Chapitre 4

Intégration des fonctions de plusieurs variables

Sommaire

Le but de ce chapitre est de présenter le calcul des intégrales multiples, précisément, intégrales doubles et triples.

4.1 Introduction et définitions générales

Il y a deux aspects essentiels dans le cours du calcul d'intégrales. Le premier est la théorie d'intégration, qui comporte les définitions et les conditions nécessaires d'existence d'une intégrale et certains résultats liés à celle-ci. Nous classons deux théories fondamentales, revenant à leurs constructeurs Lebesgue et Riemann. La théorie de Lebesgue sera enseignée dans un cours séparé appelé "mesure et intégration" et dans notre cours, nous étudions la théorie de Riemann.
Le deuxième aspect est le côté de calcul et ses techniques que nous nous concentrions sur lui dans ce cours.

4.1.1 Notion de pavé

Définition 99 (de pavé)
On appelle pavé de $\mathbb{R}^n$ tout sous ensemble de $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$P = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times ... \times (a_n, b_n) \equiv \prod_{i=1}^{n} (a_i, b_i) \,,$$

où a_i et b_i sont des constantes réelles données.

Les intervalles (a_i, b_i) peuvent être considérés fermés, ouverts, ou semi-ouverts.
Pour $n = 1$, P est un intervalle de $\mathbb{R}$, pour $n = 2$, P est un rectangle de $\mathbb{R}^2$ et pour $n = 3$, P est un parallélépipède de $\mathbb{R}^3$.

Définition 100
Soit P un pavé de $\mathbb{R}^n$. $m(P) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n) \in \mathbb{R}_+$ est appelé mesure de P.

Définition 101
On appelle subdivision de l'intervalle $[a, b]$ toute suite (t_i) finie telle que

$$a = t_0 < t < ... < t_k = b.$$

On appelle subdivision S du pavé P toute famille $(S_1, ..., S_n)$ où $S_i = \{t_{i,0}, ..., t_{i,k_i}\}$ est une subdivision de l'intervalle $[a_i, b_i]$.

L'ensemble des sous pavés $[t_{1,s_1}, t_{1,s_1+1}] \times [t_{2,s_2}, t_{2,s_2+1}] \times ... \times [t_{n,s_n}, t_{n,s_n+1}]$ lorsque $(s_1, ..., s_n)$ parcourt $\{0, ..., k_1 - 1\} \times ... \times \{0, ..., k_n - 1\}$ forme une partition de P.

Comme dans le cas unidimensionel, on dit qu'une subdivision S_2 est plus fine que S_1 si tout sous pavé de S_1 est l'union de plusieurs sous pavés de S_2.

4.1.2 Ensembles mesurables dans $\mathbb{R}^n$

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^n$ alors A est contenu dans un pavé P de $\mathbb{R}^n$.

Mesure extérieure de A est défini comme étant

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} m(P_k) : \ (P_k) \text{ est une suite de pavés avec } A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k \right\}.$$

D'une manière analogue, nous définissons la mesure intérieure comme

$$m_*(A) = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} m(P_k) : \ (P_k) \text{ est une suite de pavés avec } \bigcup_{k=1}^{+\infty} P_k \subset A \right\}.$$

Définition 102 (Ensemble mesurable)

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite mesurable si $m^*(A) = m_*(A)$.

On appelle alors mesure de A le nombre $m(A)$ définie par $m(A) = m^*(A) = m_*(A)$.

Pour $n = 2$, $m(A)$ s'appelle aire ou surface de A et pour $n = 3$, $m(A)$ s'appelle volume de A. La mesure d'un ensemble dépend de la dimension de l'espace dans lequel il est considéré. Par exemple, la mesure d'un rectangle $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ considéré comme partie de $\mathbb{R}^2$ est égale à sa surface $m_2(R) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$. Mais si l'on considère ce rectangle comme étant une partie de $\mathbb{R}^3$, i.e. $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \{0\}$ alors $m_3(R) = 0$ dans $\mathbb{R}^3$, car son volume est nul.

Proposition 103

Soit A une partie bornée de $\mathbb{R}^n$. Alors A est mesurable si et seulement si la mesure de sa frontière est nulle.

