Chapitre 0

Rappel sur les propriétés topologique de $\mathbb{R}^n$

Sommaire

On désigne par $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble de tous les n-uples $(x_1, ..., x_n)$ où $x_i, i = 1, ..., n$, sont des nombres réels. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont notés x ou $(x_1, ..., x_n)$.

Si $n = 3$, une variante notation est souvent utilisée (x, y, z).

0.1 Notion de distance dans $\mathbb{R}^n$

Définition 1

On appelle distance sur un ensemble E de $\mathbb{R}^n$, une application définie de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ notée d, qui à tout couple (x, y) de $E \times E$ fait correspondre un réel positif ou nul $d(x, y)$ vérifiant :

1. $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall (x, y) \in E^2$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall (x, y, z) \in E^3$.

Un ensemble E muni d'une distance est appelé espace métrique, on le désigne par (E, d).

Exemple 1

$E = \mathbb{R}$ et $d(x, y) = |x - y|$ est une distance sur $\mathbb{R}$. En effet,

1. $|x - y| = 0 \iff x = y$
2. $|x - y| = |y - x|$
3. $|x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y|$. ∎

Remarque 2

Sur un même ensemble E peuvent être définies plusieurs distances.

0.2 Normes dans $\mathbb{R}^n$

Définition 3

On appelle norme sur $\mathbb{R}^n$ une application N de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant les trois propriétés suivantes

1. $N(x) = 0_{\mathbb{R}_+}$ si et seulement si $x = 0_{\mathbb{R}^n}$.
2. $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et λ dans $\mathbb{R}$.
3. $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$.

Le couple $(\mathbb{R}^n, N)$ est appelé un espace normé.

Remarque 4

À partir d'une norme N définie sur $\mathbb{R}^n$, on peut toujours définir une distance d associée à cette norme par la relation $d(x, y) = N(x - y)$. Réciproquement, il existe des distances définies sur $\mathbb{R}^n$ qui n'induisent pas de norme associée à celles-ci.

Sur $\mathbb{R}^n$, on peut définir plusieurs normes notées $N_1, N_2, ...$

Notation 1

Par la suite, une norme sur $\mathbb{R}^n$ sera désignée par la notation $\|.\|$ et sans indice quand il n'y a aucune ambiguïté.

Exemple 2

La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}^n$. ■

Exercice 1

Montrer que $\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$ pour tout x, y dans $\mathbb{R}^n$.

0.2.1 Exemples de normes dans $\mathbb{R}^n$

Norme euclidienne

L'application

$$\begin{array}{rccl} \|.\|_2 : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & x & \longmapsto & \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}, \end{array}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^n$ appelée **norme euclidienne**.

Le produit scalaire de $x = (x_1, ..., x_n)$ avec $y = (y_1, ..., y_n)$ est défini par

$$x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

On a en particulier $(\|x\|_2)^2 = x \cdot x$.

Inégalité de Cauchy-Schwartz Pour tout x et y dans $\mathbb{R}^n$ on a $|x \cdot y| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$, avec égalité si et seulement si x et y sont proportionnels.

Norme sup ou l^∞

La norme sup ou l^∞ est définie par $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Norme l^p, $1 \leq p < +\infty$

La norme l^p définie pour $1 \leq p < +\infty$ par $\|x\|_p = (|x_1|^p + ... + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}} = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. On voit que le cas $p = 2$ correspond à la norme euclidienne.

0.2.2 Normes équivalentes

Définition 5

On dit que deux normes N_1 et N_2 définies sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes s'il existe deux constantes a et b strictement positives telles que

$$a\ N_1(x) \leq N_2(x) \leq b\ N_1(x) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

On vérifie aisément que

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty \text{ et } \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Ceci montre que les normes $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ et $\|x\|_\infty$ sont équivalentes deux à deux.

On a en fait la propriété fondamentale suivante.

Théorème 6

Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes entre elles.

0.3 Propriétés topologique de $\mathbb{R}^n$

0.3.1 Suites de $\mathbb{R}^n$

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme notée $\|.\|$. On dit que cette suite converge vers une limite $x \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_k - x\| = 0.$$

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} x_k = x$ ou encore parfois $x_k \longrightarrow x$. Dans le cas contraire on dit que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ diverge.

Proposition 7

La limite d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ si elle existe est unique.

Remarque 8

Dans le cas $n = 1$, on a $\|x_k - x\| = |x_k - x|$ et on retrouve la définition usuelle de la convergence des suites réelles.

Caractérisation des suites convergentes

Grâce à l'équivalence des normes, il est possible de remplacer la norme $\|.\|$ par n'importe quelle autre norme. En particulier en utilisant la norme $\|.\|_\infty$, on voit que si $x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, ..., x_{n,k})$ et $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, la convergence de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers x est équivalente à la convergence pour tout $i = 1, ..., n$ de la suite des i-ème coordonnées $(x_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$ vers la coordonnée x_i.

