U.S.T.H.B. 2013-2014 Semestre 1 **Équations Différentielles**

Faculté de Mathématiques # **3$^{\text{ème}}$ année Licence Math**

Devoir n^{0}1 à remettre 21 novembre 2013

Nom :.. **Prénom :**..

Matricule :.. **Groupe :**..

==

Exercice :

On considère l'équation différentielle $y' = 1 + t\sin y$.

a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale qui vérifie $y(0) = 0$.

b) Montrer que y est une fonction impaire.

c) Étudier le signe et la monotonie de y.

d) Donner les deux premières approximations successives en prenant $y(0) = 0$.

==

Réponse.

a) La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(t,y) = 1 + t\sin y$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites (continuité en t et lipschitziennité locale en y).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $I = \left]a,b\right[$ contenant 0.

b) Considérons la fonction définie sur $\left]-b,-a\right[$ par $z(t) = -y(-t)$.

On a $z'(t) = (-y(-t))' = y'(-t) = 1+(-t)\sin y(-t) = 1+t\sin(z(t))$ et $z(0) = -y(-0) = 0$. On observe que z est solution du problème de Cauchy posé et est donc restriction de la solution maximale y. On en déduit $\left]-b,-a\right[\subset \left]a,b\right[$ donc $a = -b$ et $y(t) = z(t) = -y(-t)$ sur $\left]-b,b\right[$. Ceci montre que y est une fonction impaire.

c) On a $y'(0) = 1$ et $y(0) = 0$, la solution y est donc strictement positive sur un intervalle $\left]0,t_0\right[$. Si $t_0 < b$ avec $y(t_0) = 0$ et $y(t) < 0$ à droite de t_0 dans un voisinage de t_0, alors $y'(t_0) = 1 + t_0\sin(y(t_0)) = 1$ et donc y est strictement positive sur $\left]t_0,t_1\right[$. Ceci contredit $y(t) < 0$ à droite de t_0.

Alors, la solution y est strictement positive sur $\left]0,b\right[$. Comme elle est impaire, donc elle est strictement négative sur $\left]-b,0\right[$. La solution y est strictement croissante au voisinage de 0 mais n'est pas sur l'intervalle $\left]-b,b\right[$ car $y' = 1 + t\sin y$ peut être s'annuler.

d) En utilisant la formule de la suite des approximations successives

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_0^t (1 + s\sin(y_n(s)))\, ds = \int_0^t (1 + s\sin(y_n(s)))\, ds,$$

on obtient

$$y_1(t) = \int_0^t (1 + s\sin(y_0(s)))\, ds = \int_0^t 1 ds = t,$$

$$y_2(t) = \int_0^t (1 + s\sin s)\, ds = t + \sin t - t\cos t.$$