4.1.3 Sommes de Darboux

Soit $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction réelle définie sur un pavé de $\mathbb{R}^n$. On suppose que f est bornée sur le pavé P. Soit S une subdivision de P. Pour tout sous pavé S_k de S on pose

$$m_{S_k}(f) = \inf \{f(x), \ x \in S_k\} \quad \text{et} \quad M_{S_k}(f) = \sup \{f(x), \ x \in S_k\}.$$

Ces nombres existent et sont finis car f est bornée.

Définition 104 (Sommes de Darboux)
Les sommes

$$L(f,S)=\sum_{S_k} m_{S_k}(f)\,m(S_k) \quad \text{et} \quad U(f,S)=\sum_{S_k} M_{S_k}(f)\,m(S_k)$$

sont appelés respectivement somme de Darboux inférieure et somme de Darboux supérieure.

Propriétés

1. Si S et S' deux partions quelconque d'une pavé P de $\mathbb{R}^n$, alors $L(f,S') \leq U(f,S)$.
2. L'ensemble $\mathcal{S}_* = \{L(f,S)\,,\ \ S \text{ partition quelconque de } P\}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$ elle admet donc, une borne supérieure notée I_+.
3. L'ensemble $\mathcal{S}^* = \{U(f,S)\,,\ \ S \text{ partition quelconque de } P\}$ est une partie minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure notée I^-.

4.1.4 Fonctions intégrables sur une partie mesurable de $\mathbb{R}^n$

Définition 105 (Intégrale sur un pavé)
Une fonction $f : P \to \mathbb{R}$, définie et bornée sur un pavé fermé P de $\mathbb{R}^n$ est dite intégrable sur P si $I_+ = I^-$. Son intégrale sur P est alors le nombre $I = I_+ = I^-$. On la note $\int_P f(x)\,dx$.

Théorème 106 (Critère d'intégrabilité)
Soit P un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur P. Une condition nécessaire et suffisante pour que f soit intégrable sur A est

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ il existe une partition } S \text{ de } P \text{ telle que } U(f,S) - L(f,S) < \varepsilon.$$

Théorème 107 (Intégrabilité des fonctions continues)
Soit P un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : P \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur P. Alors la fonction f est intégrable sur P si et seulement si l'ensemble $B = \{x \in P,\ f \text{ est discontinue en } x\}$ est de mesure nulle. En particulier si f est continue sur P, alors elle est intégrable sur P.

Avant de généraliser l'intégrale d'une fonction f à un domaine quelconque, on définit la fonction caractéristique d'une partie A de $\mathbb{R}^n$, par la fonction $\chi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ qui est définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}.$$

Théorème 108

Soit P un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ et A un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ tel que $A \subset P$. La fonction $\chi_A : P \to \mathbb{R}$ est intégrable sur P si et seulement si la frontière de A est de mesure nulle.

Définition 109 (Intégrale sur une partie mesurable quelconque)

Soit P un pavé fermé de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction définie et bornée sur un ensemble mesurable A de $\mathbb{R}^n$ tel que $A \subset P$. On définit l'intégrale de f sur A comme l'intégrale de $f \cdot \chi_A$ sur P i.e. $\displaystyle\int_A f(x)\,dx = \int_P f(x)\,\chi_A(x)\,dx$.

Propriétés de l'intégrale multiple

- L'ensemble des fonctions intégrables sur une partie mesurable A de $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel et
$$\int_A (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_A f(x)\,dx + \mu \int_A g(x)\,dx.$$
- Soit $f \geq 0$ et intégrable sur A alors $\displaystyle\int_A f(x)\,dx \geq 0$.
- Si f est intégrable sur A alors $|f|$ est intégrable sur A et $\displaystyle\left|\int_A f(x)\,dx\right| \leq \int_A |f(x)|\,dx$.
- Soient A et B deux parties mesurables de $\mathbb{R}^n$ telles que $m(A \cap B) = 0$ et f intégrable sur A et B alors f est intégrable sur $A \cup B$ et
$$\int_{A \cup B} f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_B f(x)\,dx.$$
- L'intégrale de la constante 1 sur une partie mesurable A de $\mathbb{R}^n$ donne la mesure de A i.e. $\displaystyle\int_A 1dx = m(A)$.
- L'intégrale d'une fonction sur une partie de mesure nulle est toujours nulle.

La démonstration de ces propriétés est basée essentiellement sur la définition de l'intégrale multiple et les propriétés du sup et de l'inf.

