Chapitre 1

Fonctions continues

Sommaire

1.1 Généralités sur les fonctions de plusieurs variables 11

1.1.1 Définitions 11

1.1.2 Représentation graphique 13

1.2 Limite d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ 14

1.2.1 Changement de variables 15

1.3 Continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ 16

1.3.1 Fonctions continues et ensembles compacts 18

1.1 Généralités sur les fonctions de plusieurs variables

1.1.1 Définitions

Définition 36

Une application de $\mathbb{R}^n$, ou d'une partie de $\mathbb{R}^n$, dans $\mathbb{R}$ est appelée fonction numérique réelle de n variables réelles.

Exemple 4

Les fonctions f et g définies par

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) = x+y, \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3/\{(0,0,0)\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & g(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2}, \end{array}$$

sont des fonctions réelles à plusieurs variables (resp. à 2 et 3 variables). ∎

On s'intéressera aussi parfois aux fonctions de n variables et à valeurs vectorielles $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)) \in \mathbb{R}^m$. Notons que chacune des fonctions f_i est une fonction de n variables et à valeur réelle. On dit parfois que f est un champ de vecteurs à m composantes définis sur $\mathbb{R}^n$.

Exemple 5

Pour la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y,z) = (x \sin y, xyz)$ on a

$$f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,x) & \longmapsto & f_1(x,y,z) = x\sin y, \end{array} \quad \text{et} \quad f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,x) & \longmapsto & f_2(x,y,z) = xyz. \end{array}$$ ∎

Définition 37

Soit E une partie de $\mathbb{R}^n$, $a \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}^m$ une application de E dans $\mathbb{R}^m$. Alors

- E est appelé domaine de définition de la fonction f.
- L'ensemble $f(E) = \{f(x),\ x \in E\}$ est appelé l'image de E par f.
- Si E est un voisinage de a, i.e. si E contient une boule ouverte de centre a, on dit que f est définie au voisinage de a.
- Si $F \subset \mathbb{R}^m$, on appelle image réciproque de F par f, l'ensemble noté $f^{-1}(F)$ où $f^{-1}(F) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) \in F\}$.

Exemple 6

Soit f la fonction à deux variables réelles x, y définie par $f(x,y) = x + \operatorname{Log} y$. Le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ car $\operatorname{Log} y$ est définie uniquement pour $y > 0$.

L'image de f est $\mathbb{R}$ car pour tout $z \in \mathbb{R}$ on a $z = x + \operatorname{Log} y$ où $(x,y) = (z,1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. ∎

1.1.2 Représentation graphique

Une fonction d'une variable définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles est décrite par son graphe, qui est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par

$$G_f = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \ ; \quad x \in D\right\},$$

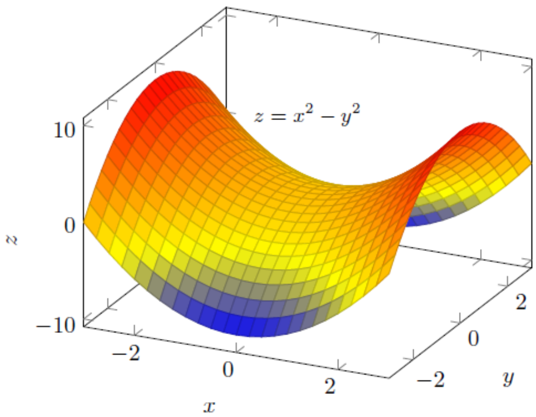
et que l'on représente par la courbe du plan d'équation $y = f(x)$.
Dans le cas d'une fonction de deux variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ et à valeurs réelles on définit de même le graphe

$$G_f = \left\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \in D\right\},$$

que l'on peut représenter comme une surface d'équation $z = f(x, y)$ dans l'espace à 3 dimensions.

Exemple 7

La représentation géométrique de la fonction $f(x, y) = x^2 - y^2$ dans l'espace à 3 dimensions est dans la figure ci-contre.



∎

La notion de graphe s'étend de manière évidentes au cas des fonctions de n variables.

Définition 38 (graphe d'une fonction)

On appelle **graphe** d'une fonction f de n variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles, l'ensemble des points $(x, f(x)) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ où x parcours D. Le graphe de f est noté

$$G_f = \left\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n\right\}.$$

Remarque 39

Il n'existe aucune méthode évidente pour représenter géométriquement une fonction numérique définie sur une partie de $\mathbb{R}^n, n \geq 3$.

Définition 40 (courbe de niveau)

Soit f une fonction de n variables définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles. Pour tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$, on appelle **courbe de niveau** λ de la fonction f, l'ensemble C_λ des points de $\mathbb{R}^n$ dont l'image par f vaut λ, c'est-à-dire

$$C_\lambda = \{x \in D \; ; \quad f(x) = \lambda\}.$$

1.2 Limite d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Soit f une fonction d'une partie de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie au voisinage d'un point a, sauf peut-être en a, et soit $l \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme quelconque $\|.\|$ des normes définies sur $\mathbb{R}^n$ car celles-ci sont équivalentes.

Dans tout ce chapitre si aucune précision n'est donnée, $\|.\|$ désigne l'une quelconque des trois normes connues $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ ou $\|.\|_\infty$.

Définition 41

On dit que la fonction f admet l pour limite au point a si

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < \|x - a\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - l| < \varepsilon,$$

et on écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = 2x + y^2$.

En utilisant la définition montrer que $\lim\limits_{(x,y) \to (1,0)} f(x,y) = 2$.

