

Ensembles, Applications et Relations

I) Ensembles: (تعليق)

1) Définitions:

- Un ensemble est une collection d'objets, rassemblés selon une propriété commune.

Exemples: • $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ ens des entiers naturels.

• $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ens des entiers relatifs

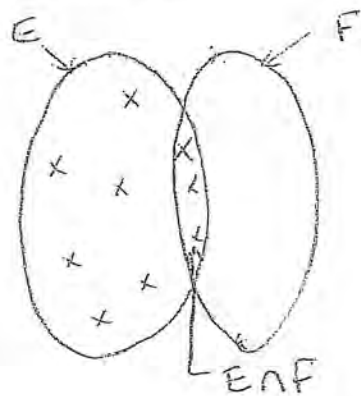
• Ens des nbres pairs

• Ens des étudiants.

- $x \in E$ signifie que x est un élément de E .
- $x \notin E$ " " " n'est pas un élément de E .
- on note $\emptyset$ l'ensemble vide.

2) Opérations sur les ensembles:

• Intersection



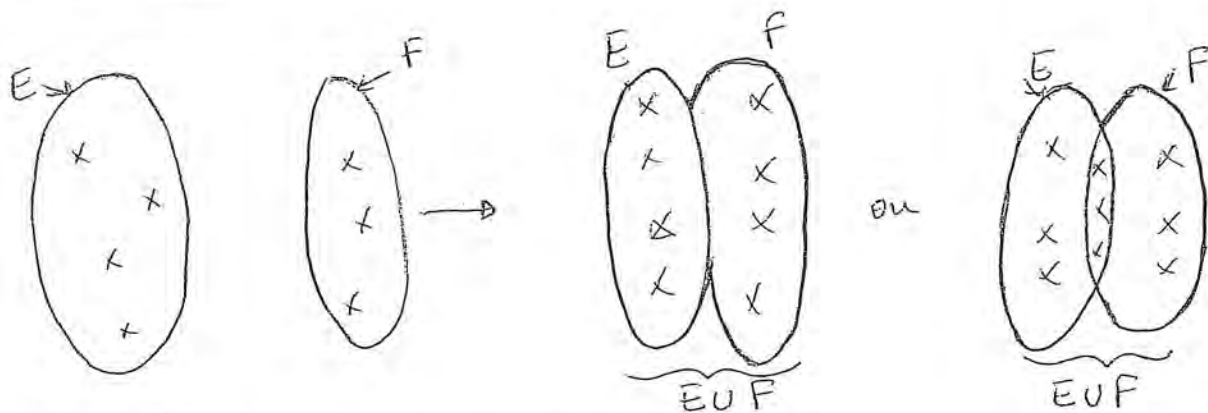
$x \in E \cap F$ signifie $x \in E$ et $x \in F$
 $\Leftrightarrow$

Exemples:

$E = \{-1, 3, 0\}$, $F = \{1, 3\} \rightarrow E \cap F = \{3\}$.

$F = \{1\}$ alors $E \cap F = \emptyset$.

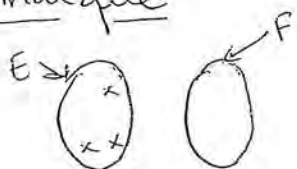
Réunion:



$x \in E \cup F$ signifie $x \in E$ ou $x \in F$.

- Exemples:
 $- E = \{1, 2, 5\}, F = \{0, -1\} \rightarrow E \cup F = \{0, -1, 1, 2, 5\}$
 $- E = \{1, -1\}, F = \{1, 3\} \rightarrow E \cup F = \{1, -1, 3\}$

- Remarque



E et F sont disjoints signifie que $E \cap F = \emptyset$
 donc $E \cap F = \emptyset$ signifie $(\forall x \in E, x \notin F)$ et $(\forall x \in F, x \notin E)$.

si $E = \{1, 2\}, F = \{3\} \rightarrow E \cap F = \emptyset$

3) Produit Cartésien:

Définition: l'ens des couples (x, y) tel que $x \in E$ et $y \in F$ est appelé produit cartésien de E dans F et il est noté $E \times F$, autrement dit:

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.$$

Exemples:
 $E \times F = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

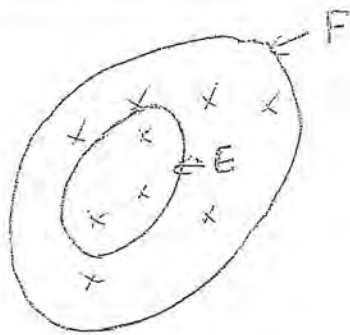
• $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$

• $E = \{1, 3\}, F = \{1, 2\}$ Déterminer $E \times F, F \times E$.

• $E = [0, 1], F = [-2, 2], E \times F = ?$ graphiquement.

4) Parties d'un ensemble:

Inclusion:



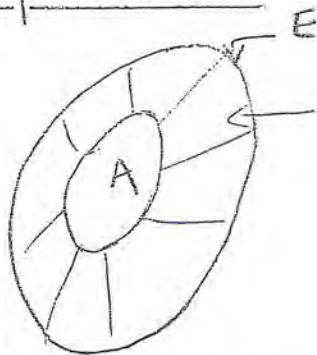
• $E \subset F$ signifie que tous les elts de E sont dans F i.e. $\forall x \in E, x \in F$.

• $E = F$ signifie $E \subset F \wedge F \subset E$.

Exemples:

- $A = \{1, 5\}$, $B = \{1, -1, 5\}$, $A \subset B$ et $B \not\subset A$
- $A = \{-3, 5, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0\}$, $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$

Complémentaire:



$C_E^A = \bar{A}$ la complémentaire d'une par A de E ; c'est l'ens des elts de E qui ne sont pas dans A .

Exemple: $E = \{1, 2, 3, 5\}$, $A = \{2, 3\}$, $C_E^A = ?$, $\bar{\bar{A}} = A$ (à vérifier).

5) L'ensemble des parties d'un ens:

• Etant donné un ensemble E , on désigne par $\mathcal{P}(E)$ l'ens. des parties de E i.e. $\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$

• Req: l'ens $\emptyset$ et E sont des éléments de $\mathcal{P}(E)$.

• Exemple: $E = \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathcal{P}(E) = ?$

6) Opérations sur les parties d'un ens: A, B et C des parties de E

$$\begin{cases} A \cap B = B \cap A \\ A \cup B = B \cup A \end{cases}$$

$$\begin{cases} (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \\ \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B} \end{cases}$$

II) Applications:

1) Généralités:

- Définitions: Etant donné deux ensembles E et F .

- on dit que f est une application de E dans F , si tout élément x de E lui correspond un unique élément y de F .
- on dit que y est l'image de x par f (ou x est un antécédent de y par f) on note $y = f(x)$
- on écrit : $f : E \longrightarrow F$
 $x \longmapsto f(x)$.

autrement dit, f application $\Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2)$.

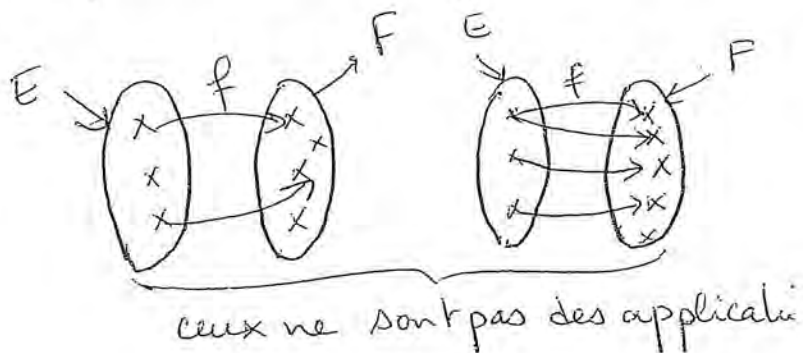
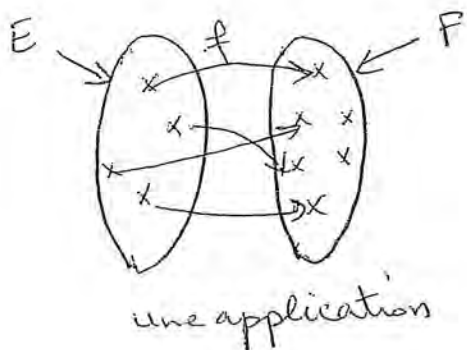
- E est appelé l'ensemble de départ, F l'ensemble d'arrivée de f .