Théorème de Fubini

Maintenant nous arrivons à un résultat important qui aide à calculer des intégrales lorsqu'elles existent. Ce résultat est le théorème de Fubini qui offre un moyen de ramener le calcul des intégrales multiples à celui des intégrales des fonctions d'une variable. Une version élémentaire de ce théorème s'énonce pour les fonctions définies sur un pavé.

Théorème 110 Théorème de Fubini
Soient A et B deux pavés respectivement de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$. Si $f : A \times B \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $A \times B$, alors on a

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,dxdy = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy \right) dx = \int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Changement de variables

Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n) : A \to \mathbb{R}^n$ une fonction injective et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ensemble A. Si f est une fonction intégrable sur $\varphi(A)$, on va chercher à relier l'intégrale de f sur $\varphi(A)$ à celle de $f \circ \varphi$ sur A.

Théorème 111 (Formule de changement de variables)
Sous les conditions ci-dessus, on a

$$\int_{\varphi(A)} f(x)\,dx = \int_A (f \circ \varphi)(y) \left|\det\left(J_\varphi(y)\right)\right| dy$$

où $J_\varphi(y)$ est la matrice jacobienne de φ définie par $J_\varphi(y) = \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}(y) \right)_{1 \le i,j \le n}$.

$$\begin{tikzcd}
A \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[rr, bend left, "f \circ \varphi"] & \varphi(A) \subset \mathbb{R}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\
y \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & x = \varphi(y) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & f(x) = (f \circ \varphi)(y) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"]
\end{tikzcd}$$

4.2 Intégrales doubles

Une version plus simple du théorème de Fubini pour les fonctions de deux variables est donnée dans le théorème suivant.

Théorème 112

Soit $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un pavé de $\mathbb{R}^2$ et f une fonction intégrable sur P. Alors

$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

De plus si $f(x,y) = h(x)\,g(y)$ alors

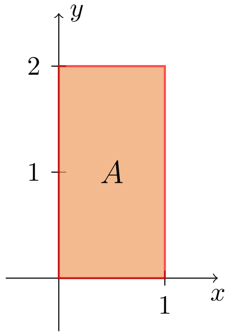
$$\iint\limits_P f(x,y)\,dxdy = \left(\int_{a_1}^{b_1} h(x)\,dx \right) \left(\int_{a_2}^{b_2} g(y)\,dy \right).$$

Exemple 26

Calculons l'intégrale $I = \iint\limits_A e^{x+y} dxdy$ où $A = [0,1] \times [0,2]$.

On a

$$I = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2]} e^x e^y dxdy = \left(\int_0^1 e^x dx \right) \left(\int_0^2 e^y dy \right) = (e-1)\left(e^2-1\right).$$



■

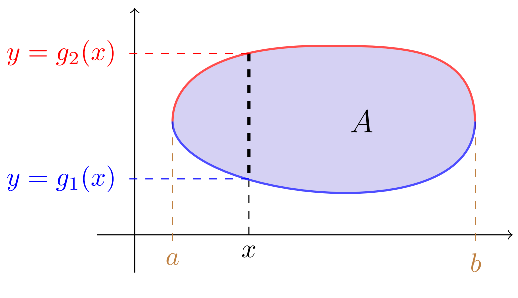
Le résultat du théorème ci-dessus est un cas particulier du résultat suivant.

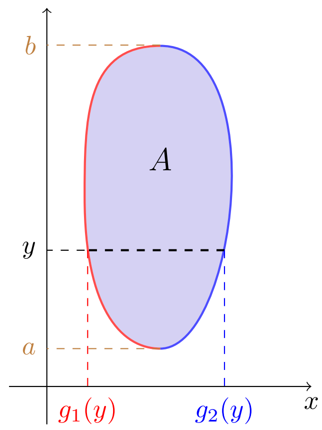
Théorème 113

Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ où $g_1, g_2 \in \mathcal{C}[a,b]\}$ et f une fonction intégrable sur A.

