soit défini avec des équations différentielles du second ordre, on impose un gradient de pression indépendant de x et dépend uniquement du temps, comme suit.

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = p_0 + p_1 e^{i\omega t} \quad (62)$$

Où : p_0 représente le terme stationnaire et p_1 le terme instationnaire.

L'équation différentielle associée à la vitesse axiale est donnée comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p_0 + p_1 e^{i\omega t} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (63)$$

On cherche la solution $u(y,t)$ de la même forme que le gradient de pression :

$$u(y,t) = u_0 + u_1 e^{i\omega t}$$

Avec :

$$u_0 = u_0(y), \quad u_1 = u_1(y)$$

Remplaçant les équations (62 - 63) dans l'équation (60), on obtient les expressions suivantes :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\omega u_1 e^{i\omega t} \quad (64)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial y} e^{i\omega t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (65)$$

On se retrouve avec deux expressions de la vitesse axiale, une dépend du temps et l'autre est une constante.

Remplaçant les équations (64 - 65) dans l'équation (63), on obtient :

$$i\omega u_1 e^{i\omega t} = p_0 + p_1 e^{i\omega t} + v \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} e^{i\omega t} \right) \quad (66)$$

L'équation (66) ne peut être vérifiée que si chacun des termes est nul:

$$e^{i\omega t} \left[p_1 - i\omega u_1 + v \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (67-a)$$

$$p_0 + v \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = 0 \quad (67-b)$$

La vitesse u est déterminée à partir de la résolution des équations (67-a) et (67-b). L'équation (67-b) donne la partie stationnaire de la vitesse u_0 dont sa résolution est sous la forme :

$$u_0(y) = -\frac{p_0}{2\nu} y^2 + c_1 y + c_2 \quad (68)$$

La forme de la formule (68) est identique au profil de poiseuille. Les constantes c_1 et c_2 sont déterminées à partir de l'adhérence à la paroi.

Conditions aux limites :

$$u_0(+a) = -\frac{p_0}{\nu} \frac{a^2}{2} + c_1 a + c_2 = 0 \quad (69)$$

$$u_0(-a) = -\frac{p_0}{\nu} \frac{a^2}{2} - c_1 a + c_2 = 0 \quad (70)$$

$$\Rightarrow c_2 = \frac{p_0}{\nu} \frac{a^2}{2}, \quad c_1 = 0 \quad (71)$$

Par conséquent :

$$u_0(y) = \frac{p_0}{2\nu} [a^2 - y^2] \quad (72)$$

Vérification :

- La condition d'adhérence :

$$u_0(y) = 0 \Rightarrow a^2 - y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm a \quad (73)$$

- La vitesse est maximum au centre de la conduite :

$$\frac{\partial u_0(y)}{\partial y} = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (74)$$

Equation différentielle de la partie instationnaire de la vitesse $u_1(y,t)$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - i \frac{\omega}{v} u_1 + \frac{p_1}{v} = 0 \quad (75)$$

L'équation qui régit la partie instationnaire de la vitesse est une équation différentielle de deuxième ordre avec un second membre. La solution est de la forme :

$$S_G = S_H + S_P \quad (76)$$

Où : S_P désigne la partie invariante et S_H est la solution de l'équation différentielle homogène sans second membre.

La solution particulière :

$$\begin{aligned} -i \omega u_{1p} + p_1 &= 0 \\ \Rightarrow u_{1p} &= -i \frac{p_1}{\omega} \end{aligned} \quad (77)$$

La solution homogène

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - i \frac{\omega}{v} u_1 = 0 \quad (78)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = i \frac{\omega}{v} u_1 \quad (79)$$

On définit ω_0 comme suit:

$$\Rightarrow \omega_0^2 = i \frac{\omega}{v} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{i\omega}{v}} \quad (80)$$

La solution homogène de la vitesse est de la forme :

$$u_1 = c_3 \operatorname{ch}(\omega_0 y) + c_4 \operatorname{sh}(\omega_0 y) \quad (81)$$

Démonstration :

Les racines sont déterminées à partir de l'équation caractéristique comme suit :

$$\Rightarrow r^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = +\omega_0 = \sqrt{\frac{i\omega}{v}} \\ r_2 = -\omega_0 = -\sqrt{\frac{i\omega}{v}} \end{cases} \quad (82)$$

L'expression de la solution homogène de la vitesse est de la forme :

$$u_1 = c_1 e^{r_1 y} + c_2 e^{r_2 y} = c_1 e^{\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} y} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{i\omega}{\nu}} y} \quad (83)$$

La solution générale est donc :

$$u_G = u_H + u_P \quad (84)$$

Soit :

$$u_1(y, t) = \left(-\frac{iP_1}{\omega} + C_3 \operatorname{ch}\omega_0 y + C_4 \operatorname{sh}\omega_0 y \right) \quad (85)$$

Les constantes C_3 et C_4 sont déterminées à partir des conditions d'adhérence à la paroi comme suit :

$$\begin{cases} u_1(+a) = 0 \\ u_1(-a) = 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \operatorname{ch}(+a) = \operatorname{ch}(-a) \\ \operatorname{sh}(+a) = -\operatorname{sh}(-a) \end{cases} \quad (86)$$

$$u_1(+a) = -\frac{iP_1}{\omega} + c_3 \operatorname{ch}\omega_0 a + c_4 \operatorname{sh}\omega_0 a = 0 \quad (87)$$

$$u_1(-a) = -\frac{iP_1}{\omega} + c_3 \operatorname{ch}\omega_0(-a) + c_4 \operatorname{sh}\omega_0(-a) = 0 \quad (88)$$

$$-\frac{iP_1}{\omega} + c_3 \operatorname{ch}\omega_0(+a) - c_4 \operatorname{sh}\omega_0(+a) = 0$$

La somme donne : $\Rightarrow -\frac{2iP_1}{\omega} + 2c_3 \operatorname{ch}\omega_0 y = 0 \quad (89)$

$$\Rightarrow c_3 = \frac{iP_1}{\omega \operatorname{ch}\omega_0 a} \quad (90)$$

La différence donne :

$$\Rightarrow 2C_4 \operatorname{sh}\omega_0 a = 0 \Rightarrow C_4 = 0 \quad (91)$$

La solution générale s'écrit alors :

$$u_1(y) = -\frac{iP_1}{\omega} + \frac{iP_1}{\omega \operatorname{ch}\omega_0 a} \operatorname{ch}\omega_0 y \quad (92)$$

L'expression de la partie instationnaire de la vitesse est donc :

$$u_1(y, t) = \frac{P_1}{i\omega} \left(1 - \frac{\text{ch}\omega_0 y}{\text{ch}\omega_0 a} \right) e^{i\omega t} \quad (93)$$

Le profil radial de la partie stationnaire u_1 présente un effet annule près des parois. Si les fréquences sont faibles, le profil de la vitesse a tendance d'avoir le profil de Poiseuille et si les fréquences sont élevées, le profil à tendance d'avoir un profil de l'effet annulaire. La solution complète de la vitesse qui comporte la partie stationnaire et la partie instationnaire est de la forme :

$$u(y, t) = \frac{P_0}{2\nu} (a^2 - y^2) + \frac{P_1}{i\omega} \left(1 - \frac{\text{ch}\omega_0 y}{\text{ch}\omega_0 a} \right) e^{i\omega t} \quad (94)$$

Qui peut se mettre sous la forme :

$$u(y, t) = \frac{P_0}{2\nu} a^2 \left(1 - y^2 / a^2 \right) + \frac{P_1}{i\omega} \left(1 - \frac{\text{ch}\omega_0 y}{\text{ch}\omega_0 a} \right) e^{i\omega t} \quad (95)$$

On constate que dans cette expression P_0 et P_1 ne sont pas connue. (P_0 et P_1 gradient de pression).

En général, ce gradient de pression est calculé de la façon suivante :

On calcule le débit à travers une section et durant une période :

$$Q = \int U ds = f(P_0, P_1) \quad (96)$$

Au lieu de calculer le débit Q , on peut aussi faire appel à la vitesse moyenne. C'est pour cela, on calcule P_0 qui correspond à la partie stationnaire comme suit :

On a :

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{2a} \int_{-a}^{+a} U dy = \frac{1}{2a} \frac{P_0}{2\nu} \int_{-a}^{+a} (a^2 - y^2) dy \quad (97)$$

$$U_{\text{moy}} = \frac{P_0}{3\nu} a^2 \quad (98)$$

$$L_{\text{ref}} = a, \quad t_{\text{ref}} = \frac{1}{\omega} \quad (99)$$

$$P_{\text{ref}} = \frac{1}{2} \rho U_m^2$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} / 2\rho u \quad (100)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = p_0 + p_1 e^{i\omega t} \quad (101)$$

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \frac{1}{p_0} = 1 + \frac{P_1}{P_0} e^{i\omega t} \quad (102)$$

Rapport des pressions

$$\varphi = \frac{P_1}{P_0} \quad (103)$$

$$U_{\text{ref}} = U_{\text{moy}} = \frac{P_0}{3\nu} a^2 \quad (104)$$

$$P_{\text{ref}} = \frac{1}{2} \rho U_m^2 \quad (105)$$

Expression de la vitesse adimensionnelle de la vitesse totale :

Pour trouver cette expression, on définit d'abord les grandeurs de référence comme suit :

$$u(y,t) = \frac{P_0}{2\nu} a^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) + \frac{P_1}{i\omega} \left(1 - \frac{\text{ch}\omega_0 y}{\text{ch}\omega_0 a}\right) e^{i\omega t} \quad (106)$$

En divisant par la vitesse moyenne et en tenant compte des autres grandeurs, l'expression adimensionnelle s'écrit alors :

$$u^* = \frac{P_0}{2\nu} a^2 \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) / \frac{P_0 a^2}{3\nu} + \frac{P_1}{i\omega} / \frac{P_0 a^2}{3\nu} \left(1 - \frac{\text{ch}\omega_0 y}{\text{ch}\omega_0 a}\right) e^{i\omega t} \quad (107)$$

$$u^* = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) + \frac{P_1}{P_0} \cdot \frac{3\nu}{i\omega a^2} \left(1 - \frac{\text{ch}\omega_0 y}{\text{ch}\omega_0 a}\right) e^{i\omega t} \quad (108)$$

Remarque : La valeur maximale de la partie stationnaire de la vitesse adimensionnelle est égale à 1.5 , elle est au centre de la conduite.

$$u^*(y^*, t^*) = \frac{3}{2} (1 - y^{*2}) + 3i \frac{\varphi}{R_{e\omega}} \left(-1 + \frac{\text{ch} y^* \sqrt{i R_{e\omega}}}{\text{ch} \sqrt{i R_{e\omega}}} \right) e^{i t^*} \quad (109)$$

Avec : $R_{e\omega} = \frac{a^2 \omega}{\nu}$ est le nombre de Reynolds cinétique.

Remarque :

Cette expression indique que la vitesse dépend de $R_{e\omega}$ et du rapport de pression.

Pour de faibles valeurs de la fréquence $R_{e\omega}$, on trouve le cas stationnaire (profil Poiseuille). On remarque aussi que lorsque la fréquence $R_{e\omega}$ augmente, le profil de vitesse diminue.

On fixe le nombre de R_{eS} et on trace la vitesse en fonction du temps.

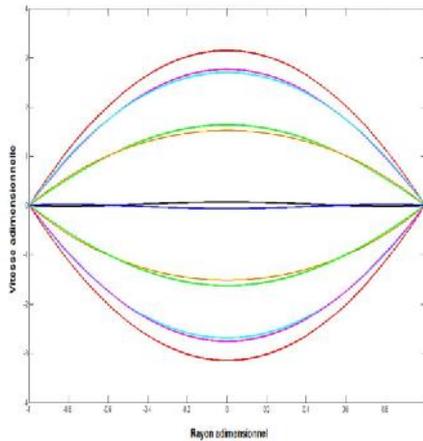


Fig19 : Profil radial de la vitesse pour différentes phases. K Belahda 2012

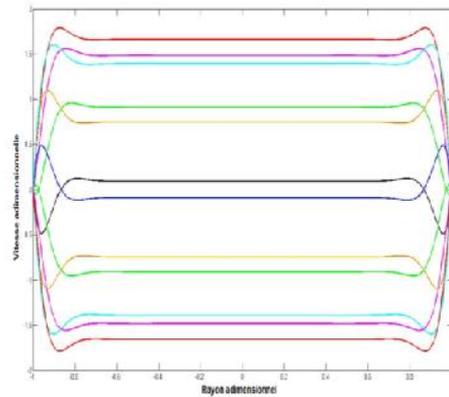


Fig20 : Effet annulaire pour les grandes fréquences .K Belahda 2012

Détermination du maximum de la vitesse :

On a :

$$u^* = \frac{3}{2} (1 - y^{*2}) + 3i \frac{\phi}{R_{e\omega}} \left(-1 + \frac{\text{chy}^* \sqrt{iR_{e\omega}}}{\text{ch}\sqrt{iR_{e\omega}}} \right) e^{it^*} \quad (110)$$

$$u^* = u_{\max}^* \text{ Si } \frac{\partial u^*(y, t)}{\partial y^*} = 0$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -3y^* + \frac{3i\sqrt{i\phi}}{\sqrt{R_{e\omega}}} \frac{\text{shy}^* \sqrt{iR_{e\omega}}}{\text{ch}\sqrt{iR_{e\omega}}} e^{it^*} = 0 \quad (111)$$

Cette expression détermine la position du maximum de la vitesse et par la suite la valeur de cette vitesse, elle est résolue à l'aide du Logiciel Matlab .Elle montre aussi que la position de la vitesse

maximale dépend de (rapport des pressions) et de Reynolds cinétique $R_{e\omega}$. On étudie cette expression dans les deux cas limites.

Cas de faibles fréquences : Si $R_{e\omega}$ tends vers zéro, l'expression devient :

$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -3y^* = 0 \rightarrow y^* = 0 \quad (112)$$

Cette position est indépendante du rapport des pressions.

Cas de grandes fréquences : Si $R_{e\omega}$ tends vers l'infini, Sachant que dans ce cas que cette position se trouve près des parois effet annulaire, l'expression devient alors :

$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -3y^* + \frac{3i\sqrt{i\phi}}{\sqrt{R_{e\omega}}} \frac{\text{sh}\sqrt{iR_{e\omega}}}{\text{ch}\sqrt{iR_{e\omega}}} e^{it^*} = 0 \quad (113)$$

$$-3y^* + \frac{3i\sqrt{i\phi}}{\sqrt{R_{e\omega}}} \text{th}\sqrt{iR_{e\omega}} e^{it^*} = 0 \quad (114)$$

Cette position dépend de la fréquence, du rapport des pressions et du temps, elle est résolue à l'aide du Logiciel Matlab. Une expression valable pour les valeurs modérées de la fréquence trouvée par A.Ghezal permet de déterminer cette position comme suit :

$$1 - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{Re\omega\eta}\right)^2}{2} + 3\eta = 0 \quad (115)$$

Qui devient :

$$4 - Re\omega\eta_{\max}^2 + 12\eta_{\max} = 0 \quad (116)$$

Si le déterminant est définit comme suit :

$$\Delta = 12^2 + 4Re\omega \quad (117)$$

Les deux racines sont :

$$\eta_{\max}^{(1)} = \frac{-12 + \sqrt{\Delta}}{-2Re\omega} = \frac{12 - \sqrt{\Delta}}{2Re\omega} < 0, \quad \eta_{\max}^{(2)} = \frac{-12 - \sqrt{\Delta}}{-2Re\omega} = \frac{12 + \sqrt{\Delta}}{2Re\omega} > 0 \quad (118)$$

La première racine est rejetée.

$$\eta_{\max} = \frac{12 + \sqrt{\Delta}}{2 \operatorname{Re} \varpi} \quad (119)$$

$$\eta_{\max} = \frac{12 + \sqrt{(12)^2 + 4 \operatorname{Re} \varpi}}{2 \operatorname{Re} \varpi} \quad (120)$$

Tableau 1: les valeurs de la position du maximum de la vitesse.