Définition 42

On dit que la fonction f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) au point a si

$$\forall A > 0, \; \exists \delta > 0 \quad : \quad 0 < \|x - a\| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > A \text{ (resp. } f(x) < -A).$$

Théorème 43

Si une fonction admet une limite en un point alors cette limite est unique.

Démonstration. Si une fonction f admet deux limites l et l' en un point a alors

$$0 \leq |l - l'| = |l - f(x) + f(x) - l'| \leq |f(x) - l| + |f(x) - l'|.$$

D'où en faisant tendre x vers a dans l'inégalité précédente on trouve $0 \leq |l - l'| \leq 0$.

Donc $l = l'$. ■

Exemple 8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

Pour voir si f admet une limite au point $(0,0)$, on remarque, par exemple, que

$\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2}{t^2+t^2} = \dfrac{1}{2}$ et que $\lim\limits_{t\to 0} f(t,2t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{2t^2}{t^2+4t^2} = \dfrac{2}{5}$.

Par conséquent si f admettait une limite l on aurait $l = \dfrac{1}{2}$ et $l = \dfrac{2}{5}$, ce qui est contradictoire d'après l'unicité de la limite. Donc f n'admet pas de limite au point $(0,0)$. ■

Les opérations algébriques sur les limites concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions d'une variable réelle.

1.2.1 Changement de variables

Comme pour l'étude des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, les changements de variables sont utiles pour le calcul de limite d'une fonction de plusieurs variables en un point. On mentionne ici le changement de variables le plus classique.

Coordonnées sphériques généralisées

Pour un point x de $\mathbb{R}^n$, de coordonnées $(x_1, ..., x_n)$, on définit les coordonnées sphériques généralisées $(r, \theta_1, ..., \theta_{n-1})$ par

$$\begin{aligned}
&r = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2},\\
&x_1 = r\cos\theta_1,\\
&x_2 = r\sin\theta_1\cos\theta_2,\\
&...\\
&x_{n-1} = r\sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},\\
&x_n = r\sin\theta_1 ... \sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}.
\end{aligned}$$

Les coordonnées sphériques constituent le cas particulier $n = 3$ et les polaires $n = 2$.

1.3 Continuité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Définition 44

Une fonction f définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite **continue** au point a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, c'est-à-dire si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \quad : \ \|x - a\| < \delta \quad \Longrightarrow \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Définition 45

Une fonction f est continue sur un ensemble E si elle est continue en tout point de cet ensemble.

Exemple 9

La fonction projection $P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, définie par $P_i(x) = P_i(x_1, ..., x_n) = x_i$ est continue en tout point $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. En effet, on a

$$|P_i(x) - P_i(a)| = |x_i - a_i| \leq \|x - a\|_1,$$

il suffit donc de prendre $\delta = \varepsilon$ dans la définition précédente. ■

Théorème 46

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons que f est continue au point a et définissons les fonctions réelles $g_1, ..., g_n$ à une variable réelle, par $t \mapsto g_i(t) = f(a_1, ..., a_{i-1}, t, a_{i+1}, ..., a_n)$.

Pour tout $i = 1, ..., n$ la fonction g_i qui est définie au voisinage de a_i est continue au point a_i.

Démonstration. Faire la démonstration à titre d'exercice. ■

Remarque 47

La réciproque du théorème précédent est fausse, autrement dit, la continuité des fonctions $g_1, ..., g_n$ respectivement en $a_1, ..., a_n$ n'implique pas, en général, la continuité de la fonction f au point a.

Exemple 10

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

On a au point $a = (a_1, a_2) = (0, 0)$, $g_1(t) = f(t, a_2) = f(t, 0) = 0$ et $g_2(t) = f(a_1, t) = f(0, t) = 0$ pour tout point $t \in \mathbb{R}$. Donc g_1 et g_2 sont continues respectivement en $a_1 = 0$ et $a_2 = 0$. Cependant f n'est pas continue en $a = (0, 0)$ puisque elle n'admet même pas de limite en ce point. ▪

Théorème 48

Soit f une fonction définie sur une partie E de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $a \in E$. La fonction f est continue en a si et seulement si pour toute suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telles que $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = a$ on a $\lim\limits_{k\to+\infty} f(a_k) = f(a)$.

Démonstration. Faire la démonstration à titre d'exercice. ■

Exercice 3

Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

n'est pas continue en $(0, 0)$.

Ainsi pour les opérations algébriques sur les fonctions continues concernant sommes, différences, produits, quotients et compositions sont les mêmes que celles utilisées dans le cas des fonctions d'une variable réelle.

Remarque 49

Soit $f = (f_1, ..., f_m)$ une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. La fonction f est continue en a si et seulement si chaque composante $f_j, j = 1, ..., m$ est continue en a.

1.3.1 Fonctions continues et ensembles compacts

Définition 50 (continuité uniforme)

Une fonction continue d'une partie E de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est dite uniformément continue sur E si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ : \ \forall x, y \in E,\ \|x - y\| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Remarque 51

Dans la définition de la continuité uniforme le nombre δ ne dépend que de ε et de f.

Exercice 4

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 52

Soit E une partie compacte de $\mathbb{R}^n$. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est continue sur E alors

1. f est bornée sur E i.e. il existe $M \geq 0$ telle que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in E$.
2. f est uniformément continue sur E.
3. L'image $f(E)$ de f est une partie compacte de $\mathbb{R}$.
4. f atteint ses bornes inférieure et supérieure i.e. il existe $a, b \in E$ tels que

   $f(a) = \inf\limits_{x \in E} f(x)$ et $f(b) = \sup\limits_{x \in E} f(x)$.

Démonstration. Exercice. ■