

Série n°7 (Matrices)

Exercice 1 :

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

- a) Calculer (si le produit a un sens) AB , BA , BC , CD , DC , DA , AD , A^t , B^t , C^t , $(AB) + C$.
b) Soient $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$. Expliquer pourquoi $(P + Q)^2 \neq P^2 + 2PQ + Q^2$.

Exercice 2 :

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^3 et déduire $(I + A)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3 :

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \\ 2 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 :

Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \\ -5 & 7 & 1 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 :

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- a) Calculer A^n , $n \in \mathbb{N}$.
b) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1} .
c) En déduire $(A^{-1})^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 :

Résoudre les systèmes suivants par la méthode de Cramer et la méthode de Gauss :

$$1) \begin{cases} x + 5y = 8 \\ 3x + y = 9 \end{cases}, \quad 2) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y - z = 5 \\ -x + 2y - 3z = -4 \end{cases}, \quad 3) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 1 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases},$$

$$4) \begin{cases} 2x + y + 4z + 3t = 1 \\ -2x + y - 5z = 1 \\ 2x + 5y + 3z + 11t = 0 \\ -2x + 3y - 4z + 6t = 1 \end{cases}, \quad 5) \begin{cases} x - 3y + z = 11 \\ 2x - 6y + z = 5 \\ 3x - 4y + 3z = 9 \end{cases}.$$