$\operatorname{Re} \varpi$	y_{\max}	Maximum de la vitesse
1	12.6	pas de maximum
10	1.27	maximum au niveau de la paroi $\eta=1$
11	0.62	maximum existe
16	0.45	maximum existe
100	0.12	maximum existe

Expression de la force de frottement à la paroi :

$$\tau = - \left. \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right| = +3 - \frac{3i\sqrt{i\varphi} \operatorname{sh}\sqrt{iR_{e\omega}}}{\sqrt{R_{e\omega}} \operatorname{ch}\sqrt{iR_{e\omega}}} e^{it^*} \quad (121)$$

Cette force dépend de la fréquence, du rapport des pressions et du temps, elle est résolue à l'aide du Logiciel Matlab. Il est à noter qu'elle contient deux termes ; le premier relatif à la partie stationnaire et l'autre à la partie oscillatoire. Elle peut s'exprimer comme suit :

$$\tau = \tau_s + \tau_{\text{osc}} = +3 - \frac{3i\sqrt{i\varphi} \operatorname{sh}\sqrt{iR_{e\omega}}}{\sqrt{R_{e\omega}} \operatorname{ch}\sqrt{iR_{e\omega}}} e^{it^*} \quad (122)$$

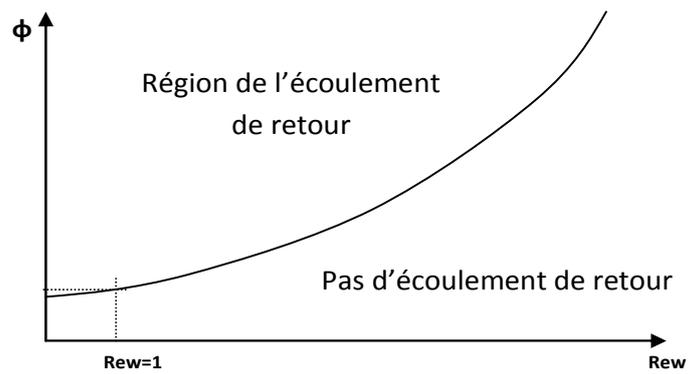
Avec :

$$\tau_s = +3 \quad (88)$$

$$\tau_{\text{osc}} = - \frac{3i\sqrt{i\varphi} \operatorname{sh}\sqrt{iR_{e\omega}}}{\sqrt{R_{e\omega}} \operatorname{ch}\sqrt{iR_{e\omega}}} e^{it^*} = - \frac{3i\sqrt{i\varphi}}{\sqrt{R_{e\omega}}} \operatorname{th}\sqrt{iR_{e\omega}} e^{it^*} \quad (123)$$

Dans certains travaux on utilise la force normalisée comme suit :

$$\tau_n = \frac{\tau}{\tau_s} = 1 + \frac{\tau_{osc}}{\tau_s} = 1 - \frac{i\sqrt{i\phi}}{\sqrt{Re\omega}} \operatorname{th}\sqrt{iRe\omega} e^{it^*} \quad (124)$$



$$\phi = \sqrt{Re\omega/2} + \frac{1}{2}\sqrt{Re\omega/2e} \sqrt{2\sqrt{Re\omega/2}}$$

Fig 21 : Allure de la courbe d'instabilité dans le cas d'une conduite rectangulaire d'après A Ghezal 2007

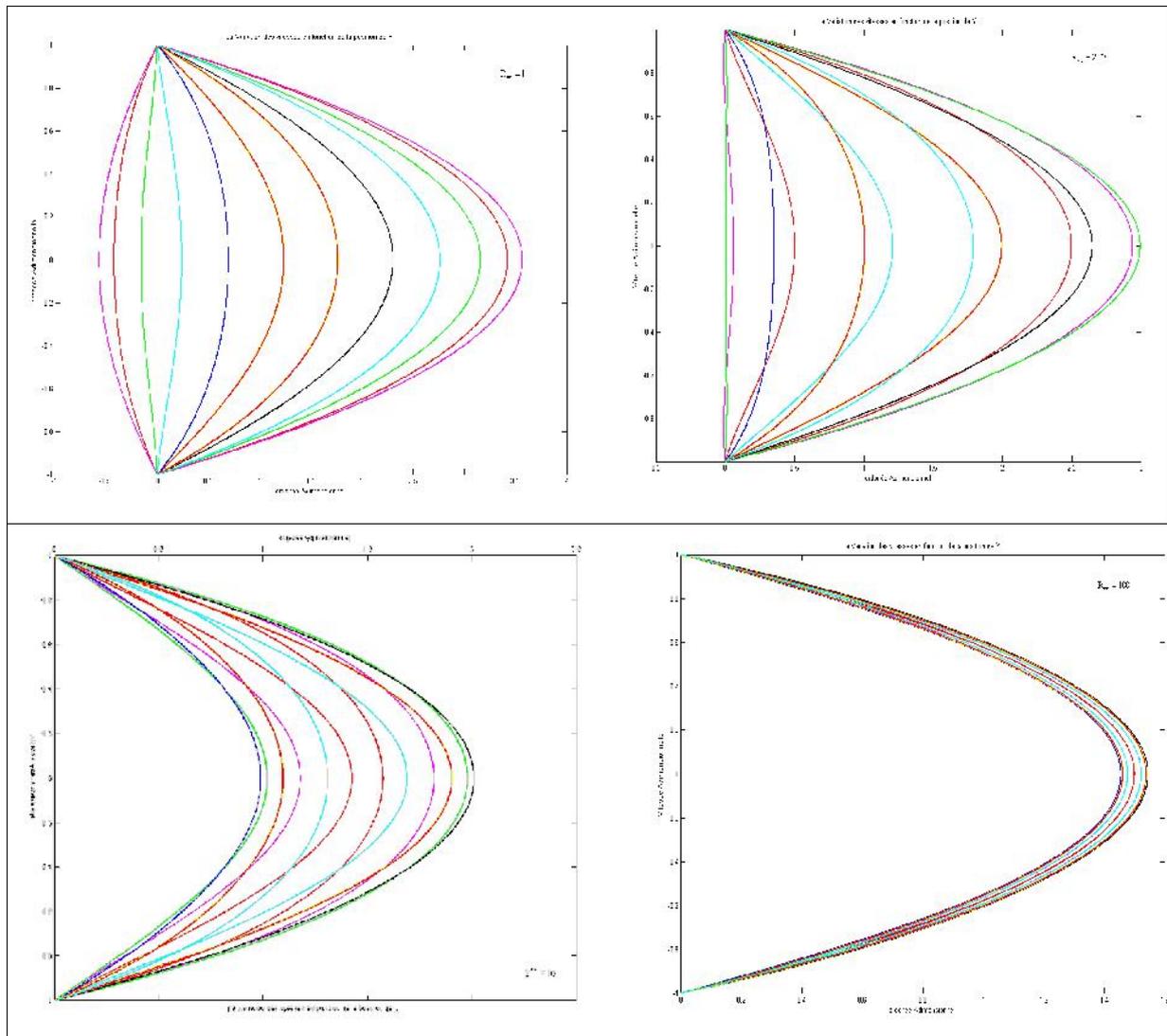


Fig. 22 : Profil de la vitesse pour différentes phases et pour différentes valeurs de la fréquence
K.Belahda

Vorticité dans les écoulements pulsés

Son existence provoque des instabilités aussi bien dynamiques que thermique causant des pertes thermiques dans les écoulements (dissipation d'énergie).

Dans le cas d'une géométrie rectangulaire, la vorticité est exprimée par :

$$\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (125)$$

Dans notre cas, on s'intéresse à l'écoulement unidimensionnel :

$$v = 0 \Rightarrow \Omega = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (126)$$

On remarque la relation précédente se confond avec la formule des frottements à la paroi

$$\tau = -\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=y_p} \quad (127)$$

A la paroi, on a ce qui suit :

$$y = y_p \Rightarrow \Omega(y_p) = \tau \quad (128)$$

L'expression de la vorticité est donnée alors par :

$$\Omega(y^*) = \underbrace{3y^*}_1 - \underbrace{\frac{3i\sqrt{i}\varphi}{\sqrt{\text{Re}\omega}} \left(\frac{\text{sh}y^* \sqrt{i\text{Re}\omega}}{\text{ch}y^* \sqrt{i\text{Re}\omega}} \right)}_2 \quad (129)$$

On constate que cette expression contient deux termes.

Le premier terme indique la valeur de la vorticité de la partie stationnaire.

Le deuxième terme est relatif à la partie instationnaire.

Le profil de la vorticité est tracé à l'aide de logiciel Matlab. Pour une période, les variations de la vorticité normalisé sur une période sont indiquées sur la figure suivante.

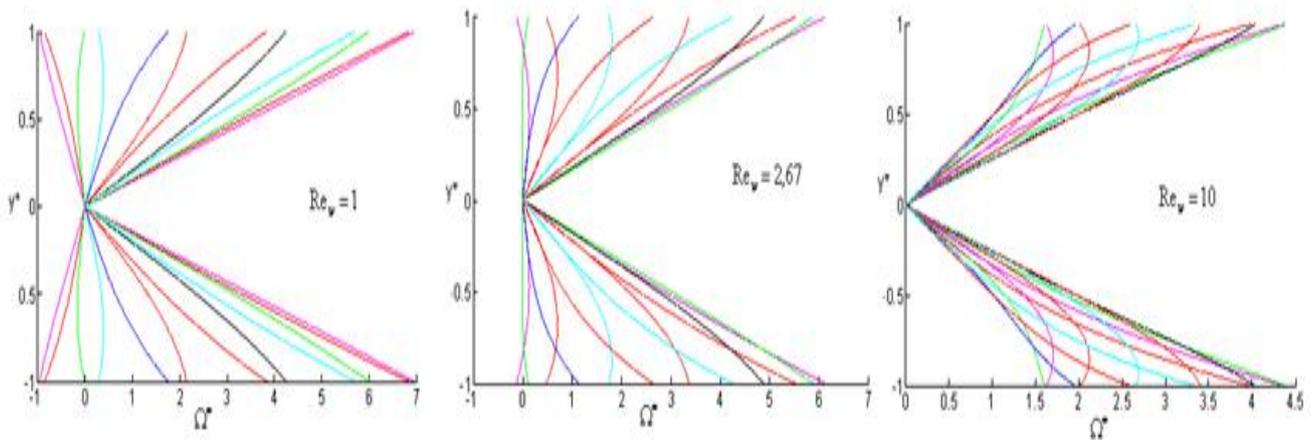


Fig22 : Profils de la vorticité adimensionnelle Pour $\nu = 1.5$ et un nombre de Reynolds cinétique
K.Belahda

Écoulement pulsé dans une conduite cylindrique

Généralités :

Dans ce chapitre, la résolution des équations différentielles de la quantité de mouvement et de l'énergie nécessite des connaissances sur les fonctions de Bessel ; c'est pour cette raison qu'un rappel mathématique est indispensable.

Rappel mathématique :

Dans les écoulements pulsés ou oscillatoires en coordonnées cylindriques, on fait appel à la fonction de Bessel parce que les équations de quantité de mouvement et de transfert de chaleur sont définies par des équations différentielles du deuxième ordre à coefficients non constants de type :

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0 \quad (130)$$

Où : ν est l'ordre de la fonction de Bessel

Dans le cas où $\nu = 0$, la solution de cette équation est de la forme

$$y(x) = A J_0(x) + B K_0(x) \quad (131)$$

$J_0(x)$: Fonction de Bessel de première espèce et d'ordre zéro

$K_0(x)$: Fonction de Bessel de la seconde espèce et d'ordre zéro

L'ordre le plus utilisé dans les écoulements pulsés est 2.

Les fonctions J_0 et J_1 sont semblables à des fonctions représentant le mouvement d'un oscillateur amorti comme suit :

$$\begin{aligned} J_0(x) &\approx e^{-\alpha x} \cos \omega x \\ J_1(x) &\approx e^{-\alpha x} \sin \omega x \end{aligned} \quad (132)$$

Remarque : On constate que :

$$J_1(x) = J_0'(x) \quad (133)$$

Les dérivées des fonctions de Bessel sont d'ordre supérieur

$$\begin{aligned} J_0(0) &= 1; \quad J_1(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} J_0(x) &= 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} J_1(x) = 0 \end{aligned} \quad (134)$$

Remarque : dans l'écoulement pulsé la variable est la fréquence.

$$x \rightarrow 0 \quad (\text{Faible fréquence})$$

$$x \rightarrow \infty \quad (\text{Grande fréquence})$$

Remarque : Quand $x \rightarrow 0$, $K_0(x) \rightarrow \infty$. Cette solution n'est pas physique, on met $B=0$. Dans le cas d'espace annulaire $x \neq 0$ on trouve K_0 .

Pour les écoulements dans une conduite cylindrique, il n'y a que J_0 :

$$y(r) = AJ_0 \quad (135)$$

Dans le cas d'un espace annulaire le B existe

$$y(r) = AJ_0(r) + BK_0(r) \quad (136)$$

Remarque :

Si $x' = \lambda x$ que devient l'équation différentielle et les solutions.

Dans ce cas la fonction différentielle en fonction de x' s'écrit comme suit :

$$x'^2 y''(x') + x' y'(x') + (x'^2 - \nu) y(x') = 0 \quad (137)$$

Qui devient :

$$(\lambda x) y''(\lambda x) + (x \lambda) y'(\lambda x) + ((\lambda x)^2 - \nu) y(\lambda x) = 0 \quad (138)$$

Dans le cas $\epsilon = 0$, la solution de cette équation est de la forme

$$y(x') = AJ_0(\lambda x) + BK_0(\lambda x) \quad (139)$$

Equations de Bessel modifiées

Si la variable est un nombre complexe, la fonction différentielle devient alors :

$$(ix)^2 i^2 y'' + (ix) y' - (x^2 + \nu^2) y = 0 \quad (140)$$

Dans le cas $\epsilon = 0$, la solution de cette équation est une combinaison linéaire de fonctions de Bessel modifiées d'ordre zéro :

$$y(x) = AI_0(x) + BH_0(x) \quad (141)$$

Etude de l'écoulement oscillatoire dans une conduite cylindrique

Equation de quantité de Mouvement :

On suppose que l'écoulement est unidimensionnel, dans ce cas il existe qu'une composante suivant (oz) , l'autre composante verticale est égale à zéro. L'équation de la quantité de mouvement se réduit à :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (142)$$

En introduisant les grandeurs adimensionnelles suivantes :

$$z^* = \frac{z}{a}; r^* = \frac{r}{a}; u^* = \frac{u}{a\omega}; P^* = \frac{P}{\rho(a\omega)^2}; \quad (143)$$

On obtient l'équation adimensionnelle suivante :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial z^*} + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^{*2}} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \quad (144)$$

Avec le nombre de Womorcely définît comme suit :

$$\alpha^2 = Re_{\omega} = \frac{a^2 \omega}{\nu} \quad (145)$$

On cherche une solution de la vitesse sous la forme suivante :

$$u^*(r^*, t^*) = f^*(r^*) e^{it^*} \quad (146)$$

En remplaçant u^* , on obtient :

$$f(r^*) e^{it^*} = A_1 e^{it^*} + \frac{1}{\alpha^2} \left(f''(r^*) e^{it^*} + \frac{1}{r^*} f'(r^*) e^{it^*} \right) \quad (147)$$

Avec :

$$-\frac{\partial P^*}{\partial z^*} = A_1 e^{it^*} \quad (148)$$

Qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$r^{*2} f''(r^*) + r^* f'(r^*) - i r^{*2} \alpha^2 f(r^*) = -A_1 r^{*2} \alpha^2 \quad (149)$$

Résolution de l'équation différentielle avec second membre

La solution est de la forme :

$$f_G(r^*) = f_H(r^*) + f_P(r^*) \quad (150)$$

Avec :

$$S_H(r^*) \rightarrow r^{*2} f''(r^*) + r^* f'(r^*) - i r^{*2} \alpha^2 f(r^*) = 0 \quad (151)$$

$$S_P \rightarrow i \alpha^2 f(r^*) = \alpha^2 A_1 \quad (152)$$

$$f_G(r^*) = A I_0(r^*) + A_1/i \quad (153)$$

La constante A est déterminée à partir des conditions d'adhérence à la paroi

$$f_G(1) = A I_0(1) + A_1/i = 0 \quad (154)$$

$$A = i A_1 / I_0(1) \quad (156)$$

$$f_G(r^*) = i A_1 / I_0(1) * I_0(r^*) + A_1/i = i A_1 \left(I_0(r^*) / I_0(1) - 1 \right) \quad (157)$$

$$u^*(r^*, t^*) = i A_1 \left(I_0(r^*) / I_0(1) - 1 \right) e^{i t^*} \quad (158)$$

Remarque 1 : On constate que cette solution est semblable à celle trouvée dans le cas du rectangle à une différence près que cette solution est exprimée par des fonctions de Bessel (fonctions cylindriques) par contre celles du rectangle sont exprimées par des fonctions hyperboliques.

