

Devoir n°1 à remettre 21 novembre 2013

Nom : Prénom :

Matricule : Groupe :

Exercice :

On considère l'équation différentielle $y' = 2 + \cos y$.

a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale qui vérifie $y(0) = 0$.

b) Montrer que y est une fonction impaire.

c) Étudier le signe et la monotonie de y .

d) Donner les deux premières approximations successives en prenant $y(0) = 0$.

Réponse.

a) La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(t, y) = 2 + \cos y$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites (continuité en t et lipschitziennité locale en y).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ contenant 0.

b) Considérons la fonction définie sur $] -b, -a[$ par $z(t) = -y(-t)$.

On a $z'(t) = (-y(-t))' = y'(-t) = 2 + \cos(y(-t)) = 2 + \cos(z(t))$ et $z(0) = -y(-0) = 0$.

On observe que z est solution du problème de Cauchy posé et est donc restriction de la solution maximale y . On en déduit $] -b, -a[\subset]a, b[$ donc $a = -b$ et $y(t) = z(t) = -y(-t)$ sur $] -b, b[$. Ceci montre que y est une fonction impaire.

c) On a $y'(t) = 2 + \cos y(t) > 0$, la solution y est donc strictement croissante sur l'intervalle $] -b, b[$. Comme $y(0) = 0$, alors, la solution y est strictement positive sur $]0, b[$ et strictement négative sur $] -b, 0[$.

d) En utilisant la formule de la suite des approximations successives

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_0^t (2 + \cos(y_n(s))) ds = \int_0^t (2 + \cos(y_n(s))) ds,$$

on obtient

$$\begin{aligned}y_1(t) &= \int_0^t (2 + \cos(y_0(s))) \, ds = \int_0^t 3 \, ds = 3t, \\y_2(t) &= \int_0^t (2 + \cos(3t)) \, ds = 2t + \frac{1}{3} \sin(3t) .\end{aligned}$$