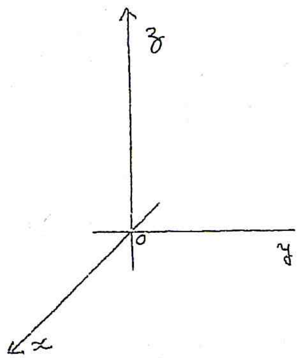
géometrie dans ~~le plan~~ l'espace.

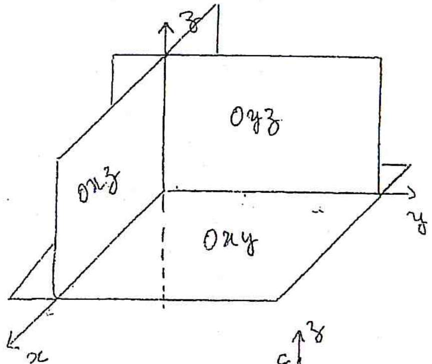
~~Amphi 2~~

Fondement de la géométrie dans l'espace :

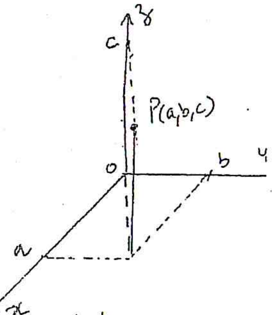
Définition : Soient Ox, Oy, Oz les axes de coordonnées. Les trois axes déterminent les trois plans de coordonnées : le plan Oxy est le plan des axes Ox et Oy.
Le plan Oxz est le plan des axes Ox et Oz.
Le plan Oyz est le plan des axes Oy et Oz.



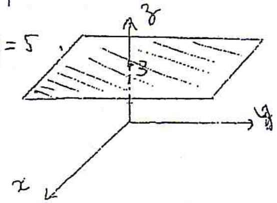
Soit P un point de $\mathbb{R}^3$, ce point est identifié par le triplet (a,b,c).
Les nombres a,b,c sont appelés les coordonnées cartésiennes de P.
a est l'abscisse, b est l'ordonnée et c la cote.



En géométrie analytique de dimension 2. Le graphique d'une équation qui comporte x et y est une courbe de $\mathbb{R}^2$, mais en dimension 3, une équation en x, y et z représente une surface dans $\mathbb{R}^3$.



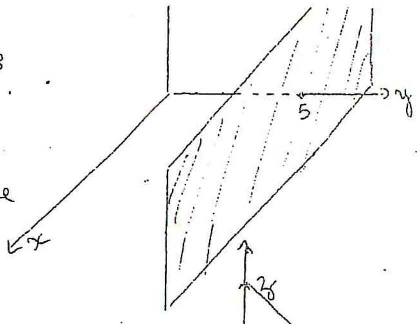
Exemples : 1) Quelles sont les surfaces de $\mathbb{R}^3$ représentées par les équations suivantes : 1) $z = 3$; 2) $y = 5$.



Réponse : l'équation $z = 3$ représente l'ensemble $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 3\}$ qui est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^3$ dont la coordonnée $z = 3$.

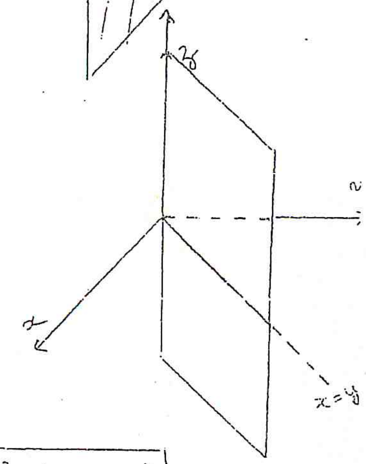
(1)

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 5\}$ qui est l'ensemble de tous les points de $\mathbb{R}^3$ dont l'ordonnée est 5.



2) Décrivez et dessinez la surface F de $\mathbb{R}^3$ représentée par l'équation $z = x$.

Réponse : $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y\}$
$= \{(x, x, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$.



2) **Distance** :

Définition : Soient $P_1(x_1,y_1,z_1)$ et $P_2(x_2,y_2,z_2)$ deux points de $\mathbb{R}^3$.