Remarque 2 : Dans cette expression le terme A désigne l'amplitude de gradient de pression n'est pas connu à priori, il devrait être calculé en fonction de la vitesse moyenne. Ce calcul est effectué via le débit dans une section comme suit:

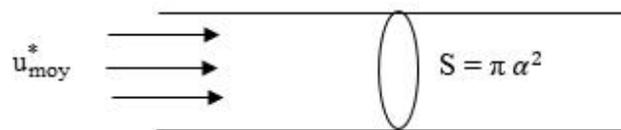


Fig. 23 : Détermination de l'amplitude de gradient de pression A par le débit

On calcule la vitesse moyenne en fonction du nombre de Reynolds maximum et le nombre de Reynolds cinétique comme suit :

$$u_m = \frac{R_{e \max}}{2\alpha^2} \quad (159)$$

Le débit volumique est exprimé par:

$$Q = U_m^* S = \int U^* ds, \quad ds = 2\pi r^* dr \quad (160)$$

En appliquant les propriétés des Fonctions de Bessel, on trouve que :

$$I_1(x) = I_0'(x) \quad (161)$$

$$\lambda I_1(\lambda x) = I_0'(\lambda x) \quad (162)$$

$$\int \lambda I_1(\lambda r^*) r^* dr = I_0(\lambda r^*) + \text{cst} \quad (163)$$

$$U_m^* = iA1\omega R \left(\frac{2I_1(\lambda)}{\lambda I_0(\lambda)} - 1 \right) \quad (164)$$

$$\beta = \alpha\sqrt{i} = \lambda \quad (165)$$

$$iA1 = \frac{R_{e \max}}{2\alpha^2} \left(\frac{1}{\frac{2I_1(\lambda)}{\beta I_0(\lambda)} - 1} \right) \quad (166)$$

$$u^*(r^*, t^*) = \frac{R_{e \max}}{2\alpha^2} \left(\frac{I_0(\beta r^*)/I_0(\beta) - 1}{\frac{2I_1(\beta)}{\beta I_0(\beta)} - 1} \right) e^{it^*} \quad (167)$$

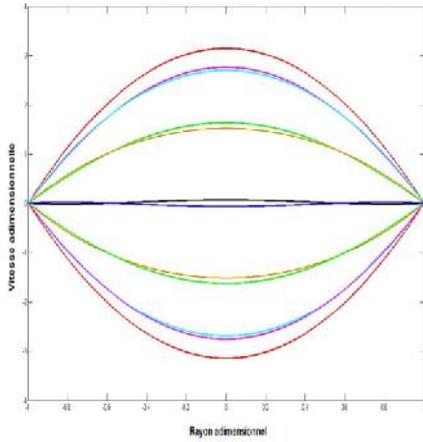


Fig24 : Ecoulement de Poiseuille pour les faibles fréquences

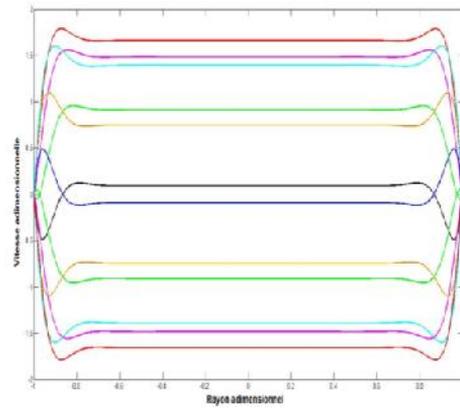


Fig25 : Effet annulaire pour les grandes fréquences

Écoulement oscillatoire dans un espace annulaire

Le but proposé de cette étude est de faire un développement analytique et une résolution numérique des équations qui régissent les écoulements de type oscillatoire, afin d'étudier l'influence de l'amplitude sur les mécanismes de transfert de chaleur entre un cylindre chauffé et un écoulement de fluide réel confiné dans un espace annulaire. Ce type d'écoulement présente un intérêt particulier sur le plan pratique : machines thermiques, pompes, valves, la génie chimique et la biologie, Il est à noter, que l'écoulement d'un fluide réel confiné dans un espace annulaire est rencontré dans différentes applications d'ingénierie, en particulier, dans les échangeurs de type tube dans tube. Les effets engendrés par un écoulement soumis à des pulsations sont; l'effet annulaire, le reversement de l'écoulement, l'augmentation des paramètres moyens de l'écoulement comparés au cas stationnaire et aussi le déphasage entre les paramètres dynamiques et thermiques de l'écoulement avec les pulsations imposées.

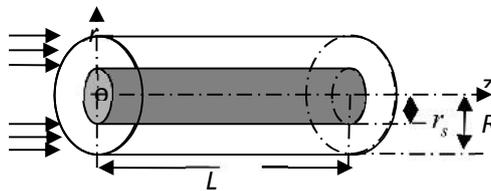


Fig. 26 : Espace annulaire

L'équation de conservation de quantité de mouvement en coordonnées cylindrique s'écrit alors comme suit :

$$\frac{\partial u(r,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(x,t)}{\partial x} + \vartheta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r,t)}{\partial r} \right) \right] \quad (168)$$

En introduit les variables adimensionnelles suivantes:

$$x^* = \frac{x}{R_t}; \quad r^* = \frac{r}{R_t}; \quad u^* = \frac{u}{R_t \omega}; \quad P^* = \frac{P}{\rho (R_t \omega)^2}; \quad t^* = \omega t$$

On obtient les équations adimensionnelles suivantes:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right) \quad (169)$$

I. ETUDE ANALYTIQUE

A cause de la symétrie axiale du problème, le domaine d'étude se réduit au domaine compris entre la conduite adiabatique et le solide chauffé, prenant l'équation (3). Sachant que le fluide est soumis à un gradient de pression oscillatoire de forme:

$$\frac{\partial P^*}{\partial x^*} = -\bar{A} \cos(\omega t) = \text{Re} \left(-\bar{A} e^{it^*} \right) \quad (170)$$

Le profil de vitesse peut se mettre alors sous la forme suivante:

$$u^*(r^*, t^*) = \text{Re} \left(f(r^*) e^{it^*} \right) \quad (171)$$

En introduisant cette expression dans l'équation (3) on obtient une équation différentielle de deuxième ordre non homogène, qui a pour solution:

$$f(r^*) = C_1 I_0(\beta r^*) + C_2 K_0(\beta r^*) \quad (172)$$

On appliquant la condition d'adhérence à la paroi des deux tubes, on aura:

$$r^* = \frac{R_{\text{obs}}}{R_t} \rightarrow u^* = 0 \quad (173)$$

$$r^* = 1 \rightarrow u^* = 0 \quad (174)$$

$$C_1 I_0 \left(\beta \frac{R_{0bs}}{R_t} \right) + C_1 K_0 \left(\beta \frac{R_{0bs}}{R_t} \right) - i\tilde{A} = 0 \quad (175)$$

$$C_1 I_0(\beta) + C_1 K_0(\beta) - i\tilde{A} = 0 \quad (176)$$

D'où les constantes C_1 et C_2 sont égales à:

$$C_1 = \frac{\left[i\tilde{A} \left(K_0 \left(\beta \frac{R_{0bs}}{R_t} \right) - K_0(\beta) \right) \right]}{\left[I_0(\beta) K_0 \left(\beta \frac{R_{0bs}}{R_t} \right) - K_0(\beta) J_0 \left(\beta \frac{R_{0bs}}{R_t} \right) \right]} \quad (177)$$

Et:

$$C_2 = \frac{\left[i\tilde{A} \left(I_0(\beta) - I_0 \left(\beta \frac{R_{0bs}}{R_t} \right) \right) \right]}{\left[I_0(\beta) K_0 \left(\beta \frac{R_{0bs}}{R_t} \right) - K_0(\beta) J_0 \left(\beta \frac{R_{0bs}}{R_t} \right) \right]} \quad (178)$$

La valeur de A n'étant pas connue, on utilise la formule de la vitesse débitante:

$$u_{m,max} e^{it^*} = 2 \int \frac{R_{0bs}}{R_t} \bar{f}(r^*) r^* e^{it^*} \omega(R_t - R_{0bs}) dr^* \quad (179)$$

En posant :

$$C'_1 = \frac{C_1}{i\tilde{A}}, \quad C'_1 = \frac{C_2}{i\tilde{A}} \quad (180)$$

Et après intégration on trouve que:

$$i\tilde{A} = \frac{Re_{max}}{2.\alpha^2} \left[\frac{1}{\frac{C_1'}{\beta} \left(I_1(\beta) - I_1\left(\beta \frac{R_{0bs}}{R_t}\right) \right) - \frac{C_2'}{\beta} \left(K_1(\beta) - K_1\left(\beta \frac{R_{0bs}}{R_t}\right) \right) } + \frac{1}{2} \left(\frac{R_{0bs}}{R_t} \right)^2} \right] \quad (181)$$

Le profil de vitesse dans l'espace annulaire s'écrit donc comme suit:

$$u^*(r^*, t^*) = \left[C_1' I_0(\beta, r^*) + C_2' K_0(\beta, r^*) - 1 \right] i A e^{i\omega t^*} \quad (182)$$

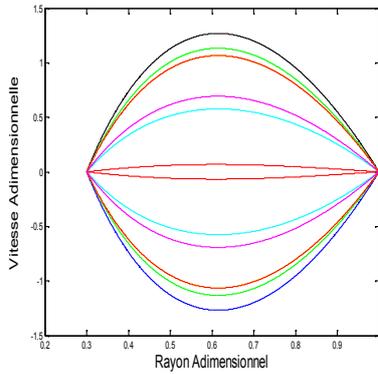


Fig 27 : Ecoulement de Poiseuille pour les faibles fréquences .M.Deghmoum 2010

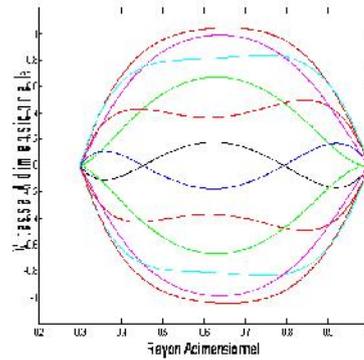


Fig 28 : Effet annulaire pour les grandes fréquences M.Deghmoum 2010

Ecoulement pulsé dans une conduite cylindrique

Dans ce type d'écoulement, il existe deux parties, une partie stationnaire et une autre partie instationnaire. L'expression de la vitesse est de la forme:

$$u(r, t) = u_0(r) + u_1(r, t) \quad (183)$$

$$u_1(r, t) = u_{10}(r) e^{i\omega t} \quad (184)$$

Equation en la quantité de mouvement :

En supposant l'écoulement unidimensionnel, l'équation se réduit à :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (185)$$

On pose :

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = p_0 + p_1 e^{i\omega t} \quad (186)$$

Comme le gradient de pression contient deux termes la solution de la vitesse doit être recherchée sous la même forme. On cherche donc deux solutions, une stationnaire et l'autre instationnaire. Dans ce cas, on regroupe les termes stationnaires d'un côté et de l'autre les termes instationnaires comme suit :

$$p_0 + \mu \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_0}{\partial r} \right) = 0 \quad (187)$$

Qui devient :

$$\frac{\partial u_0}{\partial r} = -\frac{p_0}{\mu} \frac{r^2}{2} + \frac{c_1}{r} \quad (188)$$

La solution stationnaire est donc :

$$u_0(r) = -\frac{r^2 p_0}{4\mu} + c_1 \ln r + c_2 \quad (189)$$

Détermination des constantes :

La vitesse est connue au centre, ce qui impose :

$$c_1 = 0 \quad (190)$$

$$u_0(a) = 0 \quad (130)$$

$$0 = -\frac{a^2 p_0}{4\mu} + C_2$$

$$C_2 = \frac{a^2 p_0}{4\mu} \quad (130)$$

$$u_0(r) = -\frac{r^2 p_0}{4\mu} + \frac{a^2 p_0}{4\mu} = \frac{p_0}{4\mu} (a^2 - r^2)$$

$$u_0(r) = \frac{p_0 a^2}{4\mu} \left(1 - r^2/a^2\right) \quad (130)$$

$$u_{\text{moy}}(r) = \frac{P_0}{4\mu} a^2, \quad u_0^*(r^*) = (1 - r^{*2}) \quad (191)$$

Le terme instationnaire est donné par :

$$p_1 e^{i\omega t} + \mu \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial t} \quad (192)$$

Qui peut se mettre sous la forme suivante :

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{10}}{\partial r} \right) - \rho u_{10} \omega i = -p_1 \quad (193)$$

C'est une équation différentielle non homogène de second ordre à coefficients non constants

La solution particulière est :

$$u_P(r) = \frac{P_1}{\rho i \omega} \quad (194)$$

La solution homogène est solution de l'équation suivante :

$$r^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_{10}}{\partial r} - \frac{\rho u_{10} \omega i r^2}{\mu} = 0 \quad (195)$$

C'est une équation différentielle de type Bessel forme de Bessel :

$$x^2 y'' + x y' - (\lambda^2 x^2 + \nu^2) y = 0 \quad (196)$$

Dans notre cas :

$$\nu = 0, \quad x = r, \quad \lambda^2 = \frac{\rho \omega i}{\mu} \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{\rho \omega}{\mu}} i \quad (197)$$

Solution homogène est:

$$u_H(\lambda r) = \mathbf{A} \mathbf{I}_0(\lambda r) + \mathbf{B} \mathbf{H}_0(\lambda r) \quad (198)$$

La solution générale est :

$$u_G(\mathbf{r}) = u_H(\mathbf{r}) + u_P(\mathbf{r}) \quad (199)$$

$$u_H(\lambda r) = \mathbf{A}\mathbf{I}_0(\lambda r) + \mathbf{B}\mathbf{H}_0(\lambda r) \quad (200)$$

$\mathbf{H}_0(\lambda r)$ n'est pas définie pour $r = 0$ ce qui nécessite $B = 0$

La solution générale est de la forme :

$$u_G(\lambda r) = \frac{P_1}{\rho i \omega} + \mathbf{A}\mathbf{I}_0(\lambda r) \quad (201)$$

$$u_{10} = \mathbf{A}\mathbf{I}_0\left(\left(\frac{\rho\omega}{\mu}\right)^{1/2} i^{1/2} r\right) - i \frac{P_1}{\rho\omega} \quad (202)$$

La constante A est déterminée à partir de la condition d'adhérence à la paroi comme suit :

$$r = a, \mathbf{u} = 0 \Rightarrow A = \frac{i \frac{P_1}{\rho\omega}}{I_0\left(\left(\frac{\rho\omega}{\mu}\right)^{1/2} i^{1/2} a\right)} \quad (203)$$

L'expression de la vitesse devient alors :

$$u_0(r, t) = \mathbf{i}p_1 / \rho\omega \left(\frac{I_0\left(\left(\frac{\rho\omega}{\mu}\right)^{1/2} i^{1/2} r\right)}{I_0\left(\left(\frac{\rho\omega}{\mu}\right)^{1/2} i^{1/2} a\right)} - 1 \right) e^{i\omega t} \quad (204)$$

L'expression de la vitesse totale est donnée par :

$$\mathbf{u}(r, t) = \mathbf{u}_0(r) + \mathbf{u}_1(r) e^{i\omega t} \quad (130)$$

$$\mathbf{u}(r, t) = \frac{P_0}{4\mu} (a^2 - r^2) + \frac{i p_1}{\rho\omega} \left(\frac{I_0(\lambda r i^{1/2})}{I_0(\lambda i^{1/2} a)} - 1 \right) e^{i\omega t} \quad (205)$$

L'expression adimensionnelle s'écrit alors :

$$u(r^*, t^*) = (1 - r^{*2}) + i \frac{4p_1}{Re_\omega P_0} \left(1 - \frac{I_0(\sqrt{i Re_\omega} r^*)}{I_0(\sqrt{i Re_\omega})} \right) e^{it^*} \quad (206)$$

Avec :

$$\lambda = \sqrt{\frac{\rho\omega}{\mu}} \quad \text{et} \quad Re_\omega = \frac{\rho\omega a^2}{\mu} \quad (207)$$

On remarque que l'expression adimensionnelle de la vitesse contient deux termes, le premier indique l'état stationnaire et le deuxième indique l'état instationnaire.

Cas de faibles fréquences

Dans ce cas le nombre de Reynolds cinétique est faible et par conséquent le rapport des pressions est aussi faible, ce qui conduit à négliger le terme instationnaire devant le terme stationnaire. L'écoulement a tendance avoir le profil de Poiseuille

Cas de grandes fréquences :

Dans ce cas le nombre de Reynolds cinétique est élevé et par conséquent le rapport des pressions est grand, ce qui conduit à négliger le terme stationnaire devant le terme instationnaire. L'écoulement a tendance avoir le profil d'un écoulement complètement oscillatoire.

