U.S.T.H.B. 2013-2014 Semestre 1 | **Équations Différentielles**

Faculté de Mathématiques % **$3^{\text{ème}}$ année Licence Math**

Devoir n^{0}1 à remettre 21 novembre 2013

Nom :.. **Prénom :**..

Matricule :.. **Groupe :**..

==

Exercice :

On considère l'équation différentielle $y' = 1 + ty^3$.

a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale qui vérifie $y(0) = 0$.

b) Montrer que y est une fonction impaire.

c) Étudier le signe et la monotonie de y.

d) Donner les trois premières approximations successives en prenant $y(0) = 0$.

==

Réponse.

a) La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(t, y) = 1 + ty^3$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites (continuité en t et lipschitziennité locale en y).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ contenant 0.

b) Considérons la fonction définie sur $]-b, -a[$ par $z(t) = -y(-t)$.

On a $z'(t) = (-y(-t))' = y'(-t) = 1 + (-t)(y(-t))^3 = 1 + t(z(t))^3$ et $z(0) = -y(-0) = 0$.

On observe que z est solution du problème de Cauchy posé et est donc restriction de la solution maximale y. On en déduit $]-b, -a[\subset]a, b[$ donc $a = -b$ et $y(t) = z(t) = -y(-t)$ sur $]-b, b[$. Ceci montre que y est une fonction impaire.

c) On a $y'(0) = 1$ et $y(0) = 0$, la solution y est donc strictement positive sur un intervalle $]0, t_0[$. Si $t_0 < b$ avec $y(t_0) = 0$, alors d'après le théorème des accroissements finies, il existe $c \in]0, t_0[$ tel que $y'(c) = 1 + c(y(c))^3 = 0$ et donc $y(c) = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{c}} < 0$. Ceci contredit le fait que la fonction y est strictement positive sur $]0, t_0[$.

Alors, la solution y est strictement positive sur $]0, b[$. Comme elle est impaire, donc elle est strictement négative sur $]-b, 0[$. On en déduit que $y'(t) = 1 + t(y(t))^3 > 0$, la solution y est alors strictement croissante sur l'intervalle $]-b, b[$.

d) En utilisant la formule de la suite des approximations successives

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_0^t \left(1 + s\left(y_n(s)\right)^3\right) ds = \int_0^t \left(1 + s\left(y_n(s)\right)^3\right) ds,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= \int_0^t \left(1 + s\left(y_0(s)\right)^3\right) ds = \int_0^t 1 ds = t, \\
y_2(t) &= \int_0^t \left(1 + s(s)^3\right) ds = t + \frac{1}{5}t^5, \\
y_3(t) &= \int_0^t \left(1 + s\left(s + \frac{1}{5}s^5\right)^3\right) ds = t + \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{15}t^9 + \frac{3}{325}t^{13} + \frac{1}{2175}t^{17}.
\end{aligned}$$