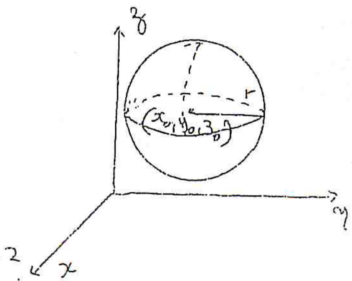
$$d(P_1,P_2) = |P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Exemple : la distance entre $P(2,-1,7)$ et $Q(1,-3,5)$ est

$$|PQ| = \sqrt{(1-2)^2+(-3+1)^2+(5-7)^2}$$
$$= \sqrt{1+4+4} = 3.$$

3) **l'équation d'une sphère** : Soit la sphère de centre (x_0,y_0,z_0) et de rayon r, son équation est :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = r^2.$$



En particulier, si le centre est O, alors l'équation est

$$x^2+y^2+z^2 = r^2.$$

(2)

Exemple : Montrer que $x^2+y^2+z^2+4x-6y+2z+6=0$. est l'équation d'une sphère et déterminer son centre et son rayon.

Réponse : $x^2+y^2+z^2+4x-6y+2z+6 = (x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2-8$

ainsi $x^2+y^2+z^2+4x-6y+2z+6=0 \Leftrightarrow$

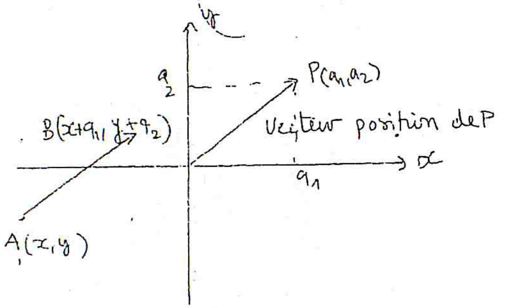
$(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2-8=0 \Leftrightarrow (x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=8$.

c'est l'équation d'une sphère de centre $(-2,3,-1)$ et de rayon $r=2\sqrt{2}$.

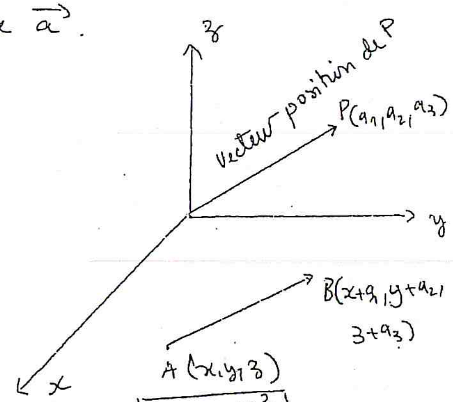
4) Vecteurs :

Définition : un vecteur de dimension 2, est un couple $\vec{a}=(a_1,a_2)$ de nombres réels.

Un vecteur de dimension trois est un triplet $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ de nombres réels. a_1,a_2,a_3 sont appelés les composantes de $\vec{a}$.



$\boxed{\text{dans } \mathbb{R}^2}$



$\boxed{\text{dans } \mathbb{R}^3}$

Définition : Etant donnés les points $A(x_1,y_1,z_1)$ et $B(x_2,y_2,z_2)$ le vecteur $\vec{AB}$ est

$$\vec{AB}=(x_2-x_1,\, y_2-y_1,\, z_2-z_1).$$

Exemple : ...

et d'extrémité $B(-2,1,1)$

Réponse : $\vec{AB}=(-2-2, 1+3, 1-4)=(-4,4,-3)$.

* La Longueur d'un vecteur de dimension deux $\vec{a}(a_1,a_2)$ est égale à $\|\vec{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.
* La longueur d'un vecteur de dimension trois $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ est égale à $\|\vec{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$.
* le seul vecteur de longueur 0 est le vecteur $\vec{0}=(0,0)$ oubien ($\vec{0}=(0,0,0)$).

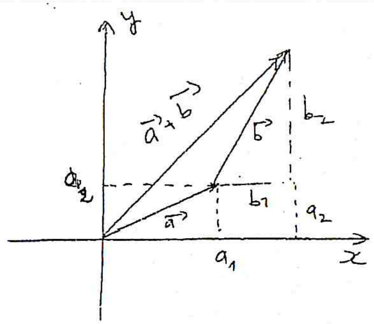
5) Opérations sur les vecteurs :

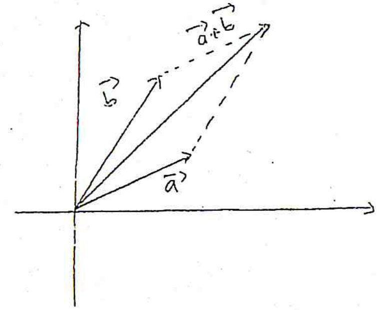
* L'addition des vecteurs : Soient $\vec{a}=(a_1,a_2)$ et $\vec{b}=(b_1,b_2)$

le vecteur $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1, a_2+b_2)$.

de même pour les vecteurs de dimension trois :

$(a_1,a_2,a_3)+(b_1,b_2,b_3)=(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$.

