U.S.T.H.B. 2014-2015 Semestre 1 **Fonctions de plusieurs variables**

Faculté de Mathématiques **$3^{\text{ème}}$ année LAC**

Série d'exercices n° 6 : Équations différentielles

Exercice 1 : Montrer que la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{4} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ est solution de l'équation $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

Discuter le résultat.

Exercice 2 : On considère l'équation différentielle (E_2) : $y' = t^2 + y^2$.

1) Montrer que (E_2) possède une solution maximale unique y qui vérifie $y(0) = 0$.

2) Montrer que y est une fonction impaire. **3)** Étudier la monotonie et le signe de y.

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles suivantes.

a) Équations différentielles à variables séparées.

1) $y' \sin t = y \cos t$, 2) $t^2 y' + y^2 = -1$, **3)** $y = \operatorname{Log} y'$, 4) $y^3 y' = e^t$.

b) Équations différentielles linéaires du premier ordre.

1) $y' + y = \sin t$, 2) $y' - ty = t^2$, **3)** $t^2 y' + y = 1$, 4) $ty' - y = \operatorname{Log} t$.

c) Équations différentielles linéaires du premier ordre avec conditions initiales.

1) $2ty' + y = 1$, $y(1) = 2$, 2) $y' + y = e^{-t}$, $y(0) = 0$.

Exercice 4 : Résoudre les équations différentielles linéaires du second ordre suivantes.

1) $y'' - 3y' + 2y = t^2 - 3t$, 2) $y'' + y' - 2y = 9e^t - 2$, **3)** $y'' + 2y' + 4y = te^t$, $y(0) = 1, y(1) = 0$.

Exercice 5 : Déterminer une équation différentielle homogène, du second ordre à coefficients constants réels $ay'' + by' + cy = 0, a \neq 0$ telle que

1) Les fonctions e^t et e^{2t} soient solutions.

2) Les fonctions $(2\cos t + 3\sin t)\, e^{3t}$ et $(3\cos t + 2\sin t)\, e^{3t}$ soient solutions.

3) La fonction te^{3t} soit solution.

4) La fonction $e^t \cos t$ soit solution.

Exercice 6 : Résoudre les systèmes des équations différentielles linéaires suivants.

1) $\begin{cases} x' = 3x, \\ y' = 5x - 4y \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x' = y, \\ y' = 2x - y \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x' = x + y, \\ y' = -x + 3y \end{cases}$.