- Notations et remarques:

- 2 applications f et g sont égales si elles ont le même ens de départ E et le même ens d'arrivée F et si : $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.
- L'ens des couples $\{(x, f(x)) / x \in E\}$ est une partie de l'ens produit $E \times F$, qu'on appelle le graphe de f (ou l'application f).

- Exemples d'applications:

- on note $\text{Id}_E : E \longrightarrow E$
 $x \longmapsto \text{Id}_E(x)$ l'application identité définie par :
 $\text{Id}_E(x) = x$
- $E = F = \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) = a$ est dite application constant



2) Image d'une partie par une application:

- Définition: Soit E, F 2 ens, $A \subset E$ et $f: E \rightarrow F$ ap
on appelle image de A par f le sous-ensemble:

$$f(A) = \{ f(a) \mid a \in A \}$$

on écrit: $y \in f(A) \Leftrightarrow \exists a \in A, f(a) = y$.

- Cas particuliers:

• $f(\emptyset) = \emptyset$, $f(\{a\}) = \{f(a)\}$ $a \in E$.

• $f(E)$ est l'ens de toutes les images par f , on note
 $\text{Im } f = f(E)$.

- Exemples: • $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x^2, A = [-1, 1], f(A) = ?$ (De

• $f: [0, 1] \rightarrow [0, 2] \mid f(x) = 1 - x, A = [0, \frac{1}{2}], f(A) =$

- Propriétés: Soit A, B deux parties quelconques de E , on a
• $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$ • $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ • $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

3) Image réciproque d'une partie par une application:

- Définition: Soit $f: E \rightarrow F, B \subset F$.

On appelle image réciproque de B par f l'ens $f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$
on peut écrire: $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

- Remarques:

• $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ • $\forall b \in F, f^{-1}(\{b\}) = \{x \in E \mid f(x) = b\}$.

• ne pas confondre $f^{-1}: \mathcal{P}(F) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ avec la bijection réciproque (prochain paragraphe)

- Exemples: • $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x^2$, pour $B = \{\frac{1}{4}\}, f^{-1}(B) = \{\pm \frac{1}{2}\}$.

• $f: [0, 1] \rightarrow [0, 2] \mid f(x) = 1 - x$, pour $B =]0, \frac{1}{2}[$, $f^{-1}(B) =]\frac{1}{2}, 1[$.

• Propriétés: A, B deux parties de F , on a:

• $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ • $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

• $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$

• à savoir: les ens $f^{-1}(B(A))$ et $f^{-1}(C(A))$ ne sont pas tjrs comparables.
1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

4) Composition des applications:

- Définition: Soit $f: E \rightarrow F$ et $g: F \rightarrow G$ 2 applications.
La composée de f par g , notée $g \circ f$ est l'application de E vers G définie par: $\forall x \in E, g \circ f(x) = g(f(x))$

$$\text{c'est } g \circ f: E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

$$x \mapsto f(x) = y \mapsto g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$$

- Remarques et propriétés:

- si $h: G \rightarrow H$, application, alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, on dit que "o" est associative.

- si $f: E \rightarrow F$ application, alors $\text{Id}_F \circ f = f$ et $f \circ \text{Id}_E = f$

- si $f: E \rightarrow E$:

$$* f^0 = \text{Id}_E, \forall n \in \mathbb{N}^*, f^n = f^{n-1} \circ f = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n$$

- "o" n'est pas commutative. c'est $f \circ g \neq g \circ f$

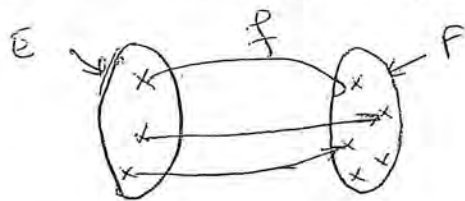
exemples: - $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x^2, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid g(x) = x + 3$.

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid f(x) = x^2, g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid g(x) = x^3, f \circ g \neq g \circ f$

5) Applications injectives, surjectives, bijectives:

- Définitions: Soit $f: E \rightarrow F$ une application.

- * on dit que f est injective (ou f une injection), si tout élément y de F possède au plus un antécédent par f .



donc 2 éléments différents de E ont des images différentes par f . On écrit:

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow \forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

ou

$$(\Rightarrow) f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Définition: 2 applications f et g sont égales si:

- 1. elles ont le m^{ème} ens de départ E et m^{ème} ens d'arrivée F
- 2. $\forall x \in E, f(x) = g(x)$.

Exemples: on considère les applications:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = x^2, \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid g(x) = x^2, \quad h: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \mid h(x) = x^2$$

$$k: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid k(x) = x^2 \text{ alors } f \neq g, f \neq h, f \neq k.$$

5) Applications injectives, surj, bij:

Définitions: soit $f: E \rightarrow F$ une application, on dit que:

- 1. f est injective si tout élément de F , possède au plus un antécédent
- 2. f est surjective si " " " " au moins " "
- 3. f est bijjective si f est à la fois injective et surjective.

* La 1^{ère} ppte est équivalente à dire que: 2 el^{ts} distincts de E ne peuvent pas être des antécédents d'un même ^{elt} de F , on écrit alors

$$f \text{ inj} \Leftrightarrow \forall x, x' \in E, (x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x'))$$

$$\Leftrightarrow \forall x, x' \in E, (f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$$

$$* f \text{ surj} \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E \mid y = f(x)$$

D'où, on déduit:

$$f \text{ bij} \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists ! x \in E \mid y = f(x)$$

Exemple: on considère l'appli $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow F = ? \mid f(x) = \frac{x+5}{x-2}$

avec F un sous-ens de $\mathbb{R}$ qu'on demande de déterminer pourq f soit bijective.

Déterm F prque l'appli f soit bij et donner l'appli inverse

Prop: $f: E \rightarrow F, g: F \rightarrow G$

$$1 - (g \circ f) \text{ inj} \Rightarrow f \text{ inj}$$

$$2 - (g \circ f) \text{ surj} \Rightarrow g \text{ surj}$$

III) Relations binaires:

- 1- Définition ①: on appelle relation binaire sur E, toute ^{opération} (application) R entre deux objets.
On note $x R y$ et on lit "x est en relation avec y".

- 2- Propriétés: Etant donnée une relation binaire R sur E , on dit que:

- R est réflexive si: $\forall x \in E, x R x$
- R est transitive si: $\forall x, y, z \in E, [(x R y \text{ et } y R z) \Rightarrow x R z]$
- R est symétrique si: $\forall x, y \in E, (x R y \Rightarrow y R x)$
- R est antisymétrique si: $\forall x, y \in E, (x R y \text{ et } y R x \Rightarrow x = y)$

Exemples:

- $x, y \in E, x R y \Leftrightarrow x = y$.
- A, B des parties de $E, A R B \Leftrightarrow A \subset B$

3- Relations d'équivalence

- Définition ①: on dit qu'une relation R sur E est une relation d'équivalence si R est à la fois réflexive, transitive et symétrique.

- Définition ②: Soit R une relation d'équivalence sur E .
- on dit que 2 éléments x et $y \in E$ sont équivalents si $x R y$
 - on appelle, classe d'équivalence d'un élément x de E , l'ensemble $\bar{x} = \{y \in E / x R y\} = \bar{x}$.
 - On appelle ens quotient de E par la relation R , l'ens des classes d'équivalence. Cet ens est noté E/R .

Exemples

1- L'égalité est une relation d'équivalence sur E .