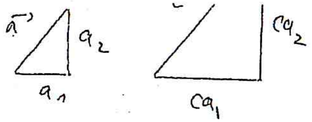




* Multiplication d'un vecteur par un scalaire :

Soient (a_1,a_2) un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et c un scalaire alors : $c\vec{a}=(ca_1, ca_2)$

$c(a_1, a_2, a_3) = (ca_1, ca_2, ca_3)$.



Remarques:

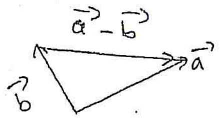
* $\| c\vec{a} \| = \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2} = \sqrt{c^2(a_1^2 + a_2^2)}$
$= |c| \sqrt{a_1^2 + a_2^2} = |c| \, \|\vec{a}\|$.

Si $c > 0$ $\vec{a}$ et $c\vec{a}$ sont de même sens, mais si $c < 0$ $\vec{a}$ et $c\vec{a}$ sont de sens opposés.

* la pente d'un vecteur $\vec{a}$ est $\frac{a_2}{a_1}$ (à condition que $a_1 \neq 0$) si $c \neq 0$ la pente de $c\vec{a}$ est $\frac{a_2}{a_1}$ (la même que celle de $\vec{a}$).

* deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont dits parallèles si : $\exists c$ scalaire tq $\vec{b} = c . \vec{a}$.

* le vecteur $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ d'où
si $\vec{a} = (a_1, a_2)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2)$
$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$.



Exemple : Soient $\vec{a} = (4, 0, 3)$ et $\vec{b} = (-2, 1, 5)$

. Calculer : $\vec{a} + \vec{b}$; $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{b}$ et $2\vec{a} + 5\vec{b}$.

Réponse :
$\vec{a} + \vec{b} = (2, 1, 8)$
$\vec{a} - \vec{b} = (6, -1, -2)$
$3\vec{b} = (-6, 3, 15)$
$2\vec{a} + 5\vec{b} = (-2, 5, 31)$

Définition : Nous désignons par V_2 l'ensemble de tous les vecteurs de dimension 2 et V_3 l'ensemble de tous les vecteurs de dimension 3.

vecteurs de V_2 ou bien des vecteurs de V_3. α, β des scalaires

* $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
* $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
* $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
* $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.
* $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
* $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.
* $(\alpha . \beta) . \vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$
* $1 . \vec{a} = \vec{a}$.

Définition : Soient $\vec{i} = (1,0)$; $\vec{j} = (0,1)$ les vecteurs de la base canonique de V_2. Un vecteur $\vec{a} = (a_1, a_2)$ peut s'écrire $\vec{a} = (a_1, a_2) = a_1(1,0) + a_2(0,1)$
$= a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$.

de même dans V_3 $\vec{i} = (1,0,0)$; $\vec{j} = (0,1,0)$ et $\vec{k} = (0,0,1)$ les vecteurs de la base canonique de V_3. Un vecteur
$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1)$
$= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$.

7) Produit Scalaire :

Définition : * Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le nombre.

$$\vec{a} . \vec{b} = \|\vec{a}\| . \|\vec{b}\| . \cos\theta .$$

où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ $0 \leq \theta \leq \pi$.

* Deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont dits perpendiculaire ou orthogonaux si et seulement si
$\vec{a} . \vec{b} = 0$

Remarques : 1) On a aussi $\vec{a} = (a_1, a_2)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2)$
$\vec{a} . \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

2) Dans V_3. $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 \cdot b_3)$.

Exemple : Quel angle font entre eux les vecteurs :

$\vec{a} = (2, 2, -1)$ et $\vec{b} = (5, -3, 2)$.

Réponse : $\vec{a} \cdot \vec{b} = (10 - 6 - 2) = 2$.

désignons par θ l'angle cherché :

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| . \|\vec{b}\| . \cos\theta$.