La position du maximum de la vitesse à partir de Uchida

On calcule le maximum de la vitesse à partir d'une solution exacte du profil de vitesse d'un écoulement oscillatoire unidimensionnel dans une conduite cylindrique

Le calcul du maximum de la vitesse à partir de l'expression exacte du profil de la vitesse d'un fluide incompressible, en écoulement laminaire oscillatoire sinusoïdalement dans une conduite cylindrique s'avère compliqué, à titre d'exemple, le profil de vitesse donné par Uchida est ;

$$\frac{W'(r, t)}{W_0} = \frac{32}{Re_\omega} (B \cos(\omega t) + (1 - A) \sin(\omega t)) \quad (208)$$

Où ;

σ, A, B : Sont des fonctions de Bessel qui dépendent de Re_ω .

- a. Cas d'écoulement à très faibles fréquences ($Re_w < 16$)
- b.

$$\frac{W'(r,t)}{W_0} \approx 2 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \cos(\omega t) + \frac{\text{Re}}{32} \left(\left(\frac{r}{R} \right)^4 + 4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 5 \right) \sin(\omega t) \quad (209)$$

c. cas d'écoulement à très fortes fréquences ($\text{Re}_\omega > 16$)

$$\frac{W'(r,t)}{W_0} \approx \frac{32}{\text{Re}} \left[\sin(\omega t) - \frac{e^{-C}}{\sqrt{\frac{r}{R}}} \sin(\omega t - C) \right] \quad (210)$$

Où :

$$C = \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \sqrt{\frac{\text{Re}_\omega}{2}} \quad (211)$$

La position radiale du maximum de la vitesse est déterminée par la condition de dérivée nulle de la vitesse.

1.1 Cas de faibles fréquences ($\text{Re}_\omega < 16$)

La dérivée de l'équation (210) est donnée par :

$$\frac{\partial W}{\partial r} \approx \frac{-4}{R^2} r \cos(\omega t) + \frac{\text{Re}}{32} \left(\frac{4r^3}{R^4} + \frac{8r}{R^2} \right) \sin(\omega t) \quad (212)$$

L'équation (212) est nulle quel que soit t si :

$$\frac{4r^3}{R^4} + \frac{8r}{R^2} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{r}{R^2} = 0 \quad (213)$$

Le terme $\left(\frac{r^2}{R^2} + 2 \right)$ est non nul, donc la solution est donnée par $r = 0$.

Le maximum de la vitesse pour les faibles fréquences se situe donc au centre, ce qui correspond bien au cas d'un écoulement de Poiseuille.

1.2 Cas de fortes fréquences ($\text{Re}_\omega > 16$)

La dérivée de l'équation (212) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial r} &\approx \frac{-32}{Re} e^{-C} \left[\left(\frac{\partial(-C)}{\partial r} \times \frac{\sin(\omega t - C)}{\sqrt{\frac{r}{R}}} \right) + \left(\frac{\partial(-C)}{\partial r} \frac{\cos(\omega t - C)}{\sqrt{\frac{r}{R}}} + \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{\frac{R}{r}} \right) \right) \sin(\omega t - C) \right) \right] = 0 \\
&\approx \frac{-32}{Re} e^{-C} \left[\left(2r \sqrt{\frac{Re}{8}} \frac{\sin(\omega t - C)}{R^2 \sqrt{\frac{r}{R}}} \right) + \left(2r \sqrt{\frac{Re}{8}} \frac{\cos(\omega t - C)}{R^2 \sqrt{\frac{r}{R}}} + \left(-\frac{1}{2} \frac{\sin(\omega t - C)}{\sqrt{\frac{r^3}{R}}} \right) \right) \right] = 0 \\
&\approx \frac{32}{\sqrt{\left(\frac{r}{R}\right) 2Re}} e^{-C} \left(\sin(C - \omega t) + \cos(C - \omega t) - \frac{1}{\sqrt{2Re}} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin(C - \omega t) \right) = 0 \quad (214)
\end{aligned}$$

L'équation (6) est nulle si :

$$\sin(C - \omega t) + \cos(C - \omega t) - \frac{1}{\sqrt{2Re}} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin(C - \omega t) = 0 \quad (215)$$

La solution de l'équation (215) est donnée par :

$$\tan(\omega t - C) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2Re}} \left(\frac{R}{r}\right)^2} \quad (216)$$

La résolution directe de l'équation (216) s'avère difficile, ce qui à nécessiter l'utilisation du logiciel Matlab.

Pour les grandes fréquences, Richardson a montré par des mesures expérimentales que le maximum de la vitesse se situe au voisinage de la paroi, l'équation (216) devient dans ce cas :

$$\tang(\omega t - C) = 1 \quad (217)$$

D'où : $(\omega t - C) = \pi/4$

En utilisant cette approximation et compte tenue de la symétrie de la vitesse par rapport à la demi période (voir l'équation (210) , $W(r, \omega t + \pi) = -W(r, \omega t)$), la solution de l'équation (216) est cherchée dans l'intervalle $\omega t \in [0, \pi/2]$, ce qui permet d'avoir l'expression de la position radiale adimensionnelle comme suit :

$$C = \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \sqrt{\frac{Re_w}{2}}$$

$$\omega t - C = \frac{\pi}{4} \rightarrow C = \omega t - \frac{\pi}{4}$$

$$C = \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \sqrt{\frac{Re_w}{2}}$$

D'où :

$$\frac{r}{R} = \sqrt{1 - \frac{2 \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2 Re_w}}} \quad \text{avec : } 0 < \omega t < \pi. \quad (218)$$

Les résultats avec et sans approximations pour différentes fréquences et différentes valeurs de phases (0, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$ et π) sont donnés par le tableau (1).

L'analyse de ce tableau montre que l'approximation des grandes fréquences pour le calcul de la position radiale du maximum de la vitesse, est valable que pour les fréquences supérieures à la fréquence critique correspond à $Re_{\omega c} = 128$, quel que soit la phase, alors que certains auteurs, ont indiqué que le début de l'influence de la fréquence commence à partir de la valeur $Re_{\omega c} = 16$. A notre avis cette valeur ne correspond que pour le début de l'influence de la fréquence sur l'écoulement.

On note un écart important qui peut atteindre 16% entre les valeurs des positions du maximum de la vitesse calculé et approximé pour les faibles fréquences et surtout pour les grandes phases, contrairement aux grandes fréquences les positions dans les deux solutions sont presque confondues quel que soit la phase. Pour cela, l'utilisation de la formule donnée par l'équation (216) n'est valable que pour les nombres de Reynolds cinétique supérieur à 256.

Re _ω	ωt = 0		ωt = π/4		ωt = π/2		ωt = 3π/2		ωt = π	
	a	b	a	b	A	b	a	b	a	b
50	0.83	0,84	0.61	0,70	0.24	0,56	*	0,40*	*	0,24*
100	0.88	0,88	0.75	0,77	0.58	0.66	0.33*	0.55	*	0,43*
128	0.90	0.89	0.78	.079	0.64	0.69	0.46	0.60	0.14*	0.50
200	0.92	0,92	0.83	0,90	0.73	0,76	0.61	0,69	0.46	0,60
256	0.93	0,93	0.85	0,86	0.76	0,79	0.67	0,72	0.55	0,65
500	0.95	0,95	0.90	0,89	0.84	0,85	0.78	0,80	0.71	0,75
1000	0.96	0,96	0.93	0,92	0.89	0,89	0.85	0,85	0.81	0,82
1500	0.97	0,97	0.94	0,94	0.91	0,91	0.88	0,89	0.84	0,86
2000	0.98	0,98	0.95	0,95	0.92	0,93	0.90	0,90	0.87	0,88

N :B (*) ; indiquent que la valeur calculée n'a pas de sens physique

(a) ; la solution avec l'approximation d'après R .Hadj Ali et A Ghezal.

(b) ; la solution sans l'approximation d'après Uchida.

Tableau2. Les positions du maximum de la vitesse pour différentes fréquences et différentes phases pour un écoulement unidimensionnel

On présente sur la figure (29) la variation de la position de maximum de la vitesse en fonction du nombre de Reynolds cinétique pour les différentes valeurs de phases (0, /4, /2, 3f/4 et). On note que le maximum du profil de vitesse s'approche de plus en plus de la paroi lorsque la fréquence augmente, confirmant ainsi les mesures expérimentales de Richardson.

A partir de certaines valeurs du nombre de Reynolds cinétique Re_{ξ} , la position correspondante au maximum de la vitesse tend asymptotiquement vers une valeur limite très proche de celle relative à la paroi. La valeur du Re_{ξ} est d'autant plus faible que la phase diminue.

Aux faibles valeurs de Re_{ξ} , la position de maximum varie notablement en fonction de la phase, alors que pour les grandes fréquences, cette variation n'est pas très grande.

Concernant la phase, le maximum de la vitesse s'éloigne de la paroi lorsque la phase augmente, et on note que la position de maximum peut atteindre une distance de $0.6R$ de la paroi pour les grandes phases, contrairement à la phase nulle, cette position est très proche de la paroi et varie de $0.88R$ à $0.98R$, ce qui montre que l'effet dit annulaire ou de Richardson ne dépend pas seulement de la fréquence mais aussi de la phase.

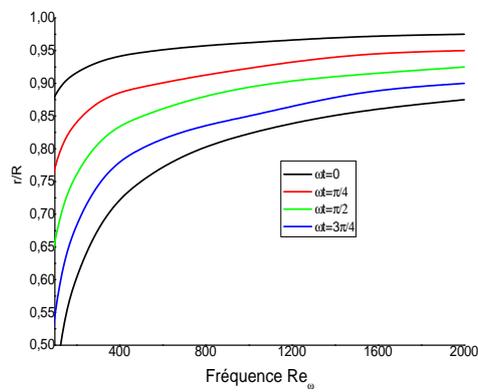
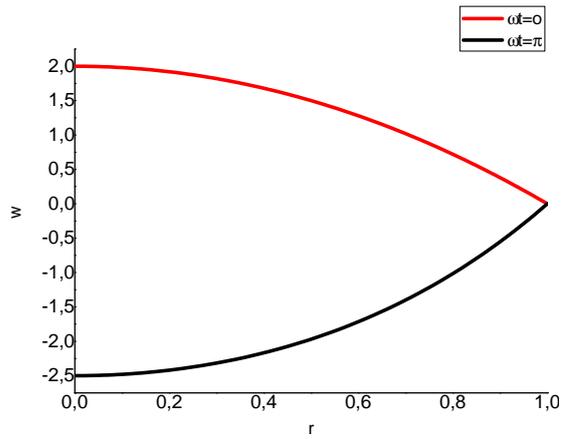
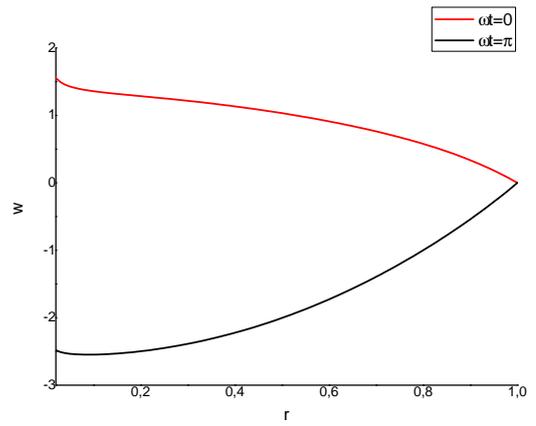


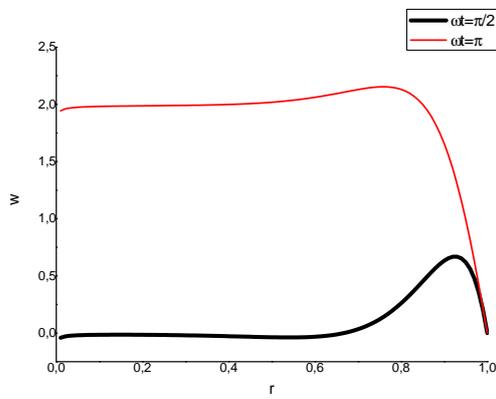
Fig29 : La position du maximum de la vitesse en fonction de la fréquence et de la phase pour un écoulement unidimensionnel



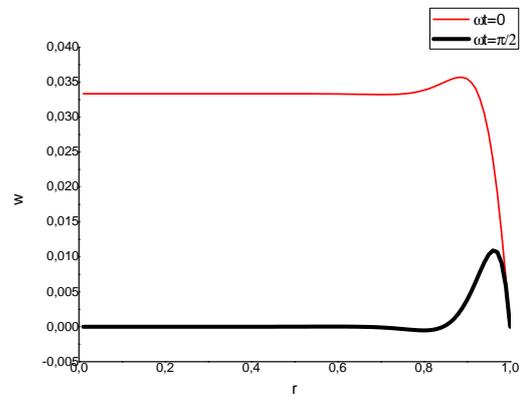
$Re_w = 16$



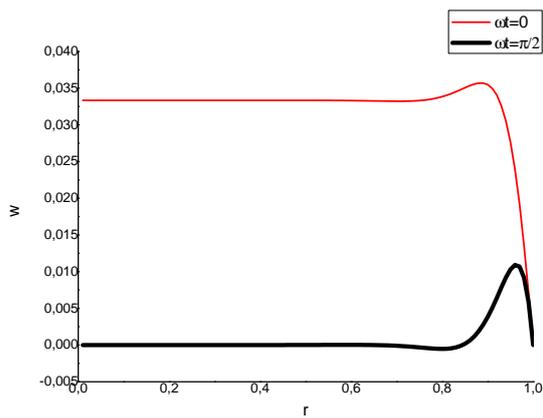
$Re_w = 32$



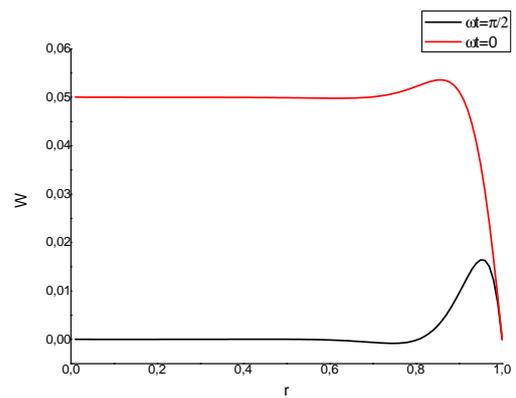
$Re_w = 256$



$Re_w = 320$



$Re_w = 640$



$Re_w = 960$

Fig. 30: Profil radial de la vitesse en fonction de la phase et pour différentes valeurs de la fréquence

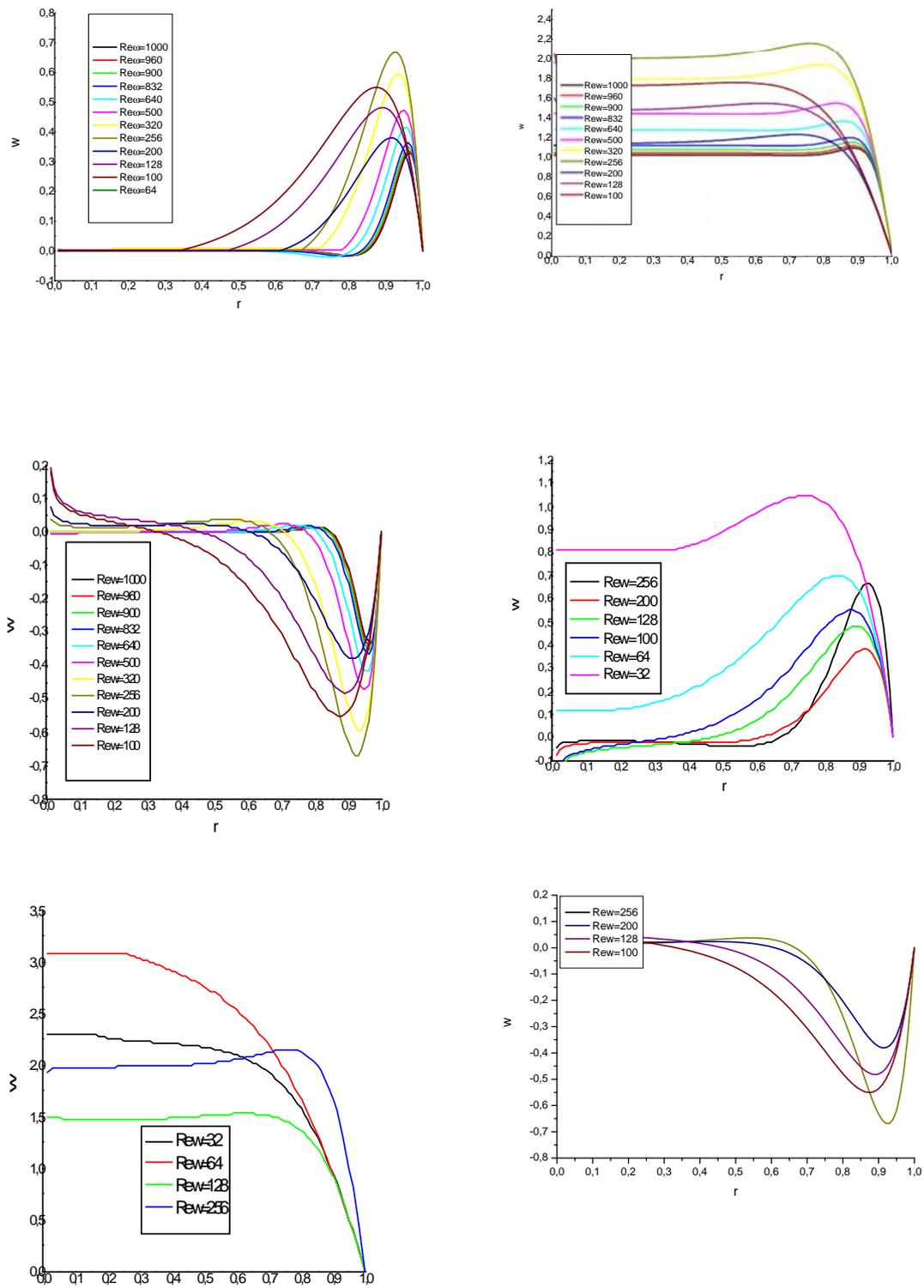


Fig 30: Profil radial de la vitesse pour différentes valeurs de la fréquence à différentes phases.