2- Dans $\mathbb{R}$, on définit la relation R par :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x R y \Leftrightarrow x^2 - 1 = y^2 - 1$$

Montrer que R est d'équivalence et donner l'ens quotient

3- E et F deux ens, $f: E \rightarrow F$, on définit R comme suit :

$$\forall x, y \in E, x R y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

R est une relation d'équivalence

2'- soit R la relation sur $\mathcal{P}(E)$ définie par : $A R B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ ou } A = \bar{B})$
 R est une relatⁿ d'eq.

4) Relations d'ordre :

- Définition ① : une relation R sur E , est dite relation d'ordre si R est à la fois, réflexive, transitive et antisymétrique

Dans la littérature, les relations d'ordre sont souvent notées " $\leq$ ".

- Définition ② : soit " $\leq$ " une relation d'ordre sur E .

- on dit que 2 éléments x et y de E sont comparables si :

$$x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

- on dit que " $\leq$ " est une relation d'ordre total (ou E est totalement ordonné) si tous les éléments de E , deux à deux, sont comparables. Si non, on dit que la rel " $\leq$ " est une relation d'ordre partiel (ou que E est partiellement ordonné par " $\leq$ ").

- Exemples :

- $\forall A, B$ parties de E , $A R B \Leftrightarrow A \subset B$, R est un ord partiel sauf si $E = \emptyset$ ou $E = \{a\}$.

- dans $\mathbb{Z}^*$, on définit la relation " $\leq$ " par :

$$\forall m, n \in \mathbb{Z}^*, m \leq n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}^*, m = k \cdot n.$$

Montrer que " $\preceq$ " est un ordre partiel.

X Ex 1 : soit $A = \{1, 2, 3\}$, les propo suiv sont elles vraies ?

- 1) $2 \in A$, 2) $4 \in A$, 3°) $2 \subseteq A$ 4°) $\{1\} \subseteq A$, 5°) $\{1, 2\}$
6°) $\emptyset \in A$, 7°) $\{\{1, 2\}, 3\} = A$

X Ex 2 : 1°) Quelles sont les relations d'égalité ou d'inclure existant entre ces ens ?

$$A = \{1, 2, 5\}, B = \{\{1, 2\}, 5\}, C = \{\{1, 2, 5\}\}, D = \{5, 1, 2\}$$
$$E = \{\{1, 2\}, \{5\}\}, F = \{\{1, 2\}, \{5\}, 5\}, G = \{5, \{1\}, \{2\}\}$$

2°) Donner le nombre d'elts de A, C, E

3°) Déterminer $A \cap B, F \cup G$

4°) Quel est C_D^A

Ex 3 : Donner un exple dans chacun des cas suivants :

- 1°) $(A \cup B = A \cup C)$ et $B \neq C$ 2°) $A \in B$ et $A \subseteq B$

Ex 4 : simplifier les expressions suiv :

1°) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}, \overline{A} \cup (A \cap B), \overline{A} \cup (A \cup B)$

X Ex 5 Soient $E = \{1, 3\}, F = \{1, 2\}$ et $G = \{0, 3\}$.

Déterminer

1°) $E \times F, F \times E, (F \times E) \cap G, F \times (E \cap G)$

2°) $P(E), P(E \cap G), P(E \cup G), P(F \times (E \cap G))$

1) Définition axiomatique de $\mathbb{R}$: ($\mathbb{R}$) (نقطة حركية)

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est :

a) un corps commutatif : i.e.

L'addition dans $\mathbb{R}$, notée $(+)$ et la multiplication notée $(\cdot)$ vérifient les 9 propriétés suivantes :

- 1- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x+y)+z = x+(y+z)$ ($(+)$ est associative)
- 2- $\forall x \in \mathbb{R}, 0+x = x+0 = x$ (0 élément neutre pour $(+)$)
- 3- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y = -x \in \mathbb{R} \mid x+y = y+x = 0$ ($-x$ est le symétrique de x pour $(+)$)
- 4- $\forall x, y \in \mathbb{R}, x+y = y+x$ ($(+)$ est commutative).
- 5- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ ($(\cdot)$ est associative)
- 6- $\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ (1 élément neutre pour $(\cdot)$).
- 7- $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}^* \mid x \cdot y = y \cdot x = 1$ ($\frac{1}{x}$ est le symétrique de x pour $(\cdot)$)
- 8- $\forall x, y \in \mathbb{R}, x \cdot y = y \cdot x$ ($(\cdot)$ est commutative).
- 9- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \begin{cases} x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \\ (y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x \end{cases}$ (distributivité de $(\cdot)$ par rapport à $(+)$)

• $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ vérifiant les propriétés de 1 à 9 est un corps commutatif.

b) un corps ordonné :

La relation d'ordre " $\leq$ " satisfait aux ^{propriétés} conditions suivantes :

- $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, on a :
- 1- $x \leq y$ et $y \leq x \Rightarrow x = y$
- 2- $(x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$
- 3- $x \leq y$ ou $y \leq x$
- 4- $x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z$
- 5- $\forall x > 0, y > 0, x \cdot y > 0$
- 6- Si $0 < x \leq y \Rightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$

2) Intervalle de $\mathbb{R}$: soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$.

on définit les ensembles suivants, dits intervalles de $\mathbb{R}$:

- 1. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ est dit intervalle fermé
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ " " " semi-fermé (ou semi-ouvert)
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ " " " " "
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ est dit intervalle ouvert.

Cas particuliers:

• $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ Exple: $\mathbb{R}_{\geq a}$

• $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ Exple: $\mathbb{R}_{> a}$

• $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ Exple: $\mathbb{R}_{< b}$

• $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ Exple: $\mathbb{R}_{\leq b}$

Remarque:

• $[a, a] = \{a\}$, $]a, a[= \emptyset$.

Proposition: (Formule du binôme).

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} b^p \quad \text{avec} \quad C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Exple: $(a+b)^2 = ? \quad a^2 + 2ab + b^2$
 $= C_2^2 a^2 + C_2^1 a \cdot b + C_2^0 b^2 = \sum_{p=0}^2 C_2^p a^{2-p} b^p$

a) Définition: on appelle valeur absolue d'un nombre réel x notée $|x|$, le nombre réel positif qui satisfait aux conditions suivantes:

$$\begin{aligned} - |x| &= x & \text{si } x \geq 0 \\ - |x| &= -x & \text{si } x < 0 \end{aligned} \quad \text{alors } |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Exemples: $|2| = 2$, $|-5| = 5$, $|0| = 0$

b) Propriétés: (الخصائص).

1. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$. 2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

3. $\forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}_+ \begin{cases} |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \\ |x| > a \Leftrightarrow \end{cases}$

4. $\forall x \in \mathbb{R}, -|x| \leq x \leq |x|$

5. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x \cdot y| \leq |x| \cdot |y|$

6. $|x + y| \leq |x| + |y|$ dite Inégalité triangulaire.

7. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

4) Partie entière d'un nombre réel:

Tout nombre réel x peut être écrit sous la forme:

$$x = m + \alpha \quad \text{où } 0 \leq \alpha < 1 \text{ et}$$

$$m = [x] \text{ est la partie entière de } x \text{ (الجزء الصحيح لـ } x \text{)}.$$

Remarque:

on vérifie facilement que $\forall x \in \mathbb{R}, [x] \leq x < [x] + 1$.

Exemples: $[1,4] = 1$, $[-2,5] = -2$. faire un dessin.

Y Corps des nombres complexes:

1) Définitions:

- On appelle nombre complexe z , toute expression de la forme
 $z = a + ib$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et "i" l'unité imaginaire de z .

on note: $a = \operatorname{Re}(z)$: partie réelle de z (الجزء الحقيقي)
 $b = \operatorname{Im}(z)$: " " imaginaire de z (الجزء التخيلي)
 $i = \sqrt{-1}$ où $i^2 = -1$.

- pour $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, on définit "et", "par":

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{cases}$$

* l'élément neutre pour (+) est $z = 0$.

* $z' = -a - ib$ est le symétrique de $z = a + ib$ pour la loi (+)

* $z = 1$ est l'elt neutre pour ($\cdot$).

