U.S.T.H.B. 2013-2014 Semestre 1 **Équations Différentielles**

Faculté de Mathématiques & **$3^{\text{ème}}$ année Licence Math**

Devoir $n^0 1$ à remettre 21 novembre 2013

Nom :.. **Prénom :**..

Matricule :.. **Groupe :**..

==

Exercice :

On considère l'équation différentielle $y' = 1 + \operatorname{Ch} y$.

a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale qui vérifie $y(0) = 0$.

b) Montrer que y est une fonction impaire.

c) Étudier le signe et la monotonie de y.

d) Donner les deux premières approximations successives en prenant $y(0) = 0$.

==

Réponse.

a) La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(t, y) = 1 + \operatorname{Ch} y$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites (continuité en t et lipschitziennité locale en y).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ contenant 0.

b) Considérons la fonction définie sur $]-b, -a[$ par $z(t) = -y(-t)$.

On a $z'(t) = (-y(-t))' = y'(-t) = 1 + \operatorname{Ch} y(-t) = 1 + \operatorname{Ch} z(t)$ et $z(0) = -y(-0) = 0$. On observe que z est solution du problème de Cauchy posé et est donc restriction de la solution maximale y. On en déduit $]-b, -a[\subset]a, b[$ donc $a = -b$ et $y(t) = z(t) = -y(-t)$ sur $]-b, b[$. Ceci montre que y est une fonction impaire.

c) On a $y'(t) = 1 + \operatorname{Ch} y(t) > 0$, la solution y est donc strictement croissante sur l'intervalle $]-b, b[$. Comme $y(0) = 0$, alors, la solution y est strictement positive sur $]0, b[$ et strictement négative sur $]-b, 0[$.

d) En utilisant la formule de la suite des approximations successives

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_0^t (1 + \operatorname{Ch} y_n(t))\, ds = \int_0^t (1 + \operatorname{Ch} y_n(t))\, ds,$$

on obtient

$$y_1(t) = \int_0^t (1 + \operatorname{Ch} y_0(t))\, ds = \int_0^t 2ds = 2t,$$
$$y_2(t) = \int_0^t (1 + \operatorname{Ch}(2t))\, ds = t + \frac{1}{2} \operatorname{Sh}(2t).$$