

Série d'exercices sur Séries de FourierExercice 1 :

Soit f la fonction 2π -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 - x & \text{si } x \in]-\pi, 0[, \\ 1 - x & \text{si } x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

a) Représenter f sur 3 périodes.

b) Écrire la série de Fourier associée à f .

c) En déduire les sommes des séries numériques $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}$.

a) Écrire la série de Fourier associée à f .

b) En déduire les sommes des séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice 3 :

Développer en série de Fourier la fonction 2π -périodique, impaire, définie par

$$f(x) = x(\pi - x), \quad x \in [0, \pi].$$

En déduire les sommes des séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

Exercice 4 :

Déterminer le développement en série de Fourier pour la fonction f , 2π -périodique définie sur

$[-\pi, \pi]$ par $f(x) = e^{ax}$, $a \in \mathbb{R}$.

En déduire la valeur des sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.