Test n^{0}1 - 5 décembre 2013. Durée : 30 minutes

Nom :.. **Prénom :**..

Matricule :.. **Groupe :**..

==

Exercice 1 :

a) Étudier la lipschitzienité locale de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(y) = 3\sqrt{|y|}$.

b) Vérifier que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = \begin{cases} \frac{9}{4}t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$

est solution de l'équation $y'(t) = 3\sqrt{|y(t)|}$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

c) Discuter le résultat.

==

Réponse.

a) Si $y > 0$, $f'(y) = \dfrac{3}{2\sqrt{y}}$ qu'est bornée dans un voisinage qui ne contient pas 0. De même pour $y < 0$, $f'(y) = \dfrac{-3}{2\sqrt{-y}}$. Alors f est localement lipschitzienne au voisinage de tout $y \neq 0$. Au voisinage de $y = 0$, la fonction f n'est pas localement lipschitzienne. En effet, pour $k > 0$, si on prend $y_1 = 0$ et $y_2 = \dfrac{4}{k^2}$ on aura

$$|f(y_2) - f(y_1)| = \left|3\sqrt{|y_2|} - 0\right| = \frac{6}{k} > k\left|\frac{4}{k^2} - 0\right| = k|y_2 - y_1|.$$

b) On a pour $t = 0$, $y(0) = \frac{9}{4}0^2 = 0$,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{9}{4}t^2 - 0}{t - 0} = 0 \text{ et } \lim_{t \to 0^-} \frac{y(t) - y(0)}{t - 0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{0 - 0}{t - 0} = 0,$$

alors

$$y'(t) = \begin{cases} \frac{9}{2}t & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3\sqrt{\left|\frac{9}{4}t^2\right|} & \text{si } t \geq 0 \\ \\ 3\sqrt{|0|} & \text{si } t < 0 \end{cases} = 3\sqrt{|y(t)|}.$$

Il vient que $y(t) = \begin{cases} \frac{9}{4}t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ est solution du problème $\begin{cases} y'(t) = 3\sqrt{|y(t)|} \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

c) On remarque que la fonction identiquement nulle $y \equiv 0$ est une autre solution de notre problème. Non unicité de la solution vient du fait que la fonction f n'est pas localement lipschitzienne au voisinage de $y = 0$.

==

Exercice 2 :

On considère l'équation différentielle $y' = t + y^2$.

a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale sur $]a, b[$ qui vérifie $y(0) = 0$.

b) Montrer que b est finie ($b < +\infty$).

c) On accepte que $\lim\limits_{t \to b^-} \int_\alpha^t y^2(s)\, ds = +\infty$, $\alpha > a$. En déduire que $\lim\limits_{t \to b^-} y(t) = +\infty$.

==

Réponse.

a) La fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(t, y) = t + y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$ car $\frac{\partial}{\partial t} f(t, y) = 1$ et $\frac{\partial}{\partial y} f(t, y) = 2y$ existent et continues sur $\mathbb{R}^2$. Alors les conditions du théorème de Cauchy-Lipschitz sont satisfaites (continuité en t et lipschitziennité locale en y).

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ contenant 0.

b) Si $b = +\infty$, alors pour $t \geq 1$, $y'(t) \geq 1 + y^2(t)$ et donc

$$\frac{y'(t)}{1 + y^2(t)} \geq 1.$$

En intégrant,

$$\int_0^t \frac{y'(s)}{1 + y^2(s)} ds \geq \int_0^t ds,$$

on obtient

$$\arctan(y(t)) \geq t.$$

Ce qui est absurde car la fonction arctan est bornée.

c) Pour $t \geq \alpha$ on a

$$\int_\alpha^t y'(s)\, ds = \int_\alpha^t \left(s + y^2(s)\right) ds,$$

ce qui implique

$$y(t) = y(\alpha) + \frac{t^2 - \alpha^2}{2} + \int_\alpha^t y^2(s)\, ds$$

et donc

$$\lim_{t \to b^-} y(t) = y(\alpha) + \frac{b^2 - \alpha^2}{2} + \lim_{t \to b^-} \int_\alpha^t y^2(s)\, ds.$$

Comme $\lim\limits_{t \to b^-} \int_\alpha^t y^2(s)\, ds = +\infty$, alors $\lim\limits_{t \to b^-} y(t) = +\infty$.