

Devoir n°1 à remettre 21 novembre 2013

Nom : Prénom :

Matricule : Groupe :

Exercice :

On considère l'équation différentielle $y' = \frac{1}{1+ty}$.

a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale qui vérifie $y(0) = 0$.

b) Montrer que y est une fonction impaire.

c) Étudier le signe et la monotonie de y .

d) Donner les deux premières approximations successives en prenant $y(0) = 0$.

Réponse.

a) La fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, y), ty = -1\}$ par $f(t, y) = \frac{1}{1+ty}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Comme $(0, 0) \notin \{(t, y), ty = -1\}$, alors les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites (continuité en t et lipschitziennité locale en y).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ contenant 0.

b) Considérons la fonction définie sur $] -b, -a[$ par $z(t) = -y(-t)$.

On a $z'(t) = (-y(-t))' = y'(-t) = \frac{1}{1+(-t)y(-t)} = \frac{1}{1+tz(t)}$ et $z(0) = -y(-0) = 0$.

On observe que z est solution du problème de Cauchy posé et est donc restriction de la solution maximale y . On en déduit $] -b, -a[\subset]a, b[$ donc $a = -b$ et $y(t) = z(t) = -y(-t)$ sur $] -b, b[$. Ceci montre que y est une fonction impaire.

c) On a $y'(0) = 1$ et $y(0) = 0$, la solution y est donc strictement positive sur un intervalle $]0, t_0[$. Si $t_0 < b$ avec $y(t_0) = 0$, alors d'après le théorème des accroissements finies, il existe

$c \in]0, t_0[$ tel que $y'(c) = 0$. Ceci est impossible car $y'(c) = \frac{1}{1+cy(c)}$ qui ne s'annule pas.

Alors, la solution y est strictement positive sur $]0, b[$. Comme elle est impaire, donc elle est strictement négative sur $] -b, 0[$. On en déduit que $y'(t) = \frac{1}{1+ty(t)} > 0$, la solution y est alors strictement croissante sur l'intervalle $] -b, b[$.

d) En utilisant la formule de la suite des approximations successives

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_0^t \frac{1}{1 + sy_n(s)} ds = \int_0^t \frac{1}{1 + sy_n(s)} ds,$$

on obtient

$$y_1(t) = \int_0^t \frac{1}{1 + sy_0(s)} ds = \int_0^t \frac{1}{1 + 0} ds = t,$$
$$y_2(t) = \int_0^t \frac{1}{1 + s^2} ds = \text{Arctg } t.$$