



Nom : Matricule :

Prénom :

=====

Exercice 1 (4 pts.) : Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + 1 + xe^y - y$.

- a) Écrire le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au voisinage du point $(0, 0)$.
 - b) Montrer que $f(x, y) = 0$ définit implicitement y en fonction de x au voisinage du point $(0, 1)$.
 - c) Former le développement de Taylor à l'ordre 1 au voisinage de 0 de la fonction $\varphi : x \mapsto y(x)$.
- =====

Réponse.

=====

Exercice 2 (4 pts.) : Soit $f : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

- a) En posant $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, exprimer $\frac{\partial f}{\partial r}$ en fonction de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
- b) En déduire l'expression de $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial f}{\partial y}$.
- c) Déterminer toutes les fonctions qui vérifient $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- =====

Réponse.

=====

Exercice 3 (3,5 pts.) :

Déterminer les extrema locaux de la fonction définie par $f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - x^4 - y^4$.

=====

Réponse.

=====

Exercice 4 (4,5 pts.) : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ et ∂D est son bord orienté.

Calculer puis comparer les intégrales suivantes.

a) $I_1 = \iint_D (2x - 2y) \, dx \, dy,$ **b)** $I_2 = \int_{\partial D} (x^2 + y^2) \, dx + (x^2 - y^2) \, dy.$

=====

Réponse.

=====

Exercice 5 (4 pts.) : On considère l'équation différentielle : $y' = 1 + t^2 + \cos y$.

- a) Justifier l'existence et l'unicité d'une solution maximale qui vérifie $y(0) = 0$.
- b) Montrer que y est une fonction impaire. c) Étudier la monotonie et le signe de y .
- =====

Réponse.