Alors

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx.$$





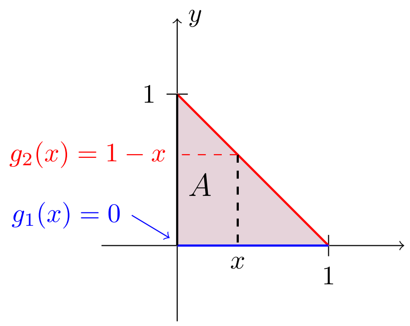
Si l'ensemble A est donné sous la forme

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad a\leq y\leq b,\ g_1(y)\leq x\leq g_2(y)\ \text{ où } g_1,g_2\in\mathcal{C}[a,b]\right\},$$

alors

$$\iint_A f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x,y)\,dx\right)dy.$$

Exemple 27



Calculons l'intégrale suivante $I=\iint_A x^2ydxdy$ où A est le triangle des sommets $B_1=O=(0,0)\,,B_2=(1,0)$ et $B_2=(0,1)$. L'ensemble A s'exprime sous la forme

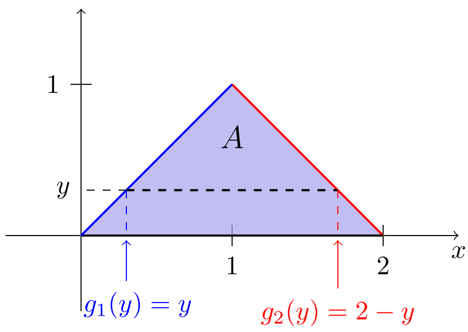
$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 1-x\right\}.$$

En appliquant le théorème de Fubini on obtient

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\left(\int_0^{1-x}x^2ydy\right)dx=\int_0^1\tfrac{1}{2}x^2(x-1)^2\,dx\\&=\tfrac{1}{2}\int_0^1\left(x^4-2x^3+x^2\right)dx=\left[\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{5}x^5-\tfrac{1}{2}x^4+\tfrac{1}{3}x^3\right)\right]_0^1=\tfrac{1}{60}.\end{aligned}$$

■

Exemple 28



Calculons l'intégrale $I=\iint_A(x+y)\,dxdy$ où A est le triangle des sommets $B_1=O=(0,0),\ B_2=(2,0)$ et $B_2=(1,1)$. D'après le graphe, l'ensemble A peut être exprimé sous forme

$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad 0\leq y\leq 1,\ y\leq x\leq 2-y\right\}.$

Alors en appliquant le théorème de Fubini on

$$I=\int_0^1\left(\int_y^{2-y}(x+y)\,dx\right)dy=\int_0^1\left(2-2y^2\right)dy=\frac{4}{3}.$$

■

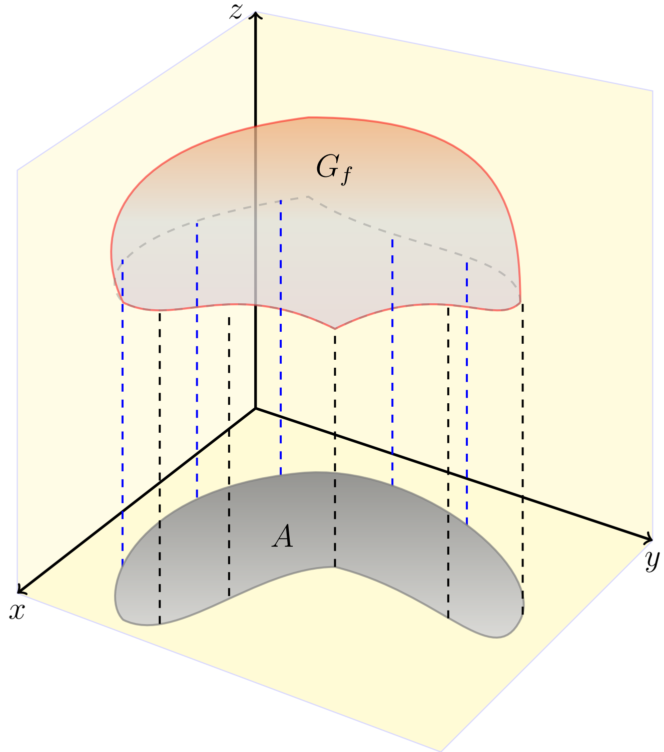
4.2.1 Interprétation géométrique d'une intégrale double

Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur A. Le graphe de f est

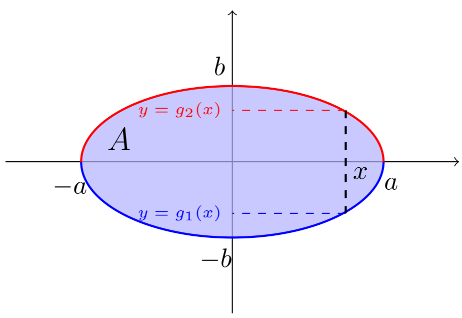
$$G_f = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } (x, y) \in A \text{ et } z = f(x, y)\right\}.$$

L'intégrale $I = \iint\limits_A f(x, y)\, dxdy$ s'interprète comme le volume V du corps délimité par A, la surface G_f et et la surface cylindrique dont les génératrices sont parallèles à l'axe Oz et s'appuient sur la frontière de A.