* $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \frac{-b}{a^2 + b^2}$ est le symétrique de $z = a + ib$ pour ($\cdot$) ($z \neq 0$)

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ainsi défini est un corps commutatif.

2) Définition et propriétés

- Soit $z = a + ib$, le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$ est appelé le conjugué de z ; et on a les propriétés suivantes:

$$z + \bar{z} = 2a$$

$$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}'$$

Exemples: Ecrire sous forme algébrique les nombres suivants:

$$z_1 = (1+i)(1-i)$$

$$z_2 = \frac{1}{2-i}$$

$$z_3 = \frac{1-i}{1+i}$$

soit $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$

On appelle module de z ($\text{mod } z$), noté $|z|$, le nombre réel positif $\sqrt{a^2 + b^2}$ et on a:

$$|z| \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

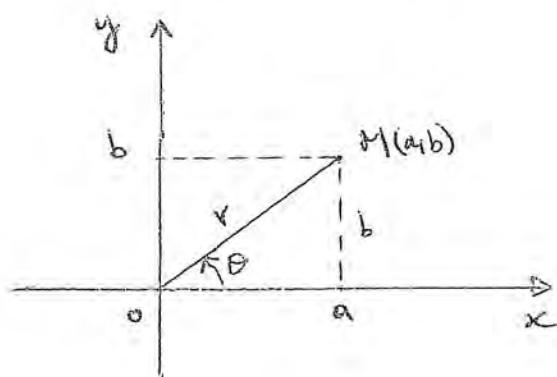
$$|\bar{z}| = |z| = |-z|$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad z_2 \neq 0$$

4) Représentation géométrique d'un nombre complexe:

Tout nombre complexe $z = a + ib$ peut être représenté sur le plan xOy par un point $M(a, b)$, le point M est donc considéré comme l'image géométrique du nombre z .



$$r = d(O, M) = \|\vec{OM}\| = |z|$$

θ : La mesure de l'angle $(\vec{Ox}, \vec{OM})$ qu'on appelle argument de z et on note $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, $= \theta [2\pi]$.

D'après la figure ci-dessus, on a:

$$\begin{aligned} a &= r \cos \theta \\ b &= r \sin \theta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad z = a + ib = r \cos \theta + i r \sin \theta = r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

Donc tout nombre complexe z peut être écrit sous forme trigonométrique:

$$\boxed{\begin{aligned} z &= r (\cos \theta + i \sin \theta) \\ z &= |z| (\cos \theta + i \sin \theta) \end{aligned}}$$

Nous avons:

$$\arg(-z) = (\pi + \arg z) + 2k\pi$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$$

$$\arg z^n = n \cdot \arg z + 2k\pi$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg z + 2k\pi$$

$$\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$$

Exercice: Mettre sous forme algébrique, puis trigonométrique les nombres complexes suivants: $\frac{1}{i}$, $(1+ci)(1-i)$, $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$

5). Proposition (Formule de Moivre).

pour tout réel θ on pose: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, alors:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \text{ce} \quad \boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta} \rightarrow$$

nous avons:

pour tout $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, la formule:

$$\boxed{z^n = r^n (\cos n\theta + i\sin n\theta)} \quad \text{est dite formule de Moivre}$$

Application: appliquer la formule de Moivre pour $r=1$ et $n=2$, pour exprimer $\sin 2\theta$ et $\cos 2\theta$ en fonction des puissances de $\sin\theta$ et $\cos\theta$. (Mêmes questions pour $r=1$ et $n=3$).

Remarque importante: et inversement, on peut exprimer $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$ en fonction de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ c'est ce qu'on appelle la linéarisation, en utilisant la formule d'Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (voir T.D)

soit a un nombre complexe tel que $a = |a| (\cos \theta + i \sin \theta)$

Résoudre l'équation $z^n = a$, revient au calcul de $\sqrt[n]{a} = ?$

• si $a = 0$, alors $z^n = 0$ admet comme unique solution $z = 0$.

• si $a \neq 0$, l'équation $z^n = a$, admet n solutions qui ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[n]{|a|} \left(\cos \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right) \quad \underline{k=0, 1, \dots, n-1} \\ z_k &= \sqrt[n]{|a|} e^{i \left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)} \end{aligned}$$

Remarque: La racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe a donc n valeurs différentes.

Exemples:

1- Calculer la racine cubique de l'unité, ou bien résoudre $z^3 = 1$.

2- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -6i + 8$ en utilisant la forme algébrique.

7) Résolution des équations algébriques du second degré :
 Soient, $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $az^2 + bz + c = 0 \dots (E)$ une équation
 on pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

• si $\Delta > 0$, $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ sont solutions de (E) ;

• si $\Delta < 0$; $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ // //

Exemples : résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

• $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$, • $z^2 + (1-i)z - 2+i = 0$.

Req : si $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\sqrt{\Delta}$ va être réelle ou imaginaire pure,
 et dans ce dernier cas, les racines sont conjuguées.

Solutions :

Définition:

- une fonction $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, est dite polynôme, si on peut l'écrire sous la forme: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i$
- si $a_n \neq 0$, on dit que P est un polynôme de degré n .
- Les nombres a_i s'appellent les coefficients du polynôme.

Exemples:

- si $P(x) = a$, P est un poly de degré 0, si $a \neq 0$ (sinon $\deg P = -\infty$).
- si $P(x) = ax + b$ ($a \neq 0$), P est 1 poly de degré 1 (P est dit fonction affine)
- si $P(x) = x^2 + 4x - 8$, P est 1 poly de degré 2, par contre les expressions $x^4 + \sqrt{7x} + 11$ et $\frac{x^3 - x + 1}{x + 13}$ n'en sont pas.

Remarques:

- 1- 2 polynômes P et Q sont égaux si les coefficients de même degré sont égaux.
- 2- on peut effectuer sur les poly, les mêmes opérations que sur les réels:

pour $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$, $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_0$, on définit:

$$(P + Q)(x) = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) x^k.$$

$$(P \cdot Q)(x) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k.$$

3) Division dans $\mathbb{K}[X]$:

- Définition: Soient A et B deux polynômes non nuls.

On dit que B divise A si $\exists Q \in \mathbb{K}[X] \mid A = B \cdot Q$

Exple: $P(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2(x^2+1)$

(x^2+1) divise $P(x)$

- Factorisation d'un polynôme: تجزیه کردن یک چندینامی

si on effectue le produit $(2x+3)(x-4)$, on obtient $2x^2 - 5x - 12$,

Mais, souvent on fait l'opération inverse c'est exprimer un polynôme comme le produit de 2 ou plusieurs polynômes plus simples (appelés facteurs).

- Les factorisations suivantes donnent des formules qu'on utilise assez souvent:

$$\bullet a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

$$\bullet a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\bullet a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$\bullet a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\bullet a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Exemples: Factoriser les polynômes suivants:

$$\bullet P(x) = 4x^2 - 9$$

$$\bullet Q(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$\bullet R(x) = x^2 - 1$$

* 1 et -1 sont des racines simple de R car $R(-1) = 0$ et $R(1) = 0$

* 3 est 1 racine double de Q, on dit que 3 est de multiplicité 2 car $Q(3) = 0$.

Définition: On appelle fraction rationnelle sur $\mathbb{R}$, un couple de polynômes $(A, B) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$ qu'on note $\frac{A}{B}$ ($B(x) \neq 0$).

Exemple: $\frac{x^2(x+1)}{x-2}$, $\frac{3x^2+x-2}{x^2+2}$, $\frac{x+4}{x-5} + \frac{3}{5-x} = \frac{x+1}{x-5}$, sont

des fractions rationnelles.

Remarque: Une opération mathématique courante, consiste à simplifier de telles fractions en des fractions plus simples.

Exemple:

$$\frac{3x+6}{x^2-4} = \frac{3(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{3}{x-2} \rightarrow \text{c'est la forme irréductible de } \frac{3x+6}{x^2-4}$$

Proposition:

Soient A et B deux polynômes tels que $B(x) \neq 0$, alors on peut écrire A sous forme: $A = B \cdot Q + R$ ou $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$ où $\deg R < \deg B$.
 Q s'appelle le quotient de la division Euclidienne de A par B ,
 et R son reste.