Influence de la fréquence sur le coefficient de frottement

La figure ((Fig30) montre que le coefficient de frottement, pour différentes fréquences varie périodiquement de la même manière que l'écoulement, Mais avec un déphasage qui augmente avec la fréquence. On constate aussi que l'augmentation de la fréquence fait accroître les maxima du coefficient de frottement et déforme légèrement la forme sinusoïdale surtout pour des fréquences $Re_w > 400$. La figure ((Fig30) montre que l'amplitude maximale du coefficient de frottement augmente avec la fréquence jusqu'à atteint environ 10 fois sa valeur dans le cas d'écoulement permanent. Ces résultats concordent avec ceux obtenus par les auteurs déjà cités. Néanmoins on note une légère augmentation dans la zone d'entrée, cela peut se justifier par la contribution de la deuxième composante de la vitesse pour les faibles fréquences. Aux basses fréquences $Re_s < 100$, le taux d'augmentation C_f/C_{fm} est de l'ordre 1 ce qui correspond au cas d'écoulement stationnaire, on constate que l'effet de la fréquence sur C_f/C_{fm} commence à partir des fréquences [100-150] qui correspondent au début de l'effet annulaire.

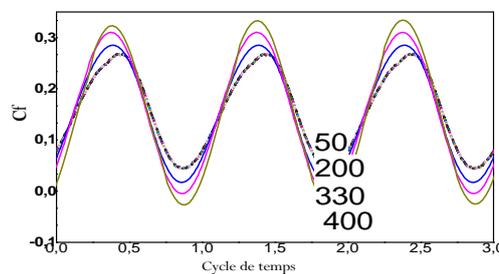


Fig30: Evolution du coefficient de frottement en fonction de la fréquence

Etude du déphasage et le plan de phase

On sait que le plan de phase, le déphasage entre les paramètres de l'écoulement est déterminé directement à partir de l'aplatissement des ellipses.

Pour analyser l'influence de la fréquence sur les ellipses, on a fixé $Re=100$ et $A_w=0.5$ et on fait varier Re_ω de 1 à 800. On signale que le tracé d'une ellipse pour un cycle nécessite un nombre de points qui est fonction de la fréquence. A titre d'exemple pour $Re_s=1$, le nombre de point est de 40192.

Représentation de la trajectoire de la vitesse et du gradient de pression

On remarque sur la figure ((Fig.31) que la trajectoire dans le plan de phase de la vitesse et du gradient de pression est une ellipse, ce qui confirme les résultats théoriques et numériques trouvées par Yakhot (1999) représentés dans la figure ((Fig.31a). Toutefois, on signale certaines différences comme la symétrie dans un cycle trouvée par Yakhot (1999) et non trouvée dans notre cas pour la phase décroissante de l'écoulement et aussi l'inexistence de la rotation des axes principaux pour les différentes ellipses pour Yakhot (1999). A notre avis ces différences avec l'étude Yakhot (1999) sont dues d'une part à l'hypothèse d'un écoulement unidimensionnel complètement développé et la prise en compte de nombre de Reynolds faible. Notre cas correspond à écoulement bidimensionnel à $Re=100$ et Re_s allant de 1 à 800 (Fig31b). On note aussi, que les fréquences utilisées par l'auteur sont équivalentes dans notre étude à la racine du nombre de Reynolds cinétique divisé par deux. On remarque que le cas correspond à $Re_s = 1$ donne une ellipse presque totalement aplati totalement et confondue avec la droite représentant la première bissectrice. Ce qui conduit à un angle de déphasage presque nul dans ce cas.

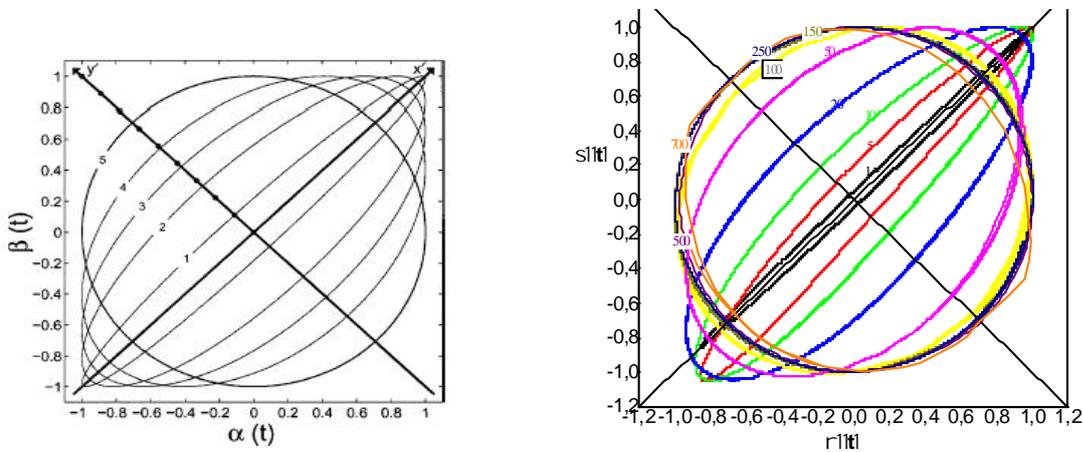


Fig31: Représentation dans le plan de phase de la trajectoire $(W, \frac{\partial P}{\partial z})$ pour différentes valeurs de

Re_s : (a) résultats de Yakhot. (b) R Hadj Ali et A Ghezal 2006

La figure ((Fig.31a), montre que pour les basses fréquences, les ellipses obtenues pour différents cycles de temps relatives à une fréquence donnée sont confondues les unes sur les autres et donnent l'impression de l'existence d'une seule ellipse ce qui correspond au domaine temporelle à un comportement périodique homogène des fluctuations pour toutes les cycles .Contrairement aux hautes fréquences et à partir du nombre de Reynolds cinétique $Re_s = 500$, les ellipses tracées pour différents cycles commencent à se détacher les unes des autres de plus en plus et se déformer pour les très grandes fréquences, ce qui peut expliquer par la déformation des fluctuation dans le domaine temporelle. Dans ce cas, la détermination du déphasage ne pourra pas s'effectuer correctement.

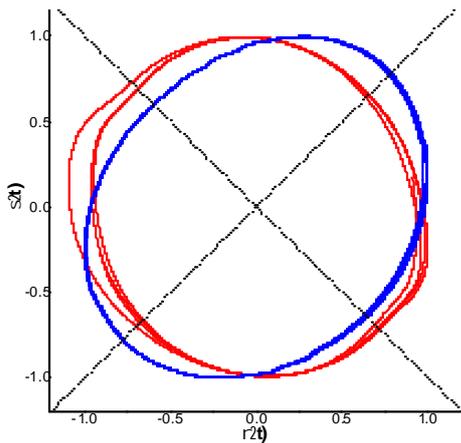


Fig. 32.a : Les trajectoires $(W, \partial P / \partial z)$; bleu $Re \omega = 100$, rouge $Re \omega = 500$. R Hadj Ali et A Ghezal 2006

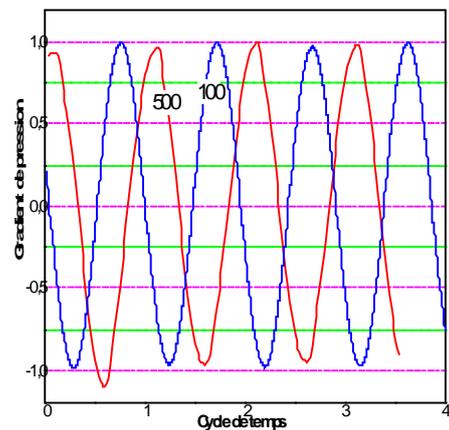


Fig. 32.b : l'évolution du gradient de la pression : bleu $Re \omega = 100$, rouge $Re \omega = 500$. R Hadj Ali et A Ghezal 2006

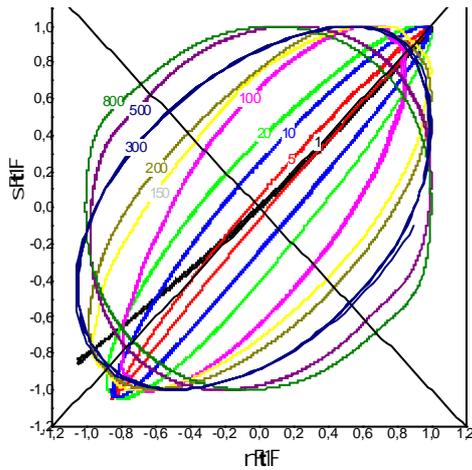


Fig. 33: Représentation dans le plan de phase de trajectoire (W, C_f) pour les valeurs de $Re\check{S}$ 1,5, 10, 20, 100, 150, 200, 500 et 800. R Hadj Ali et A. Ghezal 2006

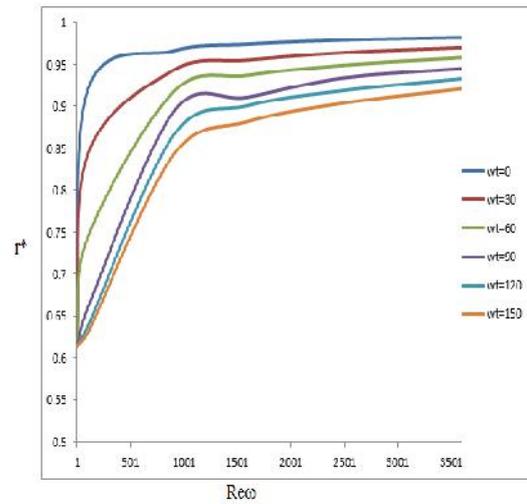


Figure 34. La position du maximum de vitesse en fonction de la fréquence et de la phase pour un écoulement dans un espace annulaire. M.Deghmoum 2009

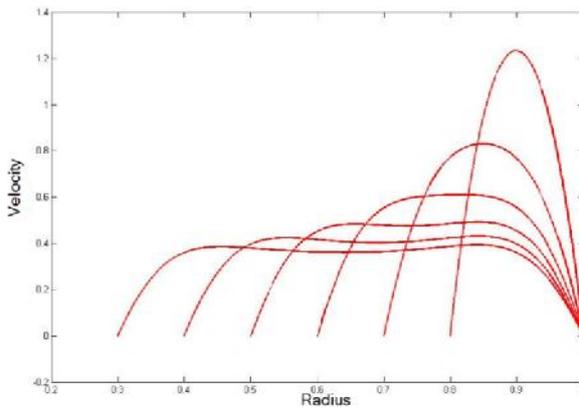


Fig35 :Influence de l'espace annulaire sur le profil de la vitesse $Re\omega=20, wt=30^\circ$. M.Deghmoum2009

Espace annulaire	Position du maximum de la vitesse	Pourcentage%
0.3	0.455	22.14
0.4	0.551	25.17
0.5	0.663	32.6
0.6	0.791	47.75
0.7	0.849	49.66
0.8	0.900	50.00

Table1: Position du maximum de la vitesse pour $Re\omega=20, wt=30^\circ$.M.Deghmoum2009

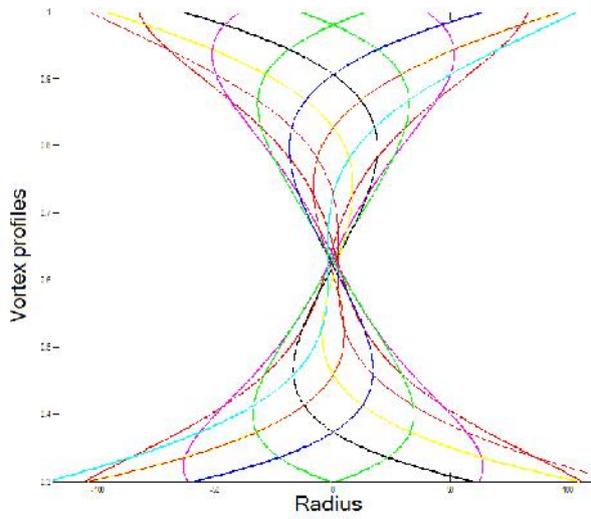


Figure36a: Profil de la vorticité pour $Re=10$ obtenu par M Deghmoum. 2009

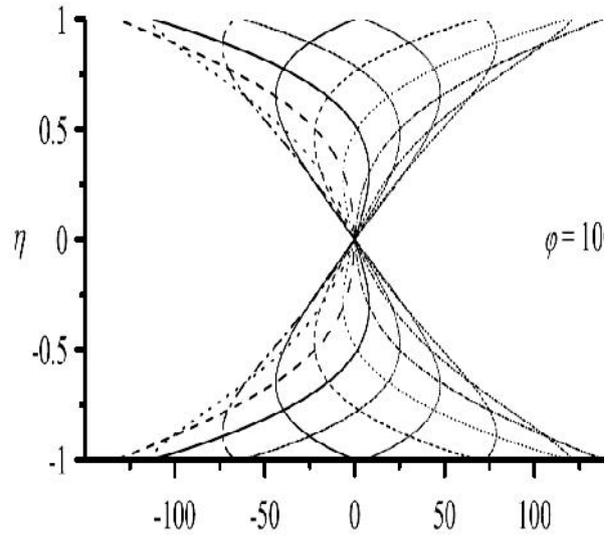


Figure36b: Profil de la vorticité pour $Re =10$ obtenu par Majdalani et al. (2008).