$\|\vec{a}\| = 3$; $\|\vec{b}\| = \sqrt{38}$

donc $2 = 3 . \sqrt{38} . \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \dfrac{2}{3\sqrt{38}}$

L'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ mesure :

$$\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{2}{3\sqrt{38}}\right) \simeq 1{,}46 \ (\simeq 84°).$$

8) **Propriétés du Produit Scalaire** : Si $\vec{a}, \vec{b}$ et $\vec{c}$ des vecteurs de V_3 et α un scalaire, alors :

1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$.   2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

3) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ 4) $(\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b})$.

5) $0 \cdot \vec{a} = 0$.

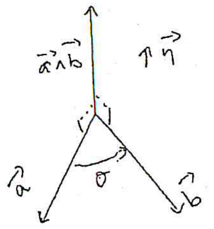
9) **Produit Vectoriel** :

Définition : Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont des vecteurs non nuls de V_3. Le produit vectoriel de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est le vecteur :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = (\|\vec{a}\| . \|\vec{b}\| . \sin\theta) . \vec{\eta}$$

où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$; $0 \leq \theta \leq \pi$.

et $\vec{\eta}$ un vecteur unitaire perpen… vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



* Si l'un des vecteurs $\vec{a}$ ou $\vec{b}$ est nul ; alors par définition $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$.

Remarque : Deux vecteurs non nuls $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$.

b) **Propriétés du produits vectoriel** : Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$, $\vec{c}$ sont des vecteurs et α un scalaire alors :

1) $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ 2) $(\alpha\vec{a}) \wedge \vec{b} = \alpha(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{a} \wedge (\alpha\vec{b})$

3) $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$ 4) $(\vec{a} + \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \wedge \vec{c}) + \vec{b} \wedge \vec{c}$.

Exemples : * Déterminer $\vec{i} \wedge \vec{j}$ et $\vec{j} \wedge \vec{i}$

$\vec{i} \wedge \vec{j} = (\|\vec{i}\| . \|\vec{j}\| . \sin \pi/2) . \vec{k} = \vec{k}$.

$\vec{j} \wedge \vec{i} = (\|\vec{j}\| . \|\vec{i}\| . \sin \pi/2) . (-\vec{k}) = -\vec{k}$.

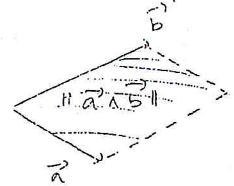
* Calculer $(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j}$ et $\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j})$. Conclure.

$(\vec{i} \wedge \vec{i}) \wedge \vec{j} = \vec{0} \wedge . \vec{j} = \vec{0}$

$\vec{i} \wedge (\vec{i} \wedge \vec{j}) = \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$.

Conclusion : le produit vectoriel n'est pas associatif.

Définition : La norme de $\vec{a} \wedge \vec{b}$ est égale à l'aire du parallélogramme déterminé par $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



Soient $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

alors
$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = + \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

<u>Exemples</u>: 1) Soient $\vec{a} = (1, 3, 4)$ et $\vec{b} = (2, 7, -5)$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -43 \vec{i} + 13 \vec{j} + 1.\vec{k}.$$
$$= (-43, 13, 1)$$

2) Chercher un vecteur perpendiculaire au plan P qui passe par les points $A(1,4,6)$, $B(-2,5,-1)$ et $C(1,-1,1)$.

On a : $\vec{AB} \in P$ et $\vec{AC} \in P$. $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \perp P$.

$\vec{AB} = (-3, 1, -7)$ $\quad \vec{AC} = (0, -5, -5)$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & -7 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -40 \vec{i} - 15 \vec{j} + 15 \vec{k}.$$

donc le vecteur $(-40, -15, 15)$ est perpendiculaire au plan P.

Soit (D) une droite dans $\mathbb{R}^2$. Son équation est :
$$ax + by + c = 0.$$

On appelle : vecteur directeur de D, le vecteur $\vec{u} = (-b, a)$ et vecteur normal à D, le vecteur $\vec{\eta} = (a, b)$.

* $\vec{u} \parallel (D)$ et $\vec{\eta} \perp (D)$

* <u>Distance d'un point à une droite (D)</u> :

Soit (D) la droite d'équation $ax + by + c = 0$ et $A(x_0, y_0)$ un point de $\mathbb{R}^2$.

la distance entre (D) et A est :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\|\vec{\eta}\|}.$$

13) <u>L'équation d'une droite dans $\mathbb{R}^3$</u> :

Soit (D) une droite qui passe par le point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ et parallèle au vecteur $\vec{v} = (a, b, c)$

les équations paramétriques de la droite (D) s'écrivent :

$$x = x_0 + ta \quad ; \quad y = y_0 + t.b \quad \text{et} \quad z = z_0 + tc. \quad (t \text{ paramètre})$$

Chaque valeur du paramètre t, donne un point (x, y, z) sur (D).