Exemple: Effectuer la division $\frac{2x^3+5x^2+7x+8}{2x+8}$

Remarque: Avant d'effectuer la division Euclidienne, il faut ordonner le polynôme selon les puissances décroissantes de x .

Une suite de nombres réels est une liste ordonnée de nombres.

1) Définition:

une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

Il y'a de multiples façons de définir une suite numérique. Nous allons rencontrer principalement deux types, celles qui sont définies par :

a) la donnée d'une formule permettant de calculer un terme en fonction de son indice. (i.e. $u_n = f(n)$).

Exemples :

• $u_n = \frac{1}{n}$, les termes de la suite $u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{1}{3}, \dots$

• $u_n = 2n + 3$, $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $u_n = \sqrt{n-3}$ $n \geq 3$.

b) la relation de récurrence et la donnée d'un ou plusieurs termes initiaux.

Exemples :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2 + u_n \end{cases}$$

(u_n) représente la suite des nombres impairs.

$u_{n+1} = 2 + u_n = f(u_n)$ est appelé relation de récurrence.

$$* \begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

2) Propriétés des suites : soit (u_n) une suite de nombres réels.

Définition : (Suites monotones).

- On dit que (u_n) est croissante, si pour tout n , on a : $u_n \leq u_{n+1}$ $u_n = \frac{1}{n!}$
 $u_0 = 1$
 $u_1 = 1$
- On dit que (u_n) est décroissante, si pour tout n , on a : $u_n \geq u_{n+1}$
- On dit que (u_n) est monotone, si (u_n) est soit $\nearrow$ soit $\searrow$.

Remarque : Il existe des suites qui sont ni $\nearrow$ ni $\searrow$. Par exemple

$$u_n = (-1)^n$$

Exemples

les suites n, n^2 sont $\nearrow$, $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}$ sont $\searrow$, $u_n = \frac{2n^2+1}{n^2+5} \nearrow$

* $u_{n+1} - u_n = (n+1) - n = 1 > 0$. (Technique algébrique).

* $u_n = n \rightarrow f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1 > 0$ donc $f \nearrow$ par suite $(u_n) \nearrow$
(technique fonctionnelle $u_n = f(n)$.)

* Technique par récurrence : pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple :
$$\begin{cases} u_0 = 16 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} \end{cases}$$

Démontrons par récurrence que $(u_n) \searrow$ c'est-à-dire $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n$

Remarque : Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs :

• si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors $(u_n) \nearrow$

• si $0 < \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors $(u_n) \searrow$.

Exemples : $u_n = \frac{1}{n^2}$, $v_n = \frac{2^n}{n^2} \quad n \geq 3$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 < 1 \quad \text{donc } (u_n) \text{ est } \searrow$$

3) Définitions (suites bornées)

• on dit que (u_n) est majorée, s'il existe un nombre réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq M$.

• On dit que (u_n) est minorée, s'il existe un nombre réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq m$.

• (u_n) sera dite bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

- une suite (u_n) est majorée par son 1^{er} terme i.e. $u_0 \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots$
- une " " " " est minorée " " " i.e. $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots$
- $u_n = \frac{1}{n}$, $u_n = n$...

Remarque:

une suite (u_n) est bornée ssi $\exists M \in \mathbb{R}_+ / |u_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

en effet: $|u_n| \leq M \Leftrightarrow -M \leq u_n \leq M$

Exemples

• $u_n = (-1)^n \rightarrow |u_n| = 1$

• $u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \rightarrow$

• $u_n = \frac{(-1)^n + \sin n}{n}$

1) Limites de suites numériques

Etudier la limite d'une suite (u_n) , c'est examiner le comportement des termes (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

Définition: suite convergente.

- on dit que (u_n) est une suite convergente (ou admet une limite finie), s'il existe un réel l tel que:

tout intervalle I centré en l , contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

si $I =]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$) pour $n \geq N$ on a: $u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$

$$n \geq N: l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow n \geq N: -\varepsilon < u_n - l < \varepsilon$$

donc pour $n \geq N$; $|u_n - l| < \varepsilon$.

- lorsque (u_n) converge vers l , on note alors: $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$
- Une suite non convergente est dite suite divergente.

Exemples: Calculer les limites des suites suivantes:

$$u_n = \frac{1}{n}, \quad u_n = \frac{-2n+1}{n+1}, \quad u_n = \frac{3n^2 - 2n + 1}{4n^2 + 1}, \quad u_n = (-1)^n, \quad u_n = 2 - \frac{1}{n}$$

$$u_n = n^2, \quad u_n = -n^3.$$

5) Propriétés des suites convergentes:

- Toute suite convergente admet une limite unique.
- Toute suite convergente est bornée.
- Si (u_n) est une suite récurrente / $\lim u_n = l$, alors l vérifie l'équation $l = f(l)$.

Remarques:

- Toute suite non bornée est non convergente.
- Toute suite bornée n'est pas nécessairement convergente.

Exemple: $u_n = (-1)^n$ bornée mais non convergente.

6) Théorème de convergence des suites monotones:

- Toute suite $\nearrow$ et majorée converge vers son supremum
- Toute suite $\searrow$ et minorée // // // infimum

Exemples: $u_n = 1 - \frac{1}{2^n}$

$- u_n = 2 - \frac{1}{n} \quad u_{n+1} - u_n = 2 - \frac{1}{n+1} - 2 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)} > 0 \Rightarrow (u_n) \nearrow$

(u_n) est majorée: donc (u_n) est convergente vers $l = \ln 2 - \frac{1}{n} = 2 = \sup A$

où $A = \{u_n = 2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

- montrer $\inf A = 0$ pour $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l'$
 où l et $l' \in \mathbb{R}$. alors :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n = l + l'$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} (k u_n) = k \cdot l$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \cdot v_n) = \lim u_n \cdot \lim v_n = l \cdot l'$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{l}{l'} \quad (l' \neq 0)$
- si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n| = |l|$ (la réciproque est vraie pour $l=0$)

Exemples : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = ?$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n}$

Remarques importantes

* Si (v_n) une suite bornée
 et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ $\Rightarrow \lim (u_n \cdot v_n) = 0$.

Exple : Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^2}$

** Si $(u_n) \geq 0$ (ou $u_n > 0$)
 et $\lim u_n = l$ $\Rightarrow l \geq 0$.

5) Quelques théorèmes de comparaison (ou encadrement)

Théorème 1 : Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que : $u_n \leq v_n \quad \forall n$.

- si (u_n) diverge vers $+\infty$ alors (v_n) diverge vers $+\infty$
- si (v_n) " " " " $-\infty$ alors (u_n) " " " " $-\infty$.

Exple : $u_n = (-1)^n + n$

$$u_n \geq -1 + n = v_n \rightarrow +\infty \text{ donc } \lim u_n = +\infty$$

théorème 2:

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) 3 suites telles que: $u_n \leq v_n \leq w_n \quad \forall n$.

Si (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite l alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = l$.

Exemples : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^2} = ?$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5(-1)^n}{\frac{2^{n+1}}{2n}}$

g) - Suites adjacentes:

Déf: Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes ssi:

• l'une est $\nearrow$ l'autre $\searrow$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

théorème:

si deux suites sont adjacentes, alors elles convergent vers la même limite.

Exemples: montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$ sont adjacentes.

Une suite récurrente

• Si (u_n) est une suite récurrente i.e. $u_{n+1} = f(u_n)$ alors :

si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$ alors $l = f(l)$.

• L'étude de l'équation $l = f(l)$ donne les seules limites possibles de (u_n)

• Si $l = f(l)$ n'a pas de solutions alors (u_n) est divergente

Exple : Soit (u_n) une suite récurrente définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \sqrt{5} \\ u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \end{cases}$$

a) Montrer que $u_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) En supposant que (u_n) est convergente, quelle est la valeur l de sa limite ?

c) Montrer que (u_n) est $\searrow$

d) Conclure.