REFERENCES:

- [1] **E.G.Richardson, E.Tyler**, " The transverse velocity gradient near the mouths of pipes in which an alternating or continuous flow of air is established ". Proc. Phy. Soc. London 42 (1929) 1-15.
- [2] **J.R.Womersley**, " Oscillatory motion of viscous liquid in a thin-walled elastic tube-1:
The linear approximation for long waves ", Phil .Mag, 46(7) (1955) 199-221
- [3] **S.Uchida**, " The pulsating viscous flow superposed on the steady laminar motion, ZAMP, 17 (1956) 403-422.
- [4] **R.Seigel, M.Perlmutter**, "Heat transfer for pulsating laminar duct flow", Transactions of the ASME Journal of Heat Transfer, 84(1962) 111-123.
- [5] **H.B.Atabec, C.C.Cheng** , " Oscillatory flow near the entry of a circular tube", ZAMP
12 (1961) 185-201.
- [6] Majdalani. J (2008). Exact Navier–stokes solution for pulsatory viscous channel Flow with arbitrary pressure gradient, journal of propulsion and power .24:6
- [7] **P.Andre , R.Creff**, " Etude des conditions particulières de fréquence favorisant les transferts thermiques en écoulements pulsés en canalisation cylindrique ", Int. J. Heat Mass Transfer, 24 (7) (1981) 1211-1219.
- [8] **W.L.Cooper, V.W.Nee, K.T.Yang** , " An experimental investigation of convective heat transfer from the heated floor of rectangular duct to a low frequency large tidal displacement oscillating flow", Int. J. Heat Mass Transfer 37(4) (1994) 581-592.
- [9] SERT ET BESKOK. NUMERICAL SIMULATION OF RECIPROCATING FLOW FORCED CONVECTION IN TWO-DIMENSIONAL CHANNELS *J. HEAT TRANSFER* 125(3), 403-412 (MAY 20, 2003)
- [10] **M.A.HABIB, A.M.ATTYA, A .EID, A.Z.ALY**," CONVECTIVE HEAT TRANSFER CHARACTERISTICS OF A LAMINAR PULSATING PIPE AIR FLOW", INT.J.HEAT MASS TRANSFER, 38(3) (2002).
- [11] **P. Bouvier**, "Transferts thermiques en écoulement oscillant dans une conduite cylindrique", Thèse de doctorat, université de Nantes, 2000.
- [12] Yakhot A, Grinberg L. Phase shift ellipses for pulsating flows *Physics of Fluids*. Vol 15, Number 7. July 2003
- [13] **T.S.Zhao, P.Cheng**, " A numerical solution of laminar forced convection in a heated pipe subjected to a reciprocating flow". Int.J.Heat Mass Transfer 38(16)(1995) 3011-3022.

[14] **T.S.Zhao, P.Cheng**, ” Oscillatory heat transfer in a pipe subjected a periodically reversing flow”, J. of Heat Transfer, 118 (1996) 592-598

[15] T.W. Simon and J.R. Seume (1988). A survey of oscillating flow in stirling engine heat exchangers. NASA Report 182108.

[16] **D.Gedeon**, ” Mean-parameter modeling of oscillating flow ”, J. of Heat Transfer 108 (1986) 513-518.

[17] **T.Moschandreou, M.Zamir**, ” Heat transfer in a tube with pulsating flow and constant heat flux ”, Int.J.Heat Mass Transfer, 40(10) (1997) 2461-2466.

[18] **Z. Guo,H.J.Sung**, ” Analysis of the Nusselt number in pulsating pipe flow “, IntJ.Heat Mass Transfer, 40(10) (1997) 2486-2489.

[19] Hadj Ali. ” Contribution à l’étude dynamique et thermique d’un écoulement pulsé dans une conduite horizontale en présence d’un obstacle cylindrique chauffé ”, thèse de Magister, université de USTHB, 2006.

[20] Ghezal. A Modélisation numérique de l’écoulement confiné d’un fluide réel autour d’un obstacle chauffé en mouvement. Thèse de doctorat d’état en physique. (2007). USTHB.

[21] Y.Benakcha Contribution a l’étude du transfert thermique entre un écoulement pulsé et un solide chauffé. Magister USTHB.2008.

[22] M Deghmoum. Etude analytique et numérique de l’influence de l’amplitude sur le transfert thermique dans un écoulement oscillatoire. Master UMBB.2009

[23] K.Belahda. Etude analytique et numérique du transfert de chaleur des écoulements pulsés dans une cavité rectangulaire. Magister USTHB.2011

EXERCICE 1 : On donne l'expression déterminant la position du maximum de la vitesse dans le cas d'un écoulement pulsé dans une conduite rectangulaire, en fonction de la fréquence et du rapport de pression comme suit :

$$y^* = 1 - \sqrt{\frac{2}{Re_w} \left(1 - \frac{5}{w} \right)}$$

- 1) Pour quelle valeur de φ cette expression est valable ?
- 2) Remplir le tableau suivant dans le cas : $\varphi = 100$.

1) $\frac{Re_w}{w}$	10	25	30	50	70	100	500	1000
y^*								

- 3) Tracer la courbe $y^* = f(Re_w)$
- 4) Dans le cas de grandes valeurs de φ , que devienne l'expression précédente ? Conclusion

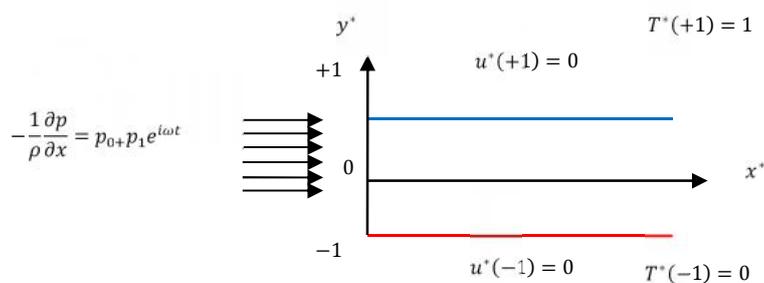
Exercice 2 : Considérons un écoulement dans une conduite rectangulaire de hauteur $h=2a$ (voir fig. ci-dessous), généré par un gradient de pression sinusoïdal de pulsation ω , dont l'expression est donnée par : $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = p_0 + p_1 e^{i\omega t}$. Les conditions aux limites de la température sur les parois de la conduite sont indiquées sur la figure, l'écoulement est supposé unidimensionnel et la dissipation visqueuse est négligée.

1. En utilisant les paramètres adimensionnels suivants:

$$x^* = \frac{x}{a}, y^* = \frac{y}{a}, u^* = \frac{u}{u_{moy}}, v^* = \frac{v}{u_{moy}}, t^* = \frac{t u_{moy}}{a}, T^* = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, Pr = \frac{\mu c_p}{k}, Re = \frac{\rho u_{moy} a}{\mu}$$

La vitesse adimensionnelle est exprimée comme suit :

$$u^*(y^*, t^*) = \frac{3}{2} (1 - y^{*2}) + 3i \frac{\varphi}{Re_\omega} \left[-1 + \frac{ch(y^* \sqrt{i Re_\omega})}{ch(\sqrt{i Re_\omega})} \right] e^{it^*}$$



1.1. Montrer que l'équation adimensionnelle de l'énergie pour l'écoulement laminaire incompressible s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re_p Pr} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

En supposant l'écoulement unidirectionnel et $\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \gamma$ et sachant que la température $T^*(y^*, t^*)$ peut se mettre sous la forme : $T^*(y^*, t^*) = f(y^*)e^{it^*}$

1.2. Trouvez l'expression du profil de température dans un ce cas.

EXERCICE 3: Le déphasage entre les différentes grandeurs dans un écoulement pulse est représenté dans les deux figures ci-dessous :

- 1) Déterminer le déphasage entre la vitesse, le coefficient de frottement et le gradient de pression à partir de la figure 1.
- 2) Expliquer comment est déterminée la phase à partir du plan de phase
- 3) Sachant que : $\tan(\alpha F) = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \cos(w)$.Déterminer la phase entre la vitesse et le gradient de pression pour les valeurs suivantes : $Re_\xi = 1, 250, 500, 880$
- 4) Tracer la courbe de la phase en fonction de Re_ξ
- 5) Déterminer de la courbe précédente la valeur de la phase pour $Re_\xi = 350$ et la comparer avec celle trouvée dans la question 1.

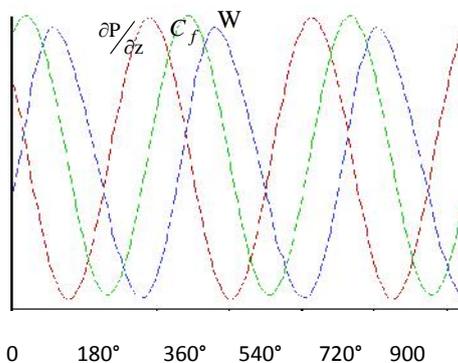


Fig.1: vitesse, le coefficient de frottement et gradient de pression pour $Re_\xi = 350$ et $A=0.5$

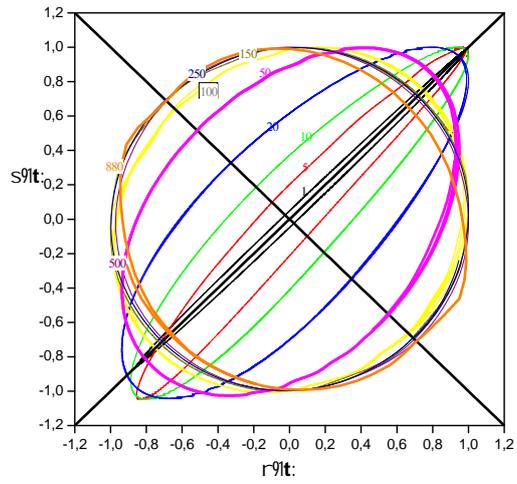


Fig. 2. : Trajectoire représentant le plan de phase entre la vitesse et le gradient de pression ($w, \frac{\partial P}{\partial z}$) pour différentes valeurs de $Re_{\xi} = 1,5,10,20,50,100,150,250,500,880$.

MASTER2 EMF

2° CONTROLE CONTINU

DUREE 45 Min

EXERCICE

L'équation de conservation de quantité de mouvement en coordonnées cylindrique s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial u(r, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} + \vartheta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} \right) \right]$$

En utilisant les paramètres adimensionnels suivants :

- $r^* = r/R$, le rayon adimensionnel;
- $x^* = x/R$, l'abscisse adimensionnelle;
- $t^* = \omega t$, le temps adimensionnel;
- $u^* = u/(R \omega)$, la vitesse adimensionnelle;
- $p^* = p/(\rho R^2 \omega^2)$, la pression adimensionnelle ;

1* Montrer que l'équation adimensionnelle de conservation de quantité de mouvement s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} = -\frac{\partial P^*}{\partial x^*} + \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \right]$$

Tel que : $\alpha = \left(\frac{\omega R^2}{\vartheta} \right)^{1/2}$

2* Sachant que la vitesse est de la forme $u(r, t) = \text{Re}\{f(r) \cdot e^{i\omega t}\}$ et donc $u^* = \tilde{f} \cdot e^{it^*}$, et que $\frac{\partial P^*}{\partial x^*} = -A \cdot e^{it^*}$ trouver alors l'équation différentielle du mouvement.

3* Donner la solution de cette équation différentielle.

4* Tracer qualitativement l'allure du profil radial de la vitesse pour :

a-Cas de faibles fréquences

b-Cas de grandes fréquences

Exercice 1

Le champ de vitesse d'un écoulement pulsé d'un fluide dans une longue conduite (avec une hauteur $h=2a$) peut être exprimé comme suit:

$$u^* = \frac{3}{2}(1-y^{*2}) + \frac{3i\zeta}{\text{Re}\zeta} \left[\frac{ch(y^* \sqrt{i\text{Re}\zeta})}{ch(\sqrt{i\text{Re}\zeta})} - 1 \right] e^{it^*}$$

Avec: $\zeta = \frac{P_1}{P_0}$ paramètres de pulsation (rapport de pression), $\text{Re}\zeta$ Nombre de Reynolds cinétique

- 1) Calculer le coefficient de frottement adimensionnel à la paroi, \dagger^*
- 2) Montrer qu'il peut se mettre sous la forme :

$$\dagger^*_{\text{normalisé}} = \frac{\dagger^*}{\dagger^*_s} = 1 - i \frac{\sqrt{i\text{Re}\zeta}}{\text{Re}\zeta} th(\sqrt{i\text{Re}\zeta}) e^{it^*}$$

- 3) Trouver sa valeur dans le cas de :
 - a) Ecoulement stationnaire
 - b) Faibles fréquences $\text{Re}\zeta \rightarrow 0$
 - c) Grandes fréquences $\text{Re}\zeta \rightarrow \infty$

Exercice 2

La détermination de la position du maximum de la vitesse d'un écoulement pulsé dans une conduite cylindrique de rayon R est donnée par la relation suivante :

$$\tan(t - C) = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}(1/y)^2}, \quad y = \frac{r}{R}$$

$$\text{Avec } C = (1 - (y)^2) \frac{\sqrt{\text{Re}}}{2\sqrt{2}}$$

- 1) Montrer que pour les grandes fréquences, l'expression précédente conduit à la relation suivante déterminant la position du maximum de la vitesse :

$$y = \sqrt{1 - \frac{2\sqrt{2}\left(\check{S}t - \frac{f}{4}\right)}{\sqrt{Re_s}}}, \quad \text{avec } 0 < \check{S}t < f.$$

2) Remplir le tableau ci-dessous

Re_s	$\check{S}t = 0$	$\check{S}t = f/3$	$\check{S}t = f/2$	$\check{S}t = 3f/4$	$\check{S}t = f$
128					
500					
1000					

3) Tracer les courbes $y = f(Re_s)$ pour chaque phase

4) Pour la valeur de la phase $\check{S}t = 0$, qu'elles conclusions vous tirez pour les valeurs de y dans les cas de faibles et grandes fréquences.

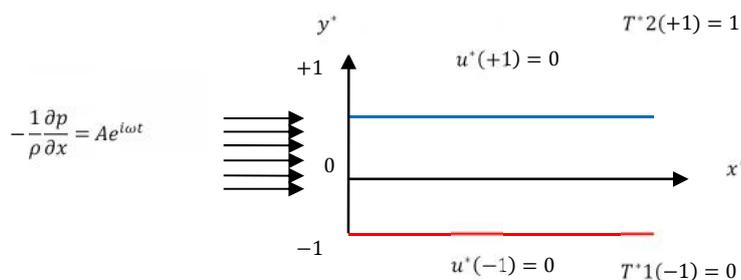
Exercice 3 : Considérons un écoulement dans une conduite rectangulaire de hauteur $h=2a$ (voir fig. ci-dessous), généré par un gradient de pression sinusoïdal, dont l'expression est donnée par : $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = Ae^{i\omega t}$. Les conditions aux limites de la température sur les parois de la conduite sont indiquées sur la figure, l'écoulement est supposé unidimensionnel et la dissipation visqueuse est négligée.

2. En utilisant les paramètres adimensionnels suivants:

$$x^* = \frac{x}{a}, y^* = \frac{y}{a}, u^* = \frac{u}{u_{moy}}, v^* = \frac{v}{u_{moy}}, t^* = \frac{tu_{moy}}{a}, T^* = \frac{T-T_1}{T_2-T_1}, p_r = \frac{\mu C_p}{k}, Re = \frac{\rho u_{moy} a}{\mu}$$

La vitesse adimensionnelle est exprimée comme suit :

$$u^*(y^*, t^*) = 3i \frac{A}{Re_\omega} \left[-1 + \frac{ch(y^* \sqrt{i Re_\omega})}{ch(\sqrt{i Re_\omega})} \right] e^{it^*}$$



Montrer que l'équation adimensionnelle de l'énergie pour l'écoulement laminaire incompressible s'écrit comme suit:

$$\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Re Pr} \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} \right)$$

En supposant l'écoulement est unidirectionnel et $\frac{\partial T^*}{\partial x^*} = \gamma$ et sachant que la température $T^*(y^*, t^*)$ peut se mettre sous la forme : $T^*(y^*, t^*) = f(y^*)e^{it^*}$

- 2 Trouvez l'expression du profil de température dans un ce cas.
- 3 Calculer le nombre de Nusselt à la paroi chaude.
- 4 Donner son expression dans le cas de faibles fréquences et le cas de grandes fréquences.