Lorsque f est la fonction constante qui vaut 1, l'intégrale $I = \iint\limits_A 1 dxdy = m(A)$ représente l'aire, ou la surface du domaine A.



Exemple 29



Calculons l'aire du domaine délimité par l'ellipse centrée en $O = (0, 0)$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0$.
Le domaine $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ on peut le décrire par

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \ -a \leq x \leq a \text{ et } g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \text{ où } g_2(x) = -g_1(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right\}.$$

En appliquant le théorème de Fubini on a

$$m(A) = \iint\limits_A 1dxdy = \int\limits_{-a}^{a} \left(\int\limits_{-g(x)}^{g(x)} dy \right) dx = \int\limits_{-a}^{a} 2b\sqrt{1 - \tfrac{x^2}{a^2}}dx.$$

Par le changement de variable $x = a\sin t$ on voit que l'air de l'ellipse est $m(A) = \pi ab$. ∎

Théorème 114 (Théorème de la moyenne)

Soit A un ensemble convexe mesurable de $\mathbb{R}^2$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur A, alors il existe $(x_0, y_0) \in A$ tel que $f(x_0, y_0)$ égal à la valeur moyenne de f sur A i.e. $f(x_0, y_0) = \frac{1}{m(A)} \iint\limits_A f(x, y)\, dxdy$ où $m(A) = \iint\limits_A 1dxdy$.

4.2.2 Changement de variables dans les intégrales doubles

Théorème 115 (Formule de changement de variables)

Soit A un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{array}{rccl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : & A & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (u, v) & \longmapsto & (x, y) = (\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v)) \end{array}$$

une fonction injective et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A telle que $\det(J_\varphi(u, v)) \neq 0$ où $J_\varphi(u, v)$ est la matrice jacobienne de φ définie par $J_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} \end{bmatrix}$.

Si f est une fonction intégrable sur $\varphi(A)$, alors

$$\iint\limits_{\varphi(A)} f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_A f \circ \varphi(u, v) \left|\det(J_\varphi(u, v))\right| dudv.$$

$$\begin{tikzcd} A \subset \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)"] \arrow[rr, bend left, "f \circ \varphi"] & \varphi(A) \subset \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ (u, v) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & (x, y) = \varphi(u, v) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] & f(x, y) = (f \circ \varphi)(u, v) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \end{tikzcd}$$

Changement en coordonnées cylindriques

Si le domaine ou la fonction est en x^2+y^2, le calcul d'intégrale est souvent plus facile en passant en coordonnées polaires, via l'application injective et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $D = \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$ définie par

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \longmapsto & \varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array}.$$

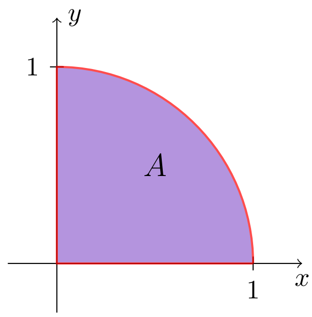
Une première étape consiste en la récriture du domaine d'intégration A pour les couples (x, y) en un domaine $B = \varphi^{-1}(A)$ pour les couples (r, θ). Puisque le Jacobien $\det(J_\varphi(r,\theta))$ est

$$\det(J_\varphi(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r,$$

on a donc

$$\iint\limits_A f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_B f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,rdrd\theta.$$

Exemple 30



Calculons l'intégrale $I = \iint\limits_A xydxdy$ où

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\right\}.$$

On a

$$B = \varphi^{-1}(A) = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\text{ tel que } 0 < r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}.$$

D'où

$$I = \iint\limits_A xydxdy = \int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos\theta\sin\theta rdrd\theta = \int_0^1 r^3dr\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tfrac{1}{2}\sin(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{8}. \qquad \blacksquare$$

4.3 Intégrales triples

Soit A une partie mesurable de $\mathbb{R}^3$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur A. On notera l'intégrale triple de f sur A par $\iiint\limits_A f(x,y,z)\,dxdydz$. Le principe des intégrales triples est le même que pour les intégrales doubles, c'est pourquoi nous allons reprendre le cadre de la section précédente.