I) Généralités sur les fonctions numériques.

1) Définition:

On appelle fonction numérique, toute application $f: E \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f(x)$.

On dit aussi fonction réelle.

Exple: $(u_n) = u(n)$ une suite est une application dont la variable est un entier n .

2) Graphes d'une fonction: Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.
On appelle graphe de f , l'ensemble:

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$$

3) Fonctions paires et impaires: Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

- une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite paire si:

$$\forall x \in I, -x \in I \text{ on a } f(-x) = f(x).$$

- $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dite impaire si:

$$\forall x \in I, -x \in I, \text{ on a } f(-x) = -f(x).$$

Exples: $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \sin x$.

Remarque:

Si f est paire ou impaire, il suffit d'étudier f pour les valeurs positives de la variable et le graphe se déduit par symétrie.

II limites en un point (limites finies).

- Nous avons défini la convergence d'une suite de nombres réels qui est une fonction numérique de n .
- Nous allons étendre cette notion de limite aux fonctions numériques définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

1) Définition: Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que $f(x)$ converge vers l lorsque x converge vers x_0 (f peut ne pas être définie en x_0), et on écrit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, si les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus proches de l , lorsque x s'approche de plus en plus de x_0 .

Exemples: Calculer la limite des fonctions suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x+1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

$$\text{• si } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

2) Remarques:

- La limite d'une fonction si elle existe est unique.
- soit $f(x) = \sqrt{x}$, $D_f = [0; +\infty[$, f est définie uniquement à droite de 0, donc $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.
D'où la nécessité d'introduire les notions suivantes:

3) Définitions:

- On dit que f a une limite à droite au point x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ existe et finie.
- On dit que f a une limite à gauche au point x_0 si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ existe et finie.

Exercice:

① Calculer $\lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} f(n) = ?$ et $\lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} f(n) = ?$ pour $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

② Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$ pour $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$.

théorème:

$\lim_{n \rightarrow x_0} f(n)$ existe ssi $\lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = \lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = l$, $l \in \mathbb{R}$.

Remarque:

$\lim_{n \rightarrow x_0} f(n) \neq \lim_{n \rightarrow x_0} f(n) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow x_0} f(n)$ n'existe pas

pour $f(x) = \frac{x}{|x|}$, calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, conclure.

4) : Propriétés sur les limites

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions (soit x_0 un pt de $\mathbb{R}$).

Si $\lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = l_1$ et $\lim_{n \rightarrow x_0} g(n) = l_2$ alors:

• $\lim_{n \rightarrow x_0} [f(n) + g(n)] = l_1 + l_2$

• $\lim_{n \rightarrow x_0} k f(n) = k \cdot l_1$ ($k \in \mathbb{R}$)

• $\lim_{n \rightarrow x_0} [f(n) \cdot g(n)] = l_1 \cdot l_2$

• si $l_2 \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow x_0} f(n)/g(n) = l_1/l_2$

• si h est une fonction bornée et $\lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow x_0} [h(n) \cdot f(n)] = 0$

Exple: Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$

Remarques:

1. si $x_0 = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = l_1$, $\lim_{n \rightarrow x_0} g(n) = l_2$ alors les propriétés ci-dessus restent vraies ($f(n) = \frac{1}{n}$, $g(n) = 2 + \frac{1}{n^2}$)

2. si $\lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow x_0} g(n) = \infty$, les propriétés n'ont pas de sens.

exple: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^4}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \neq \frac{\lim_{x \rightarrow 0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 0} g(x)}$

III. Continuité:

1) Définitions: Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

* on dit que f est continue en x_0 si:

- f est définie en x_0 i.e. $x_0 \in E$.

- $\lim_{n \rightarrow x_0} f(n) \exists$ et $\lim_{n \rightarrow x_0} f(n) = f(x_0)$.

* On dit que f est continue sur E , si f est continue en tout point x de E

* f est dite discontinue en x_0 si elle n'est pas continue en x_0 .

Exemples:

• tous les polynômes aux sont continues, $e^x, \sin x, \cos x, \dots$

• $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ est continue en 0.

• $f(x) = \frac{1}{(x-2)}$ est non continue en $x_0 = 2$. ainsi que

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$$

2) Définitions:

* f est dite continue à droite de x_0 si $\lim_{n \nearrow x_0} f(n) = f(x_0)$

* f est dite continue à gauche de x_0 si $\lim_{n \searrow x_0} f(n) = f(x_0)$

Remarque:

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{n \nearrow x_0} f(n) = \lim_{n \searrow x_0} f(n) = f(x_0)$.

Exemples: les fonctions suivantes sont-elles continues en x_0 ?

• $f_1(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (x_0 = \frac{1}{2})$ • $f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0[\\ 2 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \in]0, 1] \end{cases} \quad (x_0 = 0)$

• $f_3(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad (x_0 = 0)$

- Soient f, g deux fonctions définies sur E , continues en $x_0 \in E$ alors, les fonctions $f+g, \alpha f, f \cdot g, |f|, f/g$ ($g(x_0) \neq 0$) sont continues en $x_0 \in E$.
- si $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ continue en x_0 et $g: F \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $f(x_0)$ ($f(E) \subset F$), alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

5) Définition (à savoir!).

soit $f: I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ($l \in \mathbb{R}$), alors

f admet un prolongement par continuité g défini par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I \setminus \{x_0\} \\ l & x = x_0 \end{cases}$$

g est continue en x_0 .

Exemples : les fonctions admettent-elles des prolongements par continuité en x_0 ?

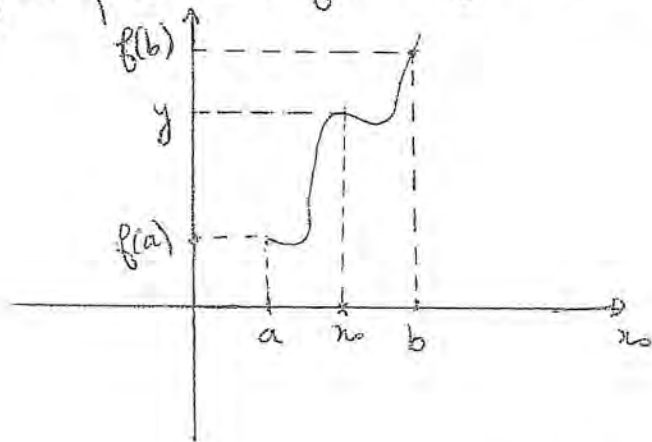
① $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ($x_0 = 0$)

② $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ($x_0 = 2$)

6) Propriétés des fonctions continues :

théorème (des valeurs intermédiaires).

soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, alors pour tout nombre y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y$.



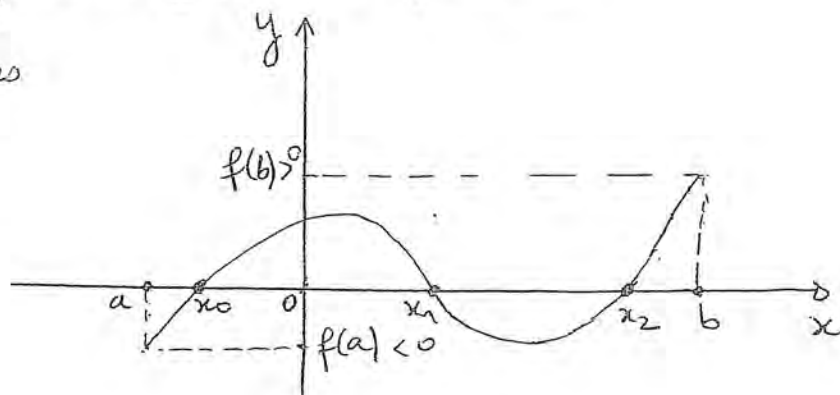
1 fct continue ne peut passer d'une valeur à une autre sans passer par ttes les valeurs intermédiaires

Conséquence :

si $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors

$\exists x_0 \in]a, b[\mid f(x_0) = 0$.

