

Série n°1 (Ensembles - Applications - Relations)

Exercice 1.

Soit $A = \{1, 2, 3\}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies?

1°) $2 \in A$, 2°) $4 \in A$, 3°) $2 \subseteq A$, 4°) $\{1\} \subseteq A$, 5°) $\{1, 2\} \subset A$, 6°) $\emptyset \in A$, 7°) $\{\{1, 2\}, 3\} = A$.

Exercice 2.

Considérons les ensembles suivants :

$A = \{1, 2, 5\}$, $B = \{\{1, 2\}, 5\}$, $C = \{\{1, 2, 5\}\}$, $D = \{5, 1, 2\}$, $E = \{\{1, 2\}, 5\}$, $F = \{\{1, 2\}, \{5\}, 5\}$, $G = \{5, \{1\}, \{2\}\}$.

1. Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclusion existantes entre ces ensembles?
2. Donner le nombre d'éléments de A , C , E .
3. Déterminer $A \cap B$, $F \cup G$.
4. Quel est $\mathcal{C}_D A$?

Exercice 3.

Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Simplifier les expressions suivantes :

$\overline{A \cup B}$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cup (A \cap B)$, $\overline{A} \cup (A \cup \overline{B})$.

Exercice 4.

Soient les ensembles $E = \{1, 3\}$, $F = \{1, 2\}$ et $G = \{0, 3\}$. Déterminer les ensembles suivants :

1. $E \times F$, $F \times E$, $(F \times E) \cap G$, $F \times (E \cap G)$.
2. $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(E \cap G)$, $\mathcal{P}(E \cup G)$, $\mathcal{P}(F \times (E \cap G))$.

Exercice 5.

Soit l'application $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par : $f(x) = x^2$ et $A = \{1\}$ et $B = \{-1\}$.

Calculer $f(A \cap B)$, $f(A)$, $f(B)$, $f^{-1}(f(A))$ et $f(f^{-1}(B))$. Conclure.

Exercice 6.

Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f n'est ni injective ni surjective.
2. Donner un ensemble de départ pour que f soit injective et un ensemble d'arrivée pour que f soit surjective.
3. Dans quel cas f est bijective? Donner l'expression de $f^{-1}(x)$.
4. Soit $A = \{-1, 2, 3\}$, $B = [0, 1[$ et $C = [-1, 0]$. Déterminer $f(A)$, $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$, $f^{-1}(C)$.

Exercice 7.

Sur l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4\}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ dont le graphe est l'ensemble

$$G = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

Cette relation est-elle réflexive? Symétrique? Antisymétrique? Transitive

Exercice 8.

On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow |x^2 - 1| = |y^2 - 1|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
2. On note $\dot{x}$ la classe d'équivalence de x .

i Déterminer $\dot{0}$, $\dot{1}$, puis $\dot{x}$ pour tout x dans $\mathbb{R}$.

ii Déterminer suivant les valeurs de x , le nombre d'éléments de chaque classe d'équivalence $\dot{x}$.

Exercice 9.

On définit sur $\mathbb{R}$ une relation $\mathcal{R}$ par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = x - y.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer le graphe de $\mathcal{R}$.
3. Déterminer les classes d'équivalence des réels $0, 1$, et $\frac{1}{2}$.

Exercice 10.

Les relations suivantes sont-elles des relations d'ordre?

1. Sur $\mathbb{Z}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ est divisible par 3.
2. Sur $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, $A\mathcal{R}B \Leftrightarrow 0 \in A$ et $0 \notin B$
3. Sur $\mathbb{R}$, $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow (x = y)$ ou $(\exists n \in \mathbb{N}, x < y \leq n)$?