4.3.1 Théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^3$

Le théorème de Fubini dans $\mathbb{R}^3$ permet de ramener le calcul d'une intégrale triple à celui d'intégrales doubles et ainsi grâce au théorème analogue énoncé dans $\mathbb{R}^2$, à celui d'intégrales simples.

Il peut avoir différentes formulations suivant la forme du domaine d'intégration A de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 116

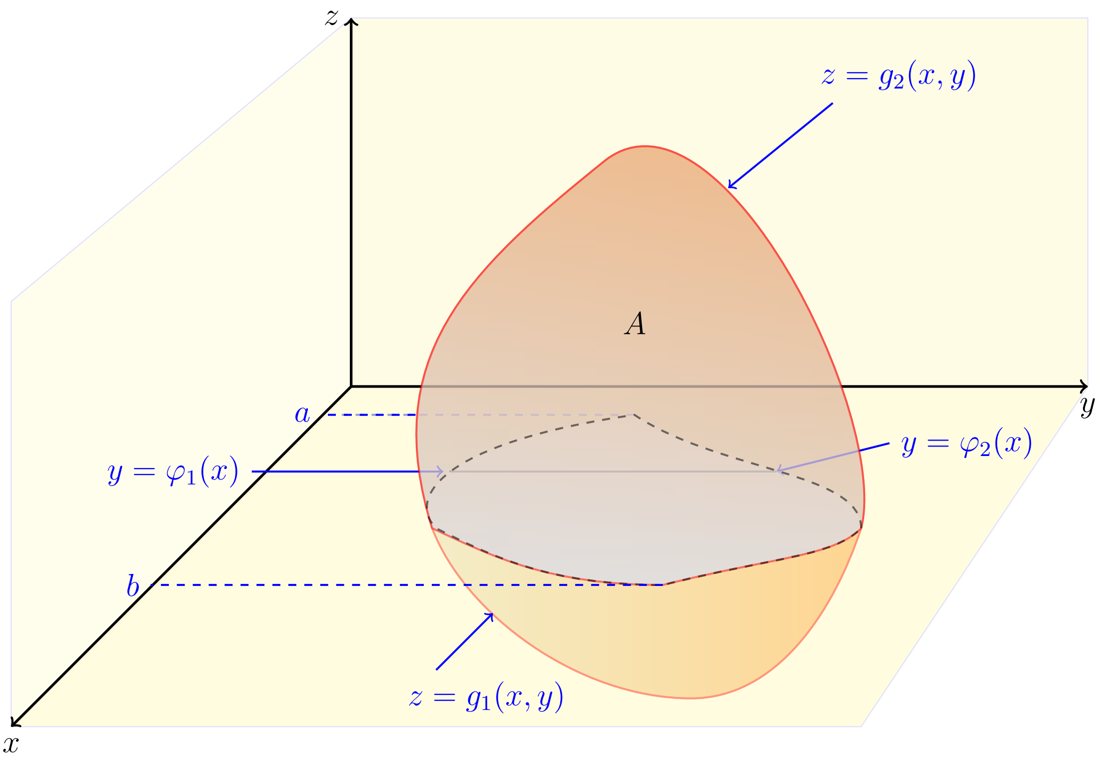
Soit $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y)\ \text{ et }\ (x, y) \in B \subset \mathbb{R}^2\}$, où B est une partie mesurable de $\mathbb{R}^2$ et les fonctions g_1 et g_2 sont continues sur B. Si f est une fonction intégrable sur A alors

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\, dxdydz = \iint\limits_B \left(\int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dxdy.$$

De plus si $B = \{(x, y) \in \mathbb{R},\ \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\ \text{ et } a \leq x \leq b\}$ alors

$$\iiint\limits_A f(x, y, z)\, dxdydz = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left(\int\limits_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx.$$

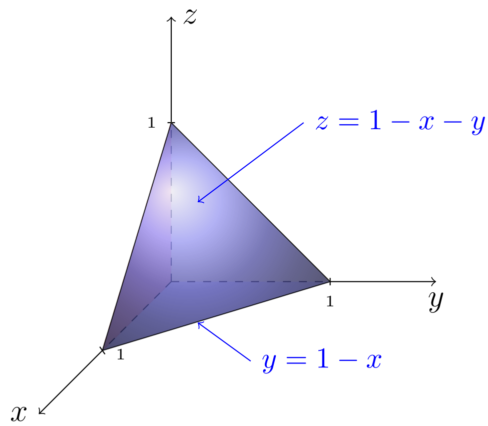
En particulier si $f(x, y, z) = 1$ sur A, l'intégral $\iiint\limits_A 1dxdydz$ représente alors le volume de A.