SOLUTIONS

EXERCICE 1 2013-2014

$$u^* = \frac{3}{2}(1-y^2) + 3i \frac{W}{k} \left[\frac{\cosh(y\sqrt{ik})}{\cosh\sqrt{ik}} - 1 \right] e^{iT}$$

$$\text{on a } \left. \frac{\partial u^*}{\partial y} \right|_{y=1} = -3 + 3i \frac{p_0}{k} \left[\frac{\sqrt{ik} \sinh(\sqrt{ik})}{\cosh\sqrt{ik}} - 1 \right] e^{iT} = -3 + 3i \frac{W\sqrt{ik}}{k} \tanh\sqrt{ik} e^{iT}$$

$$\sqrt{ik} = \frac{-1}{\sqrt{ik}}$$

Etude de cas limites

Pour $\zeta = 0$

1^{er} cas : faibles fréquences ($k \rightarrow 0$)

$$\Rightarrow \sinh\sqrt{ik} \approx \sqrt{ik} \quad , \text{ on a aussi } \cosh^2\sqrt{ik} \approx 1$$

$$\Rightarrow \left. \frac{\partial u^*}{\partial y} \right|_{y=1} \approx -3 + 3ip_0 \sqrt{ik} \sqrt{ik} = -3 - 3ip_0$$

$$\text{or } \dagger^* = \frac{-1}{3} \frac{\partial u^*}{\partial y} = 1 + iP_0$$

2^{ème} cas : grandes fréquences ($k \rightarrow \infty$)

$$\dagger^* = 1 + \frac{p_0}{\sqrt{ik}} \tanh\sqrt{ik} e^{iT}$$

$$k \rightarrow \infty \Rightarrow \dagger^* \rightarrow 1 - i \frac{p_0}{k} \sqrt{k} \sqrt{i} e^{iT} = 1 - i \frac{p_0}{k} \sqrt{k} \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) e^{iT}$$

$$= 1 + \frac{p_0}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{iT} - i \frac{p_0}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{iT}$$

$$|\ddagger^*|_{\max} = \left[\left(1 + \frac{p_0}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\tau} \right)^2 + \left(\frac{p_0}{\sqrt{k}} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\tau} \right)^2 \right]^{1/2}$$

on pose, $\ddagger^* = 1 + A_{\ddagger} e^{i(\xi_{\ddagger} + \tau_{\ddagger})}$

$$\text{avec } A_{\ddagger} = \left| \frac{P_0}{\sqrt{ik}} \tanh \sqrt{ik} \right| \text{ et } \xi = A \tan \left(\frac{\text{Im}}{\text{Re}} \right)$$

Recherche de la partie Imaginaire et la partie Réelle \ddagger^*

$$\text{On a } A_{\ddagger} = \frac{1}{\sqrt{ik}} \tanh \sqrt{ik} = \ddagger e^{i\xi}$$

$$\text{avec : } \ddagger = \frac{\sqrt{\sin^2 + \sinh^2} \sqrt{2k}}{(\cos \sqrt{2k} + \cosh \sqrt{2k}) \sqrt{2k}} \text{ et } \xi = \tan^{-1} \frac{\sin \sqrt{2k} - \sinh \sqrt{2k}}{\sin \sqrt{2k} - \sinh \sqrt{2k}}$$

$$\text{on a } \frac{1}{\sqrt{ik}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{k}} (1 - i)$$

$$\begin{aligned} \tanh \sqrt{ik} &= \frac{e^{\sqrt{ik}} - e^{-\sqrt{ik}}}{e^{\sqrt{ik}} + e^{-\sqrt{ik}}} = \frac{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{k}} - e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{k}}}{e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{k}} + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\sqrt{k}}} \\ &= \frac{\cos_{\text{h}}(e^{\cdot} - e^{-\cdot}) + i \sin_{\text{h}}(e^{\cdot} + e^{-\cdot})}{\cos_{\text{h}}(e^{\cdot} + e^{-\cdot}) + i \sin_{\text{h}}(e^{\cdot} - e^{-\cdot})} = \frac{\cos_{\text{h}} 2sh_{\text{h}} + i \sin_{\text{h}} 2ch_{\text{h}}}{\cos_{\text{h}} 2 \cosh_{\text{h}} + i \sin_{\text{h}} 2sh_{\text{h}}} \end{aligned}$$

En utilisant $\cos^2_{\text{h}} + \sin^2_{\text{h}} = 1$ et $ch^2_{\text{h}} - sh^2_{\text{h}} = 1$

$$|\text{tgh} \sqrt{ik}| = \frac{\sqrt{\sin^2 \frac{\sqrt{2k}}{2} + sh^2 \frac{\sqrt{2k}}{2}}}{ch \frac{\sqrt{2k}}{2}}$$

ANNEXE :2

RAPPELS MATHÉMATIQUES

A) FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Définitions :

$$\operatorname{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{coth}(x) = \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Courbes :

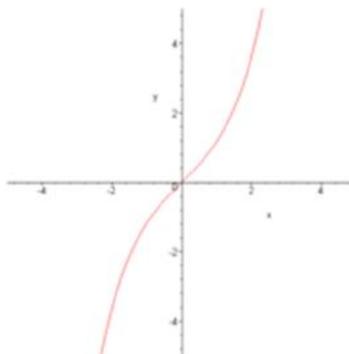


Figure 1 $\operatorname{sh}(x)$

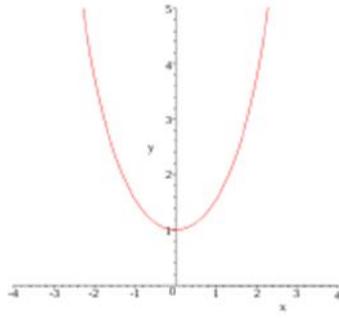


Figure 2ch(x)

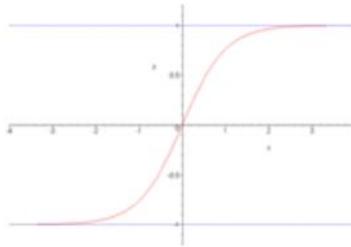


Figure 3th(x)

Valeurs particulières

x	0		+ ∞
ch x	1	→	+ ∞
sh x	0	→	+ ∞
th x	0	→	+1
coth x	+ ∞	→	+1

Forme exponentielle :

$$e^{+x} = \text{ch}(x) + \text{sh}(x)$$

$$e^{-x} = \text{ch}(x) - \text{sh}(x)$$

Relations remarquables :

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\operatorname{sh}(x + y) = \operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(y)$$

$$\operatorname{ch}(x + y) = \operatorname{ch}(x) \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x) \operatorname{sh}(y)$$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x) + 1}{2}}$$

$$\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{2}}$$

$$1 - \operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$$

$$\operatorname{th}(x + y) = \frac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1 + \operatorname{th}(x) \operatorname{th}(y)}$$

$$\operatorname{th}\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\operatorname{ch}(x) - 1}{\operatorname{ch}(x) + 1}}$$

$$\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x)$$

$$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2(x) + \operatorname{sh}^2(x) = 1 + 2 \operatorname{sh}^2(x) = 2 \operatorname{ch}^2(x) - 1$$

$$\operatorname{th}(2x) = \frac{2 \operatorname{th}(x)}{\operatorname{th}^2(x) + 1}$$

Relation entre les fonctions trigonométriques et hyperboliques :

$$\cos(x) = \operatorname{ch}(ix)$$

$$\operatorname{sh}(x) = -i \sin(ix)$$

B) Rappel sur les fonctions et les équations de Bessel

L'astronome Allemand **F. W. BESSEL** (1784-1846) est connu pour ces travaux sur les

équations différentielles qui portent son nom et sur la première étude systématique des solutions générales de cette équation. Les fonctions de Bessel sont associées à des problèmes possédant une symétrie cylindrique ou sphérique.

Elles interviennent par exemple dans l'étude des vibrations d'une membrane circulaire, dans la propagation de la lumière dans une fibre optique cylindrique, dans la distribution de la température dans un cylindre circulaire et dans d'autres domaines de l'ingénierie et de la physique. C'est pour cette raison qu'elles sont également appelées 'fonctions cylindriques'.

1. Fonctions de Bessel :

Les fonctions de **Bessel** sont solutions de l'équation différentielle linéaire de second ordre :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \hat{\nu}^2)y = 0 \quad (\text{B.1})$$

Où $y = f(x)$ et $\hat{\nu}$ un réel positif qui porte le nom d'équation différentielle de **Bessel** d'ordre $\hat{\nu}$.

- Pour des valeurs de $\hat{\nu}$ non entières, une solution possible de l'équation de Bessel est de la forme suivante :

$$y(x) = AJ_{\hat{\nu}}(x) + BJ_{-\hat{\nu}}(x)$$

Où :

$$J_{\hat{\nu}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+\hat{\nu}}}{k! \Gamma(k + \hat{\nu} + 1)} \quad (\text{B.2})$$

$$J_{-\hat{\nu}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-\hat{\nu}}}{k! \Gamma(k - \hat{\nu} + 1)} \quad (\text{B.3})$$

$J_{\hat{\nu}}(x)$ est une fonction de Bessel de première espèce et d'ordre $\hat{\nu}$ et $\Gamma(k + \hat{\nu} + 1)$ est la fonction gamma définie comme suit :

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

- Pour $\hat{n} = n$ (entier), les deux solutions données aux équations (A.2) et (A.3) ne sont plus indépendantes l'une de l'autre. Elles obéissent alors à la relation suivante :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad \text{pour } n=0,1,2,\dots \quad (\text{B.4})$$

Où :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!} \quad (\text{B.5})$$

Une autre solution possible pour l'équation (A.1) (**équation du second ordre**), qui est également valide lorsque \hat{n} est un entier et on a :

$$y(x) = AJ_{\hat{n}}(x) + BN_{\hat{n}}(x) \quad (\text{B.6})$$

$N_{\hat{n}}(x)$ est appelé la fonction de **Neumann** d'ordre \hat{n} (ou aussi la fonction de **Bessel** de deuxième espèce).

Notons que plusieurs auteurs utilisent la désignation $Y_{\hat{n}}(x)$ au lieu de $N_{\hat{n}}(x)$. Cette fonction est définie comme suit :

$$N_{\hat{n}}(x) = \frac{\cos(\hat{f})J_{\hat{n}}(x) - J_{-\hat{n}}(x)}{\sin(\hat{f})}$$

Ou bien :

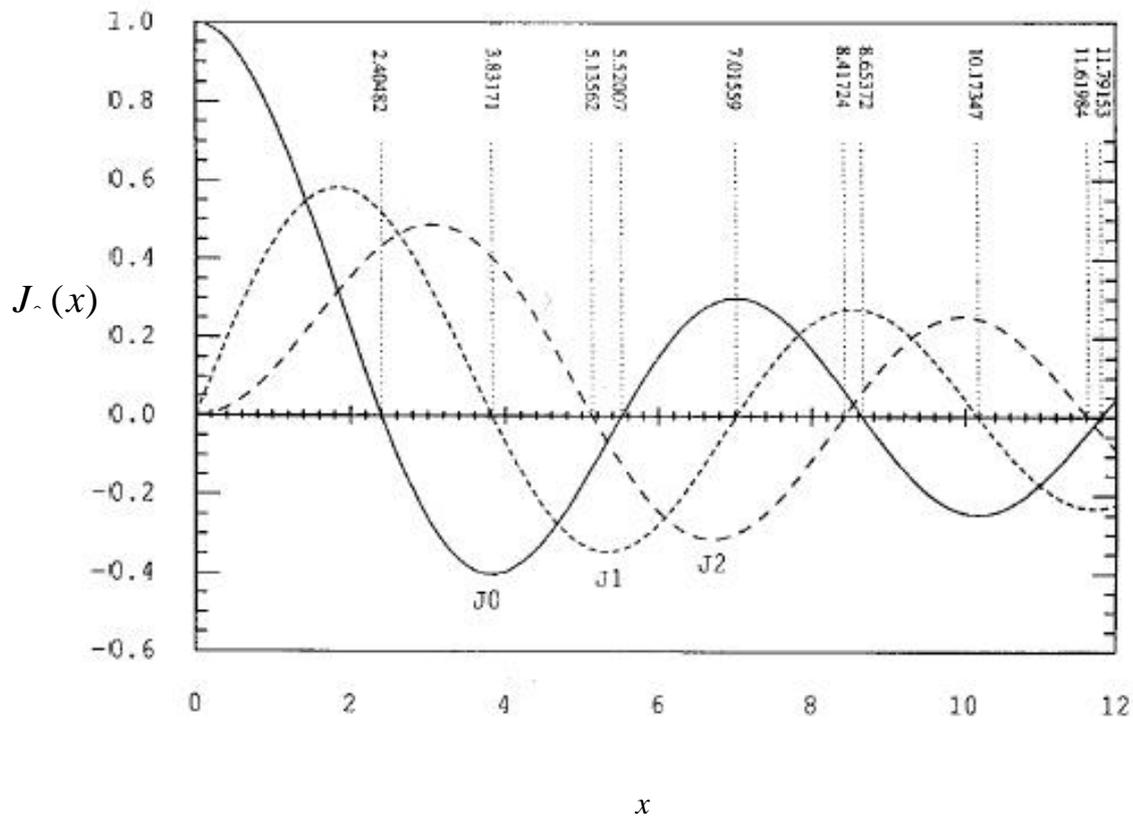
$$N_{\hat{n}}(x) = \frac{1}{f} \left[2 \log \frac{x}{2} + 2(0,5772) \right] - \sum_{k=1}^{\hat{n}} \frac{1}{k} J_{\hat{n}}(x) - \frac{1}{f} \sum_{k=0}^{\hat{n}-1} \frac{(\hat{n}-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2} \right) -$$

$$\frac{1}{f} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\hat{\nu})!} \left\{ \sum_{\dagger=1}^k \left(\frac{1}{\dagger} + \frac{1}{\hat{\nu}+\dagger} \right) \right\} \frac{x^{\hat{\nu}+2k}}{2} \quad (\text{B.7})$$

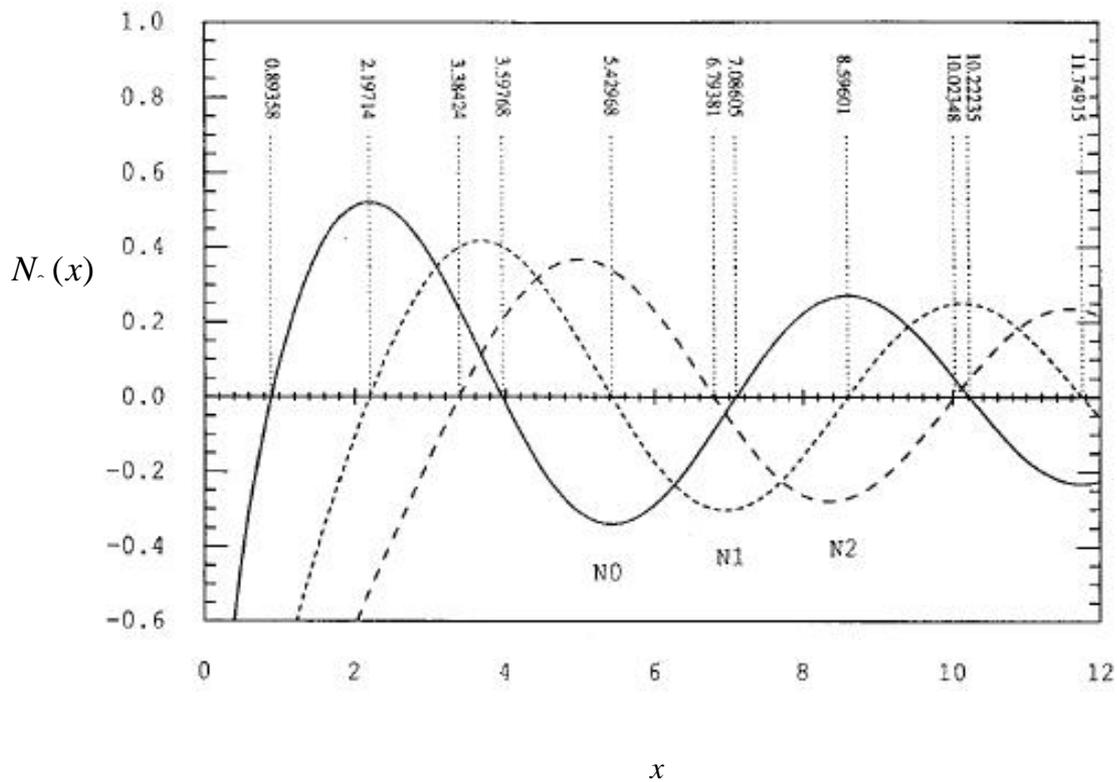
Les graphiques de quelques-unes de ces fonctions sont présentés aux figures **B.1** et **B.2**.

La fonction $N_{\nu}(x)$ diverge pour $x = 0$. Pour cette raison, elle n'est utilisée que dans les problèmes physiques où l'origine ($x = 0$) est exclue.