Propriétés des suites convergentes

Proposition 9

Toute suite convergente est bornée c'est-à-dire que si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x, alors il existe $M \geq 0$ telle que $\|x_k\| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. De plus on a $\|x\| \leq M$.

Suites de Cauchy

Définition 10

On dit qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est de Cauchy si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel k_0 tel que

$$p \geq k_0 \text{ et } q \geq k_0 \text{ impliquent } \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

Proposition 11

Une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $x_k = (x_{1,k}, x_{2,k}, ..., x_{n,k})$ est une suite de Cauchy si et seulement si les n suites numériques $(x_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}, ... (x_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Cauchy.

Théorème 12 (Critère de Cauchy)

Pour qu'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}^n$, il faut et il suffit qu'elle soit de Cauchy.

Sous-suites de $\mathbb{R}^n$

Une sous-suite d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est suite : $k \longmapsto x_{\rho(k)}$ où $\rho : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ est une application strictement croissante. Une sous-suite d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est aussi appelée suite partielle ou encore suite extraite de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Théorème 13 (de Bolzano-Weierstass)

De toute suite bornée $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\rho(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge.

0.3.2 Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$

Boule ouverte de $\mathbb{R}^n$

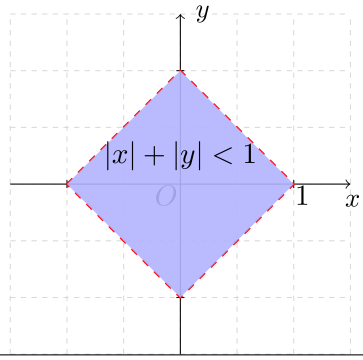
Définition 14 (boule ouverte de $\mathbb{R}^n$)

Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme notée $\|.\|$. On appelle boule ouverte de centre $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^n$ noté $B(x_0, r)$ ou $B_r(x_0)$ et défini par

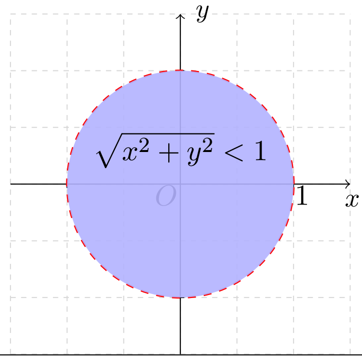
$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \ \|x - x_0\| < r\}.$$

La représentation géométrique d'une boule dépend de la norme choisie dans $\mathbb{R}^n$. En effet, par exemple $B(0, 1)$, la boule ouverte centrée en 0 et de rayon 1, de $\mathbb{R}^n$ admet différentes formes géométriques.

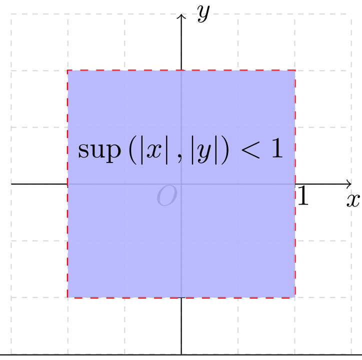
1. Sur $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_1$, $B(0, 1)$ s'exprime par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ |x| + |y| < 1\}$.
2. Sur $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_2$, $B(0, 1)$ s'exprime par $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \sqrt{x^2 + y^2} < 1\right\}$.
   Dans ce cas la boule $B(0, 1)$ s'appelle disque ouvert centré en 0 et de rayon 1.
3. Sur $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, $B(0, 1)$ s'exprime par $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \sup(|x|, |y|) < 1\}$.



$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ \|(x, y)\|_1 < 1\}$



$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ \|(x, y)\|_2 < 1\}$



$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ \ \|(x, y)\|_\infty < 1\}$

Points adhérents et points d'accumulation

Définition 15

Un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est dit adhérent à une partie A de $\mathbb{R}^n$ si toute boule ouverte centrée en x_0 contient au moins un point de A i.e. pour tout $r > 0$, $B(x_0, r) \cap A \neq \emptyset$.

Définition 16

Un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est dit un point d'accumulation d'une partie A de $\mathbb{R}^n$ si toute boule ouverte centrée en x_0 contient au moins un point de A autre que x_0 i.e. pour tout $r > 0$, $B(x_0, r) \cap (A \backslash \{x_0\}) \neq \emptyset$.

Si x_0 est un point d'accumulation de A alors est adhérent à A. La réciproque est fausse ; il existe des points adhérents qui ne sont pas des points d'accumulation. Ce sont des points isolés de A.

Définition 17

On appelle adhérence de $A \subset \mathbb{R}^n$, l'ensemble des points adhérents à A, on le désigne par $\overline{A}$.

Définition 18

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$ si $\overline{A} = \mathbb{R}^n$ i.e. l'adhérence de A est $\mathbb{R}^n$.

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}^n$. Alors on a les propriétés suivantes.

- Tout point de A est adhérent à A, i.e. $A \subset \overline{A}$.
- Si $A \subset B$ alors $\overline{A} \subset \overline{B}$.