Remarque 117

- Noter que l'ensemble B est la projection de A sur le plan xOy et l'intervalle $[a,b]$ est la projection de B sur l'axe des x.
- Pour calculer l'intégrale triple d'une fonction intégrable sur un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^3$, on peut procéder dans l'ordre des variables que l'on veut, toutes donnant le même résultat.

Exemple 31



Soit $A = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3,\ x+y+z \leq 1\right\}$.
Calculons l'intégrale $\iiint\limits_A \dfrac{1}{(1+x+y+z)^2} dxdydz$.
Le domaine de l'intégration A peut être exprimé comme

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \begin{array}{l} 0 \leq z \leq 1-x-y, \\ 0 \leq y \leq 1-x \text{ et } 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}.$$

D'après le théorème de Fubini on a

$$\begin{aligned} \iiint\limits_A \frac{1}{(1+x+y+z)^2} dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} \tfrac{1}{(1+x+y+z)^2} dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{1+x+y} \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\operatorname{Log}(2) - \tfrac{1}{2}(1-x) - \operatorname{Log}(1+x) \right) dx = \tfrac{3}{4} - \operatorname{Log} 2. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Exemple 32

Calculons le volume de l'ensemble $A = \left\{(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+)^3,\ x+y+z \leq 1\right\}$ de l'exemple précédent.

Le volume $m(A)$ de A est l'intégrale de la fonction constante $f \equiv 1$ sur l'ensemble A.

On a

$$\begin{aligned} m(A) = \iiint\limits_A 1 dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)\, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \tfrac{1}{2}(1-x)^2 dx = \tfrac{1}{6}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.3.2 Changement de variables dans $\mathbb{R}^3$

Théorème 118 (Formule de changement de variables dans $\mathbb{R}^3$)
Soit A un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^3$ et

$$\begin{array}{rccl} \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) : & A & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v,w) & \longmapsto & (x,y,z) = (\varphi_1(u,v,w), \varphi_2(u,v,w), \varphi_3(u,v,w)) \end{array}$$

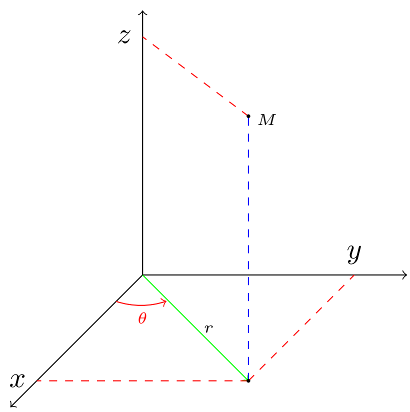
une fonction injective et de classe $\mathcal{C}^1$ sur A telle que $\det(J_\varphi(u,v,w)) \neq 0$ où $J_\varphi(u,v,w)$ est la matrice jacobienne de φ définie par $J_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial w} \end{bmatrix}$.

Si f est une fonction intégrable sur $B = \varphi(A)$, alors

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_{\varphi^{-1}(B)} f \circ \varphi(u,v,w) \left| \det(J_\varphi(u,v,w)) \right| dudvdw.$$

$$\begin{tikzcd} A \subset \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)"] \arrow[rr, bend left, "f \circ \varphi"] & \varphi(A) \subset \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \Cup & \Cup & \Cup \\ (u,v,w) & (x,y,z) = \varphi(u,v,w) & f(x,y,z) = (f \circ \varphi)(u,v,w) \end{tikzcd}$$

Coordonnées cylindriques



Les coordonnées cylindriques d'un point $M = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sont définies par le changement de variables

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r, \theta, z) & \longmapsto & (x,y,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z). \end{array}$$

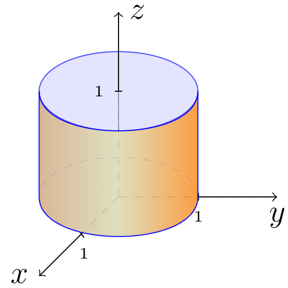
La matrice jacobienne de φ dans ce cas est donnée par

$$J_\varphi(r,\theta,z) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et donc $\left|\det\left(J_\varphi(r,\theta,z)\right)\right| = r$. Si $\varphi(A) = B$ alors