<u>Exemples</u> : 1) écrivez les équations paramétriques de la droite qui passe par le point $(5, 1, 3)$ et parallèle au vecteur $\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

* Chercher les coordonnées de deux autres points de cette droite.

Réponse : les équations paramétrique de la droite sont :

$x = 5+t$; $y = 1+4t$ et $z = 3-2t$.

la valeur $t=1$ du paramètre nous donne :

$x=6, y=5, z=1 \Rightarrow$ le point $(6,5,1) \in (D)$

la valeur $t=-1$ du paramètre nous donne :

$x=4$, $y=-3$ et $z=5 \Rightarrow$ le point $(4,-3,5) \in (D)$.

2) Ecrivez les équations paramétrique de la droite (D) qui passe par les points $A(2,4,-3)$ et $B(3,-1,1)$.
En quel point cette droite perce-t-elle le plan oxy.

Réponse : le vecteur $\vec{AB} = (1,-5,4)$ est parallèle à (D).

ainsi $x = 2+t$; $y = 4-5t$ et $z = -3+4t$ sont les équations paramétrique de (D).

- la droite perce le plan oxy quand $z=0$.

$\Rightarrow -3+4t = 0 \Rightarrow t = 3/4 \Rightarrow x = 2+3/4 = 11/4$

et $y = 4-5(3/4) = 1/4$.

les coordonnées du point d'intersection de (D) avec oxy sont $(11/4, 1/4, 0)$.

14) Equation d'un plan dans $\mathbb{R}^3$:

L'équation d'un plan P dans $\mathbb{R}^3$ est déterminée par un point $P_0(x_0,y_0,z_0)$ qu'il contient et un vecteur $\vec{n}$ qui lui est orthogonal. Un tel vecteur orthogonal est appelé un vecteur normal.

Soit $\vec{n} = (a,b,c)$ un vecteur normal au plan et $(x,y,z) \in P$.

l'équation scalaire du plan passant par $P_0(x_0,y_0,z_0)$ et normal au vecteur (a,b,c) est :

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

Exemples : 1) Ecrivez une équation du plan P qui passe par le point $(2,4,-1)$ et qui admet comme vecteur normal $\vec{n} = (2,3,4)$.

Réponse l'équation est :

$$2(x-2)+3(y-4)+4(z+1)=0.$$

$$\Rightarrow 2x+3y+4z=12.$$

2) Quelle est l'équation du plan déterminé par les points : $A(1,3,2)$; $B(3,-1,6)$ et $C(5,2,0)$.

Réponse : $\vec{AB} = (2,-4,4)$ et $\vec{AC} = (4,-1,-2)$.

les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont inclus dans P ainsi $\vec{AB} \wedge \vec{AC} \perp P$ et donc c'est un vecteur normal.

$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = 12\vec{i}+20\vec{j}+14\vec{k}.$$

une équation de P s'écrit :

$$12(x-1)+20(y-3)+14(z-2)=0.$$

$$\Rightarrow 6x+10y+7z=50.$$

15) Distance d'un point à un plan :

Soit P le plan d'équation :

$$ax + by + cz + d = 0$$

et $A(x_1, y_1, z_1)$ un point de $\mathbb{R}^3$.

la distance entre P et A est :

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\|\vec{n}\|}.$$

Exemple : Soient les plans d'équations :

$P_1 : 10x + 2y - 2z = 5$ et $P_2 : 5x + y - z = 1$.

1) Montrer que les deux plans sont parallèles ;
2) Calculer la distance entre ces deux plans.

Réponse : 1) les vecteurs normales aux plans P_1 et P_2 sont :

$\vec{n}_1 = (10, 2, -2)$ et $\vec{n}_2 = (5, 1, -1)$

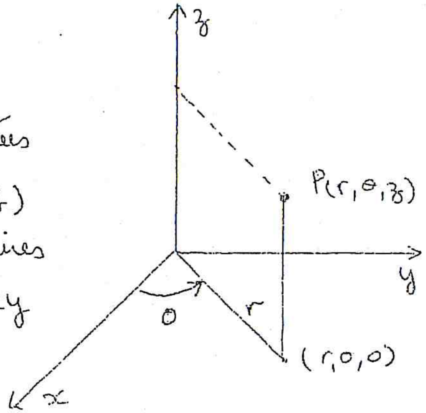
$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont // car $\vec{n}_1 = 2\vec{n}$.