Théorème 19

Tout point d'accumulation de $A \subset \mathbb{R}^n$ est limite d'une suite de points de A.

Ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$

Définition 20 (d'un ouvert)

Un ensemble U de $\mathbb{R}^n$ est dit ouvert si pour tout $x \in U$ il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$. Par convention l'ensemble vide $\emptyset$ est ouvert.

Définition 21

Pour un ensemble quelconque E de $\mathbb{R}^n$ on dit que x est un point intérieur à E si il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset E$. L'ensemble des points intérieur à E est appelé l'intérieur de E et est noté $\mathring{E}$.

Proposition 22

- L'ensemble $\mathring{E}$ est le plus grand ouvert contenu dans E.
- L'ensemble E est ouvert si et seulement si il est égal à son intérieur i.e. $E = \mathring{E}$.

Définition 23 (d'un voisinage)

Un ensemble V est un voisinage de x s'il contient une boule ouverte non-vide de centre x.

Définition 24 (d'un fermé)

Un ensemble F de $\mathbb{R}^n$ est dit fermé si son complémentaire $F^C = \mathbb{R}^n \backslash F$ est ouvert.

Proposition 25

- L'ensemble $\overline{E}$ est le le plus petit fermé contenant E.
- L'ensemble E est fermé si et seulement si il est égal à son adhérence $\overline{E}$ i.e. $E = \overline{E}$.

Théorème 26

Un ensemble F est fermé si et seulement si toute suite de points de F qui converge alors sa limite contenue dans F.

Définition 27 (boule fermée de $\mathbb{R}^n$)

Soit $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme notée $\|.\|$. On appelle boule fermée de centre $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble noté $\overline{B}(x_0, r)$ et défini par $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \ \|x - x_0\| \leq r\}$.

Proposition 28

Une boule fermée de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble fermé de $\mathbb{R}^n$.

0.3.3 Quelques propriétés élémentaires

1. Toute union finie ou infinie d'ouverts est un ouvert.
2. Toute union finie de fermés est un fermé.
3. Toute intersection finie ou infinie de fermés est un fermé.
4. Toute intersection finie de d'ouverts est un ouvert.
5. Les seuls ensembles à la fois ouverts et fermés sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$.
6. Un ensemble fini de points de $\mathbb{R}^n$ est fermé.
7. Pour tout ensemble E de $\mathbb{R}^n$, on a $\mathring{E} \subset E \subset \overline{E}$.

Définition 29

On appelle frontière d'un ensemble E et on la note ∂E, l'ensemble des points de son adhérence qui ne sont pas dans son intérieur, c'est-à-dire $\partial E = \overline{E} \backslash \mathring{E} = \overline{E} \cap \left(\mathring{E}\right)^C$.

Ensembles bornés et ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$

Définition 30

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit borné s'il existe $R > 0$ tel que $E \subset \overline{B}(0, R)$ i.e. $\|x\| \leq R$ pour tout $x \in E$.

Définition 31

Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est dit compact si de toute famille d'ouverts $(U_i)_{i \in I}$ telle que $E \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i$ on peut extraire une sous famille finie $(U_1, ...U_m)$ telle que $E \subset (U_1 \cup ... \cup U_m)$.

Théorème 32

Pour un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes.

1. E est compact.
2. E est à la fois fermé et borné.
3. Propriété de Bolzano-Weierstrass : toute suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de points de E admet une sous-suite qui converge vers une limite $x \in E$.

Exemple 3

Les boules fermées et les pavés fermées $[a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$ de $\mathbb{R}^n$ sont des ensembles compacts de $\mathbb{R}^n$. ■

Ensembles connexes et ensembles convexes de $\mathbb{R}^n$

Définition 33

Un ensemble E est dit connexe s'il n'existe aucune paire d'ouverts (U_1, U_2) tels que $E \subset U_1 \cup U_2$ et $E \cap U_1$ et $E \cap U_2$ sont disjoints.

Autrement dit, E est connexe si on ne peut pas le séparer en deux parties disjointes en l'intersectant avec deux ouverts. Dans le cas d'un ensemble ouvert, cela se traduit par la propriété intuitive suivante.

Théorème 34

Un ensemble U est ouvert et connexe si et seulement si pour tout x et y dans U, il existe une ligne brisée contenue dans U qui les relie, c'est-à-dire un ensemble fini de points $\{p_1, p_2, ..., p_m\}$ tel que $p_1 = x$ et $p_m = y$, et tel que les segments d'extrémités p_i et p_{i+1} sont tous contenus dans U.

Définition 35

Un ensemble E est dit convexe si pour tout $x, y \in E$ et $t \in [0, 1]$ on a $tx + (1-t)\,y \in E$, i.e. le segment d'extrémités x et y est contenu dans E.

En dimension $n = 1$ les connexes et les convexes de $\mathbb{R}$ sont exactement les intervalles (de taille finie ou infinie). En revanche, en dimension $n > 1$ tout convexe est connexe mais la réciproque est fausse. Aussi une intersection finie ou infinie de compacts est un compact et de même pour les convexes.