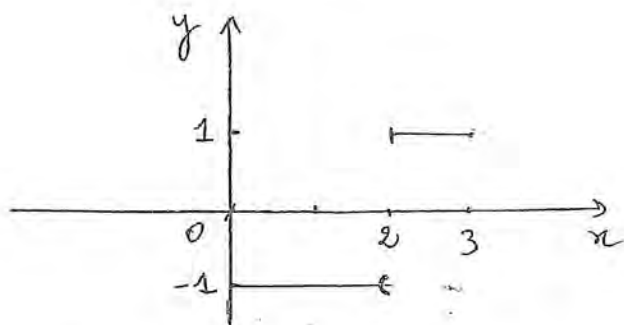
fct conti ne peut
changer de signes
sans s'annuler



$f(x) = 0$ admet
3 racines ou solu

Remarques :

① soit $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = \begin{cases} -1 & 0 \leq x < 2 \\ 1 & 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$



f ne prend pas la valeur 0
intermédiaire entre -1 et 1
du fait que f est non continu
en $x_0 = 2$.

Exple : $f(x) = x^5 - 3x + 1$

L'équation $f(x) = 0$ admet-elle des solutions sur $[0, 1]$?

② $f(x) = \begin{cases} -1 & x \in [0, 1] \\ 1 & x \in [2, 3] \end{cases}$

f est conti sur $[0, 1] \cup [2, 3]$ mais $\nexists x_0 \mid f(x_0) = 0$ car
 $[0, 1] \cup [2, 3]$ n'est pas un intervalle.

I intervalle $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I, [x_1, x_2] \subset I$

($\Leftarrow$) $\exists x_1, x_2 \in I, [x_1, x_2] \not\subset I$

soit $x_1 = 1 \in [0, 1] \cup [2, 3]$ mais $[1, 2] \not\subset [0, 1] \cup [2, 3]$
 $x_2 = 2 \in \quad \quad \quad //$

théorème de la fonction réciproque:

soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$.

si f est continue sur I et f strictement monotone alors f admet une fonction inverse, notée f^{-1} de $f(I)$ vers I continue et strictement monotone.

Application: Fonctions réciproques des fonctions circulaires

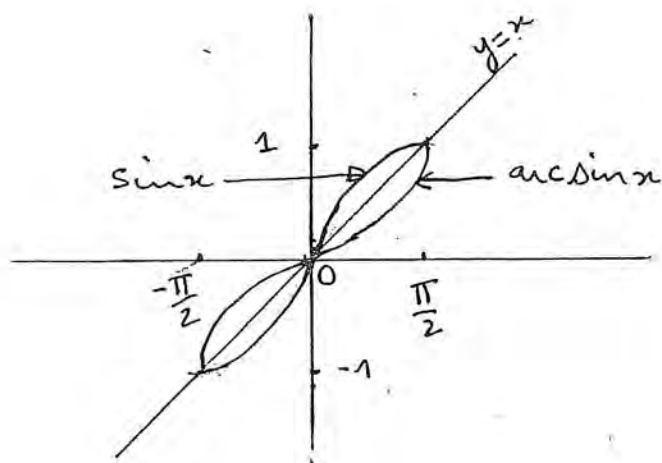
1) Fonction Arc sinus:

$$\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$

$x \longmapsto \sin x$.

$f(x) = \sin x$ est continue, strictement croissante donc f admet une fonction inverse f^{-1} notée arc sin alors:

$$\sin^{-1} = \text{Arcsin}: [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ est continue strictement.}$$



Le graph de $f^{-1}(x) = \text{arcsin } x$ s'obtient par symétrie à partir du graph de la fonction $f(x)$.

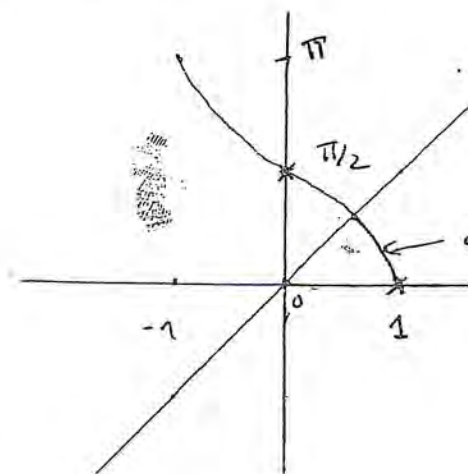
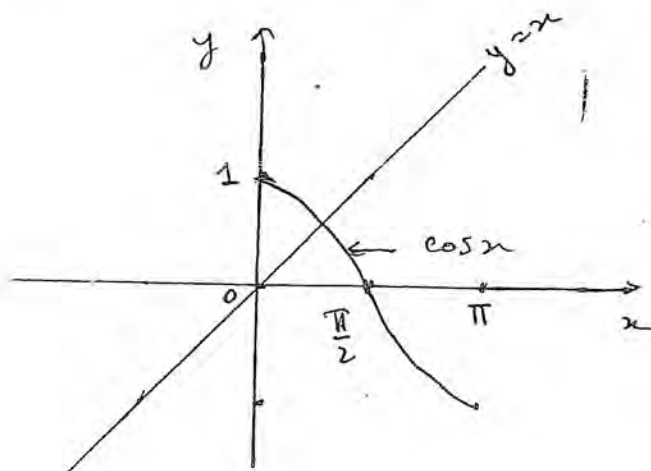
2) Fonction Arc cosinus:

$$\cos: [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \text{ est continue strictement décroissante}$$

$x \longmapsto \cos x$.

Alors:

$$\cos^{-1} = \text{arccos}: [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \text{ continue et strictement décroissante.}$$

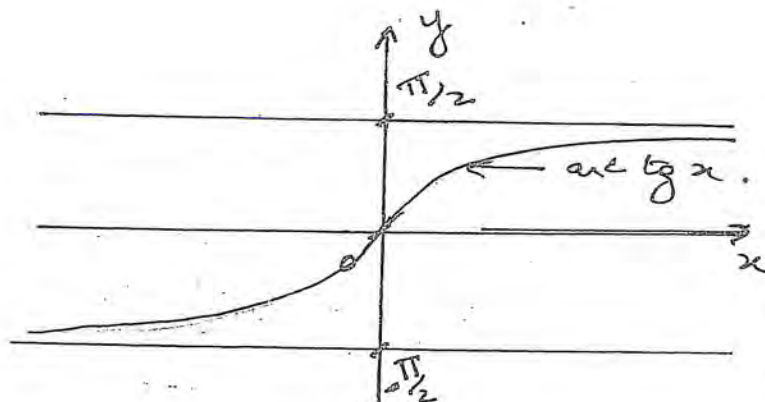
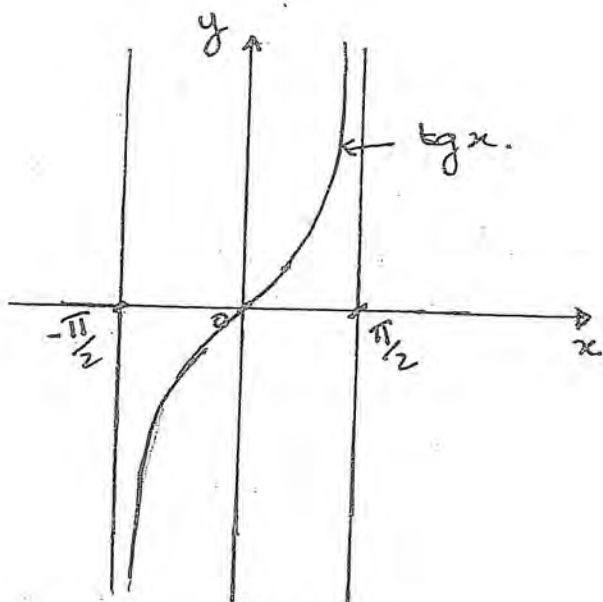


fonction Arc tangente:

$\text{tg} :]-\pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue ↗
 $x \mapsto \text{tg } x$

alors

$\text{tg}^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow]-\pi/2, \pi/2[$ est continue strictement ↗
 $x \mapsto \text{tg}^{-1}(x) = \text{arctg } x$