La fonction $J_{\nu}(x)$, quant à elle, présente un caractère oscillatoire et elle est continue.



figureA.1. Graphiques des fonctions de Bessel $J_{\nu}(x)$



figureA.2. Graphiques des fonctions de Neumann $N_n(x)$

2. Formule de Récurrence :

On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} [x^{\hat{\nu}} J_{\hat{\nu}}(x)] &= \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x)^{2k+2\hat{\nu}}}{2^{2k+\hat{\nu}} k! \Gamma(k+\hat{\nu}-1)} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 2(k+\hat{\nu})(x)^{2k+2\hat{\nu}-1}}{2^{2k+\hat{\nu}} k! \Gamma(k+\hat{\nu}+1)} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x)^{2k+2\hat{\nu}-1}}{2^{2k+\hat{\nu}-1} k! \Gamma(k+\hat{\nu})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{\hat{\nu}} (-1)^k (x/2)^{2k+(\hat{\nu}-1)}}{k! \Gamma(k+(\hat{\nu}-1)+1)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \frac{d}{dx} \left[x^{\hat{\nu}} J_{\hat{\nu}}(x) \right] = x^{\hat{\nu}} J_{\hat{\nu}-1}(x) \quad (\text{B.8})$$

De façon similaire, on peut déduire :

$$\frac{d}{dx} \left[x^{-\hat{\nu}} J_{\hat{\nu}}(x) \right] = x^{-\hat{\nu}} J_{\hat{\nu}+1}(x) \quad (\text{B.9})$$

Si l'on effectue la dérivation du membre de gauche de chacune des deux équations (B.8) et (A.9), on peut écrire que :

$$J'_{\hat{\nu}}(x) + \frac{\hat{\nu}}{x} J_{\hat{\nu}}(x) = J_{\hat{\nu}-1}(x) \quad \text{et} \quad J'_{\hat{\nu}}(x) - \frac{\hat{\nu}}{x} J_{\hat{\nu}}(x) = -J_{\hat{\nu}+1}(x)$$

Soit la relation :

$$2J'_{\hat{\nu}}(x) = J_{\hat{\nu}-1}(x) - J_{\hat{\nu}+1}(x) \quad (\text{B.10})$$

Et aussi :

$$\frac{2\hat{\nu}}{x} J_{\hat{\nu}}(x) = J_{\hat{\nu}-1}(x) + J_{\hat{\nu}+1}(x) \quad (\text{B.11})$$

De même on démontre et nous admettrons que :

$$\frac{d}{dx} \left[J_{\hat{\nu}}(kx) \right] = \frac{\hat{\nu}}{x} J_{\hat{\nu}}(kx) - kJ_{\hat{\nu}+1}(kx) \quad (\text{B.12})$$

Et aussi :

$$\frac{d}{dk} \left[J_{\hat{\nu}}(kx) \right] = \frac{\hat{\nu}}{k} J_{\hat{\nu}}(kx) - xJ_{\hat{\nu}+1}(kx) \quad (\text{B.13})$$

La fonction de **Bessel** de deuxième espèce $Y_{\hat{\nu}}(x)$ satisfait pleinement aux équations de Récurrences précédemment établies pour la fonction $J_{\hat{\nu}}(x)$.

3. Comportement asymptotique :

Nous pouvons approximer les fonctions $J_{\nu}(x)$ et $N_{\nu}(x)$ pour $x \gg 1$ et pour $\nu \neq 0$ par les expressions suivantes :

$$J_{\nu}(x) = \frac{x^{-\nu}}{2^{\nu} \Gamma(\nu + 1)} \quad (\text{B.14})$$

Et aussi :

$$N_{\nu}(x) = \frac{-2^{-\nu} \Gamma(\nu - 1)!}{f x^{\nu}}$$

Lorsque $\nu = 0$, on obtient :

$$J_0(x) = 1 \quad (\text{B.15})$$

$$N_0(x) = \frac{2(\ln x + c - \ln 2)}{f}$$

Nous pouvons facilement trouver le comportement asymptotique de ces fonctions pour des grands arguments. Par exemple, pour $\nu = 0$, l'équation de Bessel devient :

$$y'' + \frac{1}{x} y' + y = 0 \quad (\text{B.16})$$

En posant :

$y = x^{-1/2} f(x)$, l'équation (A.16) nous donne :

$$f'' + f \left(1 + \frac{1}{4x^2} \right) = 0 \quad (\text{B.17})$$

Qui a pour solution lorsque x tend vers l'infini.

$$f = C_0 \cos(x + \{)$$

C_0 et $\{$ sont des constantes, nous devons poser $\{ = -f/4$ pour que le comportement asymptotique ($x \rightarrow \infty$) épouse parfaitement la courbe de la fonction $J_0(x)$.

$$J_0(x) = \left(\frac{2}{fx} \right)^{1/2} \cos \left(x - \frac{f}{4} \right) \quad (\text{B.18})$$

Avec : $\{ = -3f/4$ pour $N_0(x)$.

$$N_0(x) = \left(\frac{2}{fx} \right)^{1/2} \sin \left(x - \frac{f}{4} \right) \quad (\text{B.19})$$

Pour \hat{f} quelconque, on a :

$$J_{\hat{f}}(x) = \left(\frac{2}{fx} \right)^{1/2} \cos \left(x - \frac{f}{4} - \frac{\hat{f}}{2} \right) \quad (\text{B.20})$$

$$N_n(x) = \left(\frac{2}{fx}\right)^{1/2} \sin\left(x - \frac{f}{4} - \frac{\hat{f}}{2}\right) \quad (\text{B.21})$$

Les fonctions de Bessel, de première et de deuxième espèce, se comportent comme des fonctions sinusoïdales, pour de grandes valeurs de leur argument. Elles représentent des ondes stationnaires cylindriques.

4. Développements en séries de puissance des fonctions de Bessel :

Les fonctions de **Bessel** d'indice entier se développent en séries de puissances de la façon suivante ([47] p.360) :

$$J_n(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!(n+k)!} \quad (\text{B.22})$$

Lorsque la valeur de x est petite, on déduit de (A.22), les développements limités suivants :

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + O(x)^8 \quad (\text{B.23})$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + O(x)^7 \quad (\text{B.24})$$

$$J_2(x) = \frac{x^2}{8} - \frac{x^4}{96} + \frac{x^6}{3072} + O(x)^8 \quad (\text{B.25})$$

$$J_3(x) = \frac{x^3}{48} - \frac{x^5}{768} + \frac{x^7}{15360} + O(x)^8 \quad (\text{B.26})$$

$$J_4(x) = \frac{x^4}{384} - \frac{x^6}{7680} + O(x)^8 \quad (\text{B.27})$$

$$J_5(x) = \frac{x^5}{3840} - \frac{x^7}{92160} + O(x)^8 \quad (\text{B.28})$$

Par ailleurs, les fonctions de **Neumann** se développent ainsi:

$$N_0(x) = \frac{2}{f} \left\{ \ln\left(\frac{x}{2}\right) + x \right\} J_0(x) + \frac{2}{f} \left\{ \frac{\frac{1}{4}x^2}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^3}{(3!)^2} - \dots \right\} \quad (\text{B.29})$$

$$N_{n \neq 0}(x) = -\frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{-n}}{f} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{1}{4}x^2\right)^k + \frac{2}{f} \ln\left(\frac{1}{2}x\right) J_n(x) - \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^n}{f} \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Psi(k+1) + \Psi(n+k+1) \right\} \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^k}{k!(n+k)!} \quad (\text{B.30})$$

Où $\Psi(n)$ est la fonction Psi, lorsque n est un entier, est définie par :

$$\Psi(1) = -\chi_e \quad \Psi(n)_{n \geq 2} = -\chi_e + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1} \quad (\text{B.31})$$

et χ_e est la constante d'Euler qui vaut :

$$\chi_e = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{m} - \ln m \right] \quad (\text{B.32})$$

$$= 0,5772156649\dots$$

Il vient :

$$N_0(x) = \frac{2}{f}(x - \ln 2 + \ln x) + O(x)^2 \quad (\text{B.33})$$

$$N_1(x) = -\frac{2}{fx} + \frac{x}{f} \left[\frac{-1+2x}{2} - \ln 2 + \ln x \right] + O(x)^3 \quad (\text{B.34})$$

$$N_2(x) = -\frac{4}{fx^2} - \frac{1}{f} + O(x)^2 \quad (\text{B.35})$$

$$N_3(x) = -\frac{16}{fx^3} - \frac{2}{fx} - \frac{x}{4f} + O(x)^3 \quad (\text{B.36})$$

$$N_4(x) = -\frac{96}{fx^4} - \frac{8}{fx^2} - \frac{1}{2f} - \frac{x^2}{24f} + O(x)^4 \quad (\text{B.37})$$

$$N_5(x) = -\frac{768}{fx^5} - \frac{48}{fx^3} - \frac{2}{fx} - \frac{x}{12f} + O(x)^4 \quad (\text{B.38})$$

5. Fonctions de Bessel modifiées :

En remplaçant x par jx , nous obtenons l'équation de Bessel modifiée que voici :

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \hat{\ }^2)y = 0 \quad (\text{B.39})$$

Pour des valeurs non-entières de $\hat{\ }$, une solution possible de l'équation suivante (A.39) est la suivante :

$$y(x) = AI_{\hat{\ }}(x) + BI_{-\hat{\ }}(x) \quad (\text{B.40})$$

Où :

$$I_{\hat{\nu}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+\hat{\nu}}}{k! \Gamma(\hat{\nu} + k + 1)} \quad (\text{B.41})$$

Pour des valeurs entières ($\hat{\nu} = n$), $I_{\hat{\nu}}$ et $I_{-\hat{\nu}}$ ne sont plus indépendantes ; elles sont reliées par :

$$I_n(x) = I_{-n}(x)$$

Une utilisation possible, dans ce cas est :

$$y(x) = AI_n(x) + BK_n(x) \quad (\text{B.42})$$

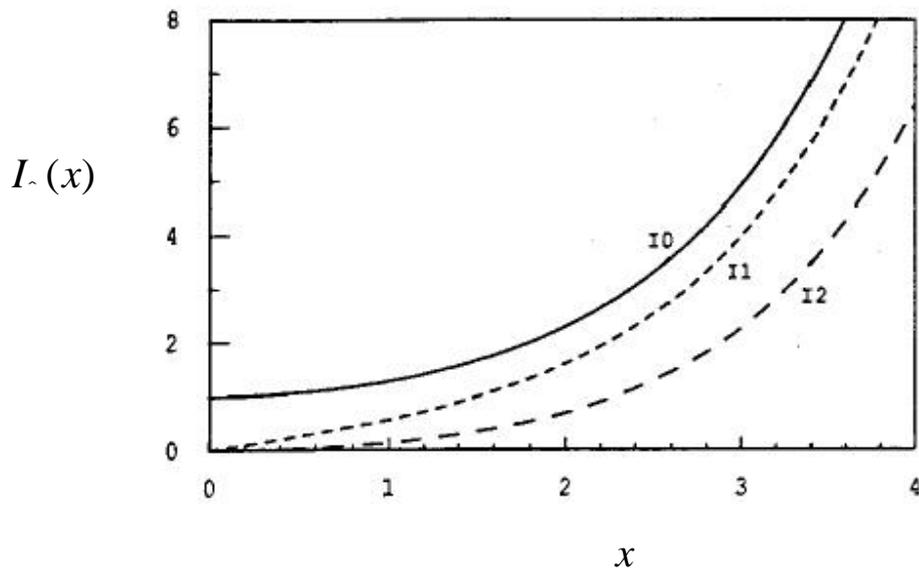
Où :

$$K_n(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x \right]^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(-\frac{1}{4} x^2 \right)^k + (-1)^{n+1} \ln \left(\frac{1}{2} x \right) I_n(x) \\ + (-1)^n \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x \right]^n \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Psi(k+1) + \Psi(n+k+1) \right\} \frac{\left(\frac{1}{4} x^2 \right)^k}{k!(n+k)!} \quad (\text{B.43})$$

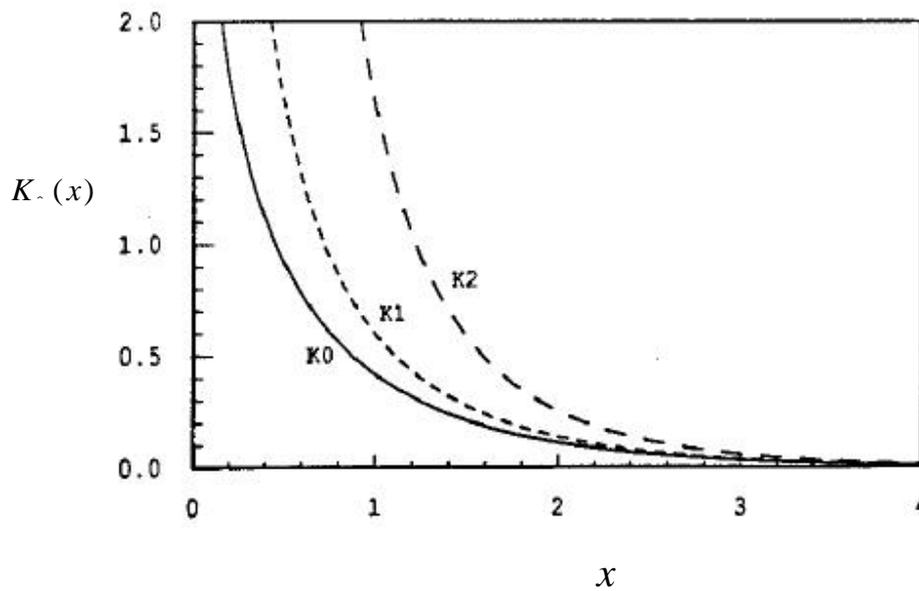
Les figures (A.3) et (A.4) illustrent quelques-unes de ces fonctions. Leurs comportements asymptotiques sont de forme :

$$I_{\hat{\nu}}(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2f x}} \quad (\text{B.44})$$

$$K_{\nu}(x) = \sqrt{\frac{f}{2x}} e^{-x} \quad (\text{B.45})$$



FigureA.3. Fonctions de Bessel modifiée $I_{\nu}(x)$



FigureA.4. Fonctions de Bessel modifiée $K_{\nu}(x)$

Les équations de Bessel modifiées se comportent pour de grandes valeurs de leur argument, comme des ondes évanescentes.

Les fonctions $I_\nu(x)$ et $K_\nu(x)$ sont reliées aux équations de Bessel par les équations suivantes :

$$I_\nu(jx) = e^{j\pi/2} J_\nu(x) \quad (\text{B.46})$$

$$K_\nu(jx) = \frac{j}{2} e^{-j(\nu+1)\pi/2} (J_\nu(x) - jN_\nu(x)) \quad (\text{B.47})$$

1) Propriétés des fonctions de Bessel.

1 Equations de Bessel et leurs solutions :

1ère équation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial y}{\partial x} + 4y = 0$$

Ou :

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + 4x^2 y = 0$$

Dont la solution est :

$$y = AJ_0(mx) + BY_0(mx)$$

2ème équation :

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - n^2)y = 0$$

Tel que n est un nombre entier, la solution est :

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x)$$

3ème équation :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial y}{\partial x} - m^2 y = 0$$

La solution est :

$$y = AI_0(mx) + BK_0(mx)$$

4^{ème} équation :

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} - (x^2 + n^2)y = 0$$

La solution est :

$$y = AI_n(x) + BK_n(x)$$

J_n Fonction de Bessel de première espèce d'ordre n.

Y_n Fonction de Bessel de seconde espèce d'ordre n.

I_n Fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre n.

K_n Fonction de Bessel modifiée de seconde espèce d'ordre n.

2 Propriétés des fonctions de Bessel :

2.1 La Fonction J_n :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \quad \text{Pour n entier}$$

$$J_0(0) = 1$$

$$J_1(0) = 0$$

2.2.2 La Fonction Y_n :

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \quad \text{Pour n entier}$$

$$Y_0(0) = -\infty$$

$$Y_1(0) = -\infty$$

2.3 Les formules de récurrence :

$$J_{n+1}(x) = -J_{n-1}(x) + \frac{2n}{x} J_n(x)$$

$$Y_{n+1}(x) = -Y_{n-1}(x) + \frac{2n}{x} Y_n(x)$$

$$I_{n+1}(x) = I_{n-1}(x) - \frac{2n}{x} I_n(x)$$

$$1 = I_0(x) - 2I_2(x) + 2I_4(x) - 2I_6(x) + \dots$$

$$\exp(x) = I_0(x) + 2I_1(x) + 2I_2(x) - 2I_3(x) + \dots$$

$$K_{n+1}(x) = K_{n-1}(x) + \frac{2n}{x} K_n(x)$$

2.3 Les Dérivées :

$$J'_n(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x} J_n(x) = -J_{n+1}(x) + \frac{n}{x} J_n(x)$$

$$Y'_n(x) = Y_{n-1}(x) - \frac{n}{x} Y_n(x) = -Y_{n+1}(x) - \frac{n}{x} Y_n(x)$$

$$I'_n(x) = I_{n-1}(x) - \frac{n}{x} I_n(x) = I_{n+1}(x) + \frac{n}{x} I_n(x)$$

$$K'_n(x) = -K_{n-1}(x) - \frac{n}{x} K_n(x) = -K_{n+1}(x) + \frac{n}{x} K_n(x)$$