U.S.T.H.B. 2014-2015 Semestre 1 | **Fonctions de plusieurs variables**

Faculté de Mathématiques | **3$^{\text{ème}}$ année LAC**

Série d'exercices n° 2 : Fonctions différentiables

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}, \alpha > 0.$$

Déterminer les valeurs de α pour lesquelles f soit

1) continue en $(0,0)$. **2)** différentiable en $(0,0)$.

Exercice 2 : Étudier l'existence et la continuité des dérivées partielles premières et la différentiabilité pour les fonctions suivantes :

1) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **2)** $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|-y} & \text{si } y \neq |x| \\ 0 & \text{si } y = |x| \end{cases}$

3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ **4)** $f(x,y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}} & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases},$$

où $x = (x_1, ..., x_n)$ et $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et donner l'expression de sa différentielle.

Exercice 4 :

Calculer $d_{(1,1)}f(x,y)$ et $d_{(2,3,4)}g(x,y,z)$ où $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$ et $g(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ les fonctions définies par

$$f(x,y) = \sin\left(x^2 - y^2\right) \text{ et } g(x,y) = (x+y,\ x-y).$$

1) Calculer le gradient de f en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2) Calculer la matrice jacobienne de g en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3) En déduire la matrice jacobienne de $f \circ g$ en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et donner l'expression de $D(f \circ g)(x,y)(h,k)$.