**U.S.T.H.B. 2013-2014 Semestre 1** **Équations Différentielles**

**Faculté de Mathématiques** **$3^{\text{ème}}$ année Licence Math**

## <u>Série d'exercices N° 2</u>

**<u>Exercice 1</u> :** Montrer que la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ est solution de l'équation $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

Discuter le résultat.

**<u>Exercice 2</u> :** En utilisant la méthode des approximations successives, résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

$$\begin{cases} y' = ay, \ a \in \mathbb{R} \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = y + 2 \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} y' = y + t \\ y(0) = 1 \end{cases}.$$

**<u>Exercice 3</u> :** Soit l'équation différentielle $(E_3): \ y' = y^{\frac{1}{3}}$.

**a)** Vérifier que $y(t) = \left(\frac{2t}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$, est une solution de $(E_3)$.

**b)** Donner la suite des approximations successives en prenant $y(0) = 0$.

**c)** Discuter le résultat.

**<u>Exercice 4</u> :** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(t, y) = \begin{cases} -2t & \text{si } y \geq t^2 \\ \frac{-2y}{t} & \text{si } |y| < t^2 \\ 2t & \text{si } y \leq -t^2 \end{cases}.$$

On considère le problème de Cauchy

$$(P_4): \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}.$$

**a)** Étudier la continuité et la lipschitzienité locale de la fonction $f$.

**b)** En déduire l'ensemble des points $(t_0, y_0)$ où le problème $(P_4)$ admet une unique solution.

**Exercice 5 :** On considère l'équation différentielle $(E_5)$ : $y' = t + y^2$.

**a)** Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale qui vérifie $y(0) = 0$.

**b)** Déterminer le lieu géométrique des points où les solutions de $(E_5)$ présentent une tangente horizontale.

**Exercice 6 :** On considère l'équation différentielle $(E_6)$ : $y' = t^2 + y^2$.

**a)** Montrer que $(E_6)$ possède une solution maximale unique $y$ qui vérifie $y(0) = 0$.

**b)** Montrer que $y$ est une fonction impaire.

**c)** Étudier la monotonie, le signe et la concavité de $y$.

**d)** Montrer que $y$ est définie sur un intervalle borné de $\mathbb{R}$.

**e)** Dresser le tableau de variation de $y$.

**Exercice 7 :** Soit $y$ la solution maximale de l'équation différentielle $y' = e^{-ty}$ qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$.

**a)** Justifier l'existence et l'unicité de la solution maximale $y$.

**b)** Montrer que $y$ est une fonction impaire.

**c)** Montrer que $y$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

**d)** En remarquant que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-ty(t)} = 0$, montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \alpha$, $\alpha > 0$ et $\alpha \neq +\infty$.

**e)** Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} te^{-ty(t)}dt$ est convergente.

**f)** Montrer que

$$0 \leq t(\alpha - y(t)) \leq \int_t^{+\infty} se^{-sy(s)}ds, \quad \forall t \geq 0.$$

En déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty} t(\alpha - y(t)) = 0$, puis

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists t_0 > 0 :\ t \geq t_0 \Rightarrow 1 \leq e^{s(\alpha - y(s))} \leq 1 + \varepsilon, \quad \forall s \geq t.$$

**g)** Montrer que

$$\alpha - y(t) = \int_t^{+\infty} e^{-\alpha s} e^{s(\alpha - y(s))} ds \quad \forall t \geq 0.$$

**h)** Déduire de ce qui précède que

$$y(t) \overset{v(+\infty)}{=} \alpha - \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} + o\left(e^{-\alpha t}\right).$$

**<u>Exercice 8</u> :** Donner les quatre premières approximations successives de la solution du problème de Cauchy

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x - y \\ tx \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**<u>Exercice 9</u> :** Soient $a$ et $b$ deux fonctions continues sur $I = [0, T]$, $T > 0$. On considère le système différentiel

$$(S_9) : \begin{cases} x' = y + a(t) \\ y' = 2x - y + b(t) \end{cases}.$$

**a)** Écrire $(S_9)$ sous la forme $z'(t) = Az(t) + B(t)$.

**b)** Calculer $e^{tA}$.

**c)** Donner la solution générale du système sans second membre.

**d)** Donner la solution générale du système avec le second membre $a(t) = 0$ et $b(t) = e^{-t}$.

**<u>Exercice 10</u> :** On considère l'équation différentielle $(E_{10})$ : $y'' + y'(3y^2 - 1) + y = 0$.

**a)** Justifier qu'on peut ramener l'équation $(E_{10})$ au système différentiel d'ordre un

$$(S_{10}) : \begin{cases} x' = y - x^3 + x \\ y' = -x \end{cases}.$$

**b)** Montrer que le problème de Cauchy associé au $(S_{10})$ possède une solution globale unique.

**c)** On appelle trajectoire associée à une solution $(x, y)$ du système $(S_{10})$, l'ensemble des couples $(x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que par chaque point du plan passe une seule trajectoire.

2. Montrer que si une trajectoire a une point double, alors la solution correspondante de $(S_{10})$ est périodique.

**d)** Montrer que la courbe symétrique par rapport à $(0, 0)$ d'une trajectoire est encore une trajectoire.