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{\varphi^{-1}(B)} f(r,\theta,z)\,rdrd\theta dz.$$

Exemple 33



Calculons $I = \iiint\limits_A z^{x^2+y^2}dxdydz$ où

$A = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2\leq 1 \text{ et } 0\leq z\leq 1\right\}.$

On utilise le changement de variables en coordonnées cylindriques. On a

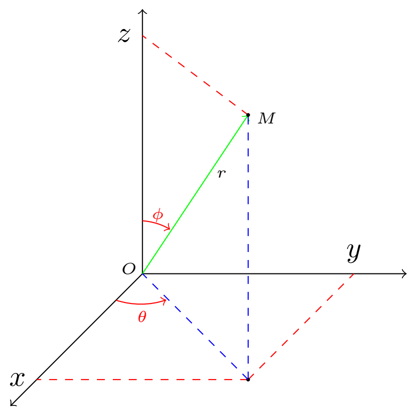
$$\varphi^{-1}(A) = \left\{(r,\theta,z),\ 0<r\leq 1,\ 0\leq\theta<2\pi \text{ et } 0\leq z\leq 1\right\},$$

et alors

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_A z^{x^2+y^2}dxdydz = \iiint\limits_{\varphi^{-1}(A)} z^{r^2}rdrd\theta dz = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^1 z^{r^2}rdz\right)dr\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\tfrac{r}{r^2+1}\right)dr\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\tfrac{1}{2}\operatorname{Log}(2)\,d\theta = \pi\operatorname{Log}(2). \end{aligned}$$

■

Coordonnées sphériques



Les coordonnées sphériques de $M=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ sont définies à partir de la distance r de M à l'origine O, de l'angle θ comme en cylindriques et de l'angle ϕ entre l'axe des z et le vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Elles sont définies par le changement de variables

$$\begin{array}{rccl} \varphi: & \mathbb{R}_+^*\times[0,2\pi[\times[0,\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (r,\theta,\phi) & \longmapsto & (x,y,z) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi). \end{array}$$

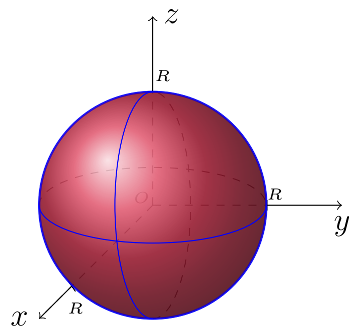
La matrice jacobienne de φ pour le changement en coordonnées sphériques est

$$J_\varphi(r,\theta,\phi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\sin\phi & -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -r\sin\phi \end{bmatrix}.$$

Par conséquent $\left|\det\left(J_\varphi\left(r,\theta,z\right)\right)\right| = r^2\sin\phi$. Alors on a

$$\iiint\limits_{B} f\left(x,y,z\right)dxdydz = \iiint\limits_{\varphi^{-1}(B)} f\left(r,\theta,z\right)r^2\sin\phi dr d\theta d\phi.$$

Exemple 34



Calculons $I = \iiint\limits_{A}\left(1 + a\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz$ où $a\in\mathbb{R}$ et $A = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$. On a

$$\varphi^{-1}\left(A\right) = \left\{\left(r,\theta,\phi\right),\ 0<r\leq R,\ 0\leq\theta<2\pi \text{ et } 0\leq\phi<\pi\right\}.$$

D'où

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_{A}\left(1 + a\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)dxdydz = \iiint\limits_{\varphi^{-1}(A)}\left(1+a\ r\right)r^2\sin\phi dr d\theta d\phi \\ &= \int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R\left(\left(1+a\ r\right)r^2\int\limits_0^{\pi}\sin\phi d\phi\right)dr\right)d\theta = 2\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R\left(1+a\ r\right)r^2dr\right)d\theta \\ &= 2\int\limits_0^{2\pi}\left(\int\limits_0^R\left(1+a\ r\right)r^2dr\right)d\theta = \pi R^3\left(\tfrac{4}{3}+a\ R\right). \end{aligned}$$

Si $a=0$, l'intégrale $I=\frac{4}{3}\pi R^3$ représente le volume de la partie délimité par la sphère centrée à l'origine et de rayon R. ∎