USTHB
Faculté des Mathématiques

$1^{\text{ère}}$ Année STU, Sections : A, E
Année universitaire : 2012/2013

Série n°5 (Limites, Continuité et Dérivabilité)

Exercice 1.
Déterminer les limites suivantes :

1°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$; 2°) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})$; 3°) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x+2}{x^2\ln x}$; 4°) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$;
5°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin mx}{\sin nx}$, $m,n\in\mathbb{R}$; 6°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$; 7°) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{x+2}$;
8°) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (tgx)(1-\sin x)$;9°) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x-1$; 10°) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x-e^{x^2}}{x-x^2}$;
11°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos px-\cos qx}{x^2}$, $p,q\in\mathbb{R}$; 12°) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+ax)}{x}$; 13°) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x^2-\pi^2}$.

Exercice 2.
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

1°) $f_1(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; 2°) $f_2(x)=\ln(\ln(x-1))$; 3°) $f_3(x)=\ln(x^3-1)$; 4°) $f_4(x)=tg(\frac{1-x}{1+x})$;
5°) $f_5(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x+1}}$.

Exercice 3.
Étudier la continuité des fonctions suivantes :

$$f_1(x)=\begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases} ;\ f_2(x)=\begin{cases} \frac{\sin^2(\pi x)}{x-1} & si\ x\neq 1 \\ 0 & si\ x=1 \end{cases} ;$$
$$f_3(x)=\begin{cases} -2x & si\ x\leq -\pi/2 \\ a\sin x+b & si\ -\pi/2<x\leq \pi/2 \\ \cos x & si\ x>\pi/2 \end{cases} .$$

Exercice 4.
Les fonctions suivantes peuvent-elles être prolongées par continuité au point $x=0$?

$f_1(x)=x\cos(\frac{1}{x})$; $f_2(x)=\frac{\sin(2x)}{\sqrt{x+4}-2}$; $f_3(x)=\frac{tgx-\sin x}{x^3}$; $f_4(x)=e^{1/x}$.

Exercice 5.
1. *Montrer que l'équation* $\sin(1+x)=x$ *admet au moins une racine réelle* r *telle que* $0<r<1$.
2. *Montrer que l'équation* $x^5+5x+4=0$ *admet une unique racine réelle.*

Exercice 6.
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point x_0 indiqué :

1°) $f_1(x)=|\sin x|$, $x_0=0$;
2°) $f_3(x)=\begin{cases} \frac{\sin^2(\pi x)}{x-1} & si\ x\neq 1 \\ 0 & si\ x=1 \end{cases}$, $x_0=1$;
3°) $f_4(x)=\sqrt{|x-2|}$, $x_0=2$.

Exercice 7.
Pour chacune des fonctions suivantes, calculer f' :

1°) $f_1(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; 2°) $f_2(x) = \ln(\ln(x-1))$; 3°) $f_3(x) = e^{\sqrt{x^2-4x+3}}$; 4°) $f_4(x) = tg(\frac{1-x}{1+x})$;
5°) $f_5(x) = \sqrt{x+2\sqrt{x+1}}$; 6°) $f_6(x) = \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$; 7°) $f_7(x) = \sqrt[3]{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$.

Exercice 8.
Soit
$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x}) & si\ x \neq 0 \\ 0 & si\ x = 0 \end{cases} ,\ n \in \mathbb{N}^*.$$
Étudier suivant les valeurs de n :
a) *La continuité de f.*
b) *La dérivabilité de f.*
c) *La continuité de la fonction dérivée.*

Exercice 9.
Calculer les dérivées d'ordre n des fonctions définies par :

1°) $f_1(x) = \cos x$; 2°) $f_2(x) = x^2 \sin 3x$; 3°) $f_3(x) = \frac{1}{1-x^2}$; 4°) $f_4(x) = e^x \sin x$.

Exercice 10.
Peut-on appliquer le théorème de Rolle dans les cas suivants :

1°) $f_1(x) = \sqrt[3]{8x-x^2}$ *sur* $[0,8]$; 2°) $f_2(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ *sur* $[0,16]$.

Exercice 11.
En appliquant la règle de l'Hôpital, calculer les limites suivantes :
1°) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$; 2°) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin x}$; 3°) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; 4°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2}$; 5°) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1-\cos x})$;
6°) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12.
On désire fabriquer une boite à chaussures sans couvercle ayant un volume maximal à partir d'une plaque de carton carrée de côté a. Pour cela on découpe quatre carrés dans les coins de la plaque pour obtenir une croix, puis on relève les bords.
Déterminer la hauteur de la boite obtenue.

Exercice 13.
On dispose d'une feuille d'aluminium d'épaisseur constante et d'une surface donnée S; avec laquelle on désire fabriquer par emboutissage une casserole dont le volume serait maximal.
Déterminer alors la relation devant exister entre le rayon R et la hauteur h.