Fonctions dérivables:

① Définitions:

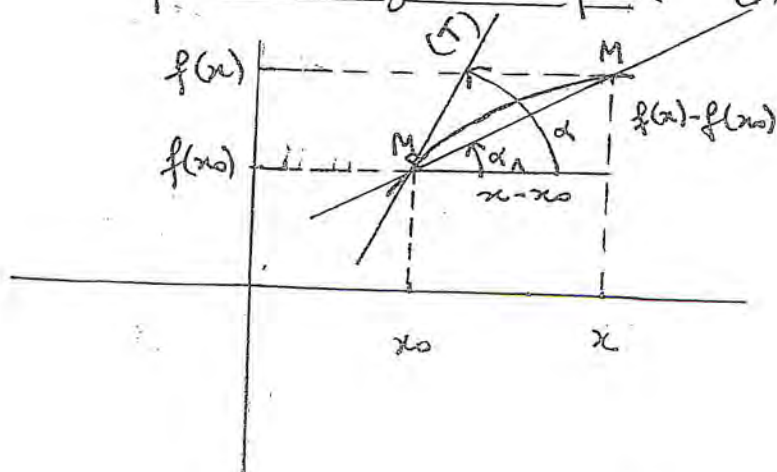
- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.
 on dit que f est dérivable en x_0 , de dérivée l (l fini), si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

cette dérivée se note $f'(x_0)$

- f est dérivable sur I ssi f est dérivable en tout point de I

② Interprétation géométrique:



- $M_0 = (x_0, f(x_0))$, $M(x, f(x))$
 les points du graphique de f .

- si $x \neq x_0$, $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{tg } \alpha$
 est la pende de la droite
 (D)

- (T): la tangente à la courbe
 de f au point M_0

Dérivabilité

1) Définitions: Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $x_0 \in I$.

On dit que la fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable au point x_0 , si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}.$$

• cette dérivée se note $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

• f est dérivable sur I , si f est dérivable en tout point de I .

2) Propriété:

$$f \text{ est dérivable au point } x_0 \text{ si } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

variation ($y = f(x)$)

Exemples:

• si $f(x) = cte$, $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

• si $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

• $f(x) = \sqrt{x}$, f est dérivable en $x_0 = 1$, $f'(1) = ?$

3) Proposition:

si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 . Donc,

si f est non continue en x_0 alors f est non dérivable en x_0 .

Exemples

les fonctions $f(x) = |x|$ et $g(x) = \sqrt{x}$ sont continues en 0 mais non dérivables en 0.

4) Définitions:

• f est dite dérivable à droite en x_0 , si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_1, \ell_1 \in \mathbb{R}$.

cette dérivée se note $f'_d(x_0) = \ell_1$

• f sera dérivable à gauche en x_0 , si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_2, \ell_2 \in \mathbb{R}$.

on pose $\ell_2 = f'_g(x_0)$

Remarques :

1. f est dérivable en $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

2. Si f est non dérivable à droite ou à gauche en x_0 ou $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$ } $\Rightarrow f$ est non dérivable en x_0 .

Exemples : f et g sont-elles dérivables en x_0 ?

• $f(x) = |x|$ ($x_0 = 0$) , $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ($x_0 = 0$).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \infty.$$

5) Opérations sur les fonctions dérivables :

a) Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0 , alors :

• $(f+g)$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

• (λf) " " " et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$

• (f/g) " " " et $(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

• $(f \cdot g)$ " " " et $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

b) soit $h: J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $f(x_0)$, alors

$(h \circ f)$ est dérivable en x_0 et : $(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Exemple : Calculer $g'(1)$ où $g(x) = \sin \sqrt{x}$.

Soit $f: I \rightarrow J$ une application bijective et continue et soit $f^{-1}: J \rightarrow I$ l'application réciproque de f

si f est dérivable en x_0 , alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et on a:

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}} \quad (f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad (f'(x_0) \neq 0)$$

Exemples: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, calculer $(f^{-1})'(x)$, $(g^{-1})'(x)$.

Théorèmes fondamentaux:

a) théorème de Rolle: soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

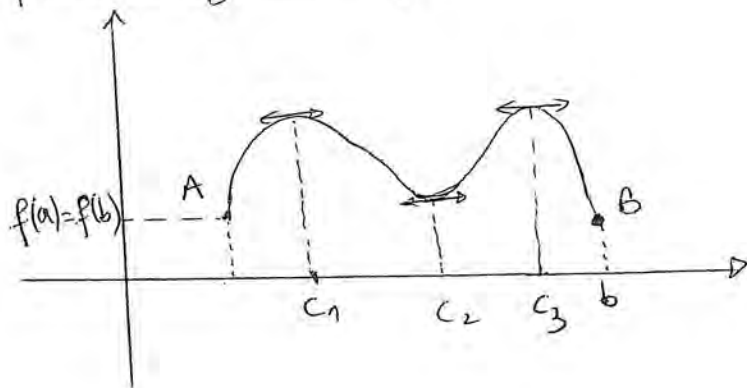
• si f est continue sur $[a, b]$,

• si f est dérivable sur $]a, b[$

• $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow \exists c \in]a, b[\mid f'(c) = 0$

Interprétation géométrique:



La tangente au point c_1 est parallèle à la droite AB .

Remarques:

- si $f'(c) = 0 \nRightarrow f$ atteint son minimum ou maximum en c .

en effet: si par exple $f(x) = x^3$, $[a, b] = [-1, 1]$.

$f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un minimum ou maximum de f sur $[-1, 1]$.
 si $\exists c \in]-1, 1[\mid f'(c) = 0 \nRightarrow f(a) = f(b)$ et $b < a$, et b devient a .

- si l'une des conditions du théorème n'est pas satisfaite alors le résultat du thm peut-être faux.

Exples:

- $f(x): [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = 0$, on a $f(0) \neq f(1)$ et $\nexists c \in]0, 1[\mid f'(c) = 0$.

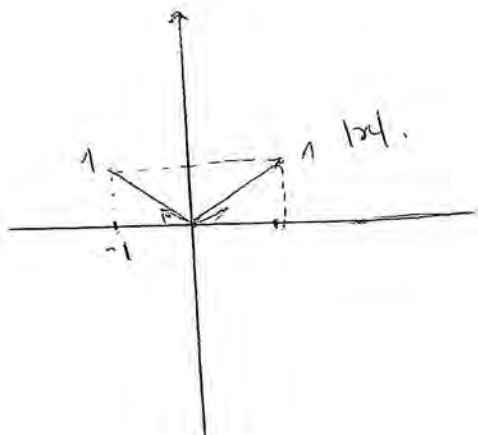
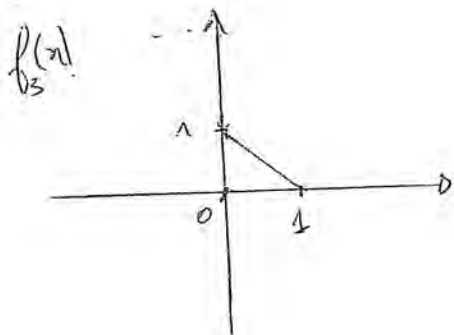
- $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(x) = |x|$.

- $f_3(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

$[a, b] = [0, 1]$.

Exercice:

justifiez l'application du théorème de Rolle à la fonction $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ sur $[-1, 1]$, puis montrez qu'il existe $c \in]-1, 1[\mid f'(c) = 0$.



$$2) \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$$

Soient f et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 2 fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$ telles que :

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[\quad \text{et} \quad f(a) = g(a) = 0.$$

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ existe (finie ou infinie) alors } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Exple : Appliquer la règle de l'Hôpital pour calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

Remarques:

• Si $f'(a) = g'(a) = 0$, et si les conditions de la règle de l'Hôpital sont satisfaites f' et g' alors: $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$

Exple : Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2$

• La règle de l'Hôpital reste applicable dans le cas $\frac{\infty}{\infty}$

exple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$

