

Série d'exercices n° 5 : Formes différentielles, intégrales curviligne et de surface

Exercice 1 : Calculer les différentielles extérieures des formes différentielles définies sur $\mathbb{R}^3$.

$$1) \omega_1(x, y, z) = 2xy^2 dx + 2x^2 y dy - 2z dz \quad 2) \omega_2(x, y, z) = z dx \wedge dy + x dy \wedge dz + y dz \wedge dx$$

$$3) \omega_3(x, y, z) = (x + y + z) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Exercice 2 : Soit ω la forme différentielle d'ordre 2 définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$\omega(x, y, z) = (-2y + yz) dx \wedge dy + 2x dx \wedge dz - xy dy \wedge dz.$$

1) Montrer que ω est fermée.

2) Soit P un pavé fermé de $\mathbb{R}^3$. Trouver une forme différentielle α de classe $\mathcal{C}^1$ et d'ordre 1 telle que $d\alpha = \omega$ sur P .

Exercice 3 : Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par $\phi(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \sin v)$ et soit U un ouvert contenant $\phi(\mathbb{R}^2)$. Pour chacune des formes différentielles suivantes définies sur U , calculer $\phi^*\omega$. 1) $\omega_1(x, y) = x dx + y dy$ 2) $\omega_2(x, y) = dx \wedge dy$.

Exercice 4 : Calculer les intégrales curvilignes suivantes.

1) $\int_{\gamma} y dx + x dy$, où γ est le segment d'extrémités $A(1, 2)$ et $B(3, 3)$ dans $\mathbb{R}^2$,

2) $\int_{\gamma} z dx + x dy + y dz$, où γ est le segment d'extrémités $A(0, 2, 1)$ et $B(1, 2, 4)$ dans $\mathbb{R}^3$,

3) $\int_{\gamma} y^2 dx + x^2 dy$, où $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 4\}$.

Exercice 5 : Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ et ∂D est son bord.

Calculer puis comparer les intégrales suivantes.

$$1) I_1 = \int_{\partial D} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy, \quad 2) I_2 = \iint_D (2x - 2y) dx dy.$$

Exercice 6 : Soit $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $\psi(u, v) = (2 \cos u \cos v, 2 \sin u \cos v, 2 \sin v)$. Soit $D = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 / -\pi \leq u \leq \pi \text{ et } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$ et S le support de la surface paramétrée orientée $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$. Calculer les intégrales suivantes.

$$I_1 = \iint_S yz dy \wedge dz + zx dz \wedge dx + xy dx \wedge dy, \quad I_2 = \iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy.$$

Exercice 7 : Calculer $\iint_S dy \wedge dz$ où $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ et } x^2 + (y - 2)^2 \leq 4\}$ orientée par le vecteur normal sortant de S .