2) Soit $A \in P_1$ $A = (\frac{1}{2}, 0, 0)$.

$$d = \frac{|5(1/2) + 0 - 0 - 1|}{\|\vec{n}_2\|} = \frac{|5/2 -}{\sqrt{25}.}$$

$$d = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

En géométrie plane, le système de coordonnées polaires est adapté pour décrire certaines courbes et régions. En dimension trois, il y a deux systèmes de coordonnées analogues aux coordonnées polaires pour décrire certaines surfaces et solides à savoir les coordonnées cylindriques et sphériques.



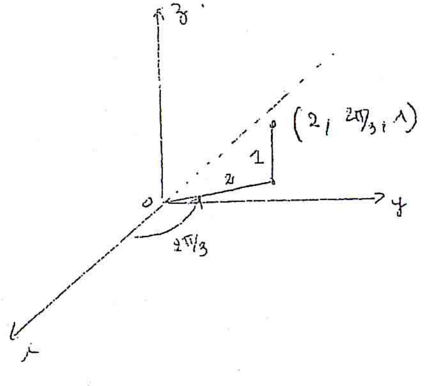
Coordonnées cylindriques :

Soit $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$; les coordonnées cylindriques de P sont (r,θ,z) où r,θ sont les coordonnées polaires du projeté de P sur le plan Oxy et où z est la cote de P.

Le passage des équations cartésiennes aux coordonnées cylindriques se fait par :

$$r^2 = x^2+y^2 \; ; \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{x}{y} \; ; \quad z = z.$$

Exemples : 1) Situez le point de coordonnées cylindriques $(2, 2\pi/3, 1)$ et déterminer ses coordonnées cartésiennes.



Réponse :

les coordonnées cartésiennes sont :

$y = r\sin\theta = 2.\sin(2\pi/3) = 2.\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3}$

$z = 1.$

il s'agit du point $(-1, \sqrt{3}, 1)$ en coordonnées cartésiennes.

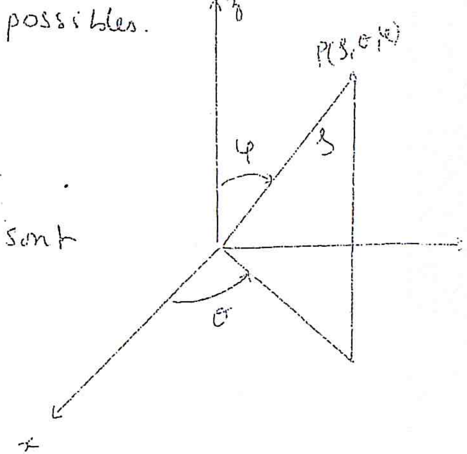
2) Déterminer les coordonnées cylindriques du point de coordonnées $(3,-3,-7)$

Réponse : $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3^2+(-3)^2} = 3\sqrt{2}$.

$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{3} = -1 \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$.

$z = -7$.

Par conséquent les coordonnées cylindriques de $(3,-3,-7)$ sont $(3\sqrt{2}, 7\pi/4, -7)$; un autre est $(3\sqrt{2}, -\pi/4, -7)$. Comme en coordonnées polaires, il y a une infinité de choix possibles.



Coordonnées sphériques :

Soit $P(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

les coordonnées sphériques de P sont (ρ,θ,φ), tels que :

$\rho = |OP|$; θ est le même angle qu'en coordonnées cylindriques et φ est l'angle entre la partie positive de l'axe Oz et le segment OP

On a : $\rho \geq 0$; $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Le passage des coordonnées cartésiennes aux sphériques se lit :

$$x = \rho \sin\varphi \cos\theta$$
$$y = \rho \sin\varphi \sin\theta$$
$$z = \rho . \cos\varphi .$$

de plus

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 .$$

Exemples : 1) Déterminer les coordonnées cartésiennes du point caractérisé par les coordonnées sphériques $(2, \pi/4, \pi/3)$

Réponse : On a :

$$x = \rho . \sin\varphi . \cos\theta = 2 . \sin(\pi/3) . \cos(\pi/4) = 2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{3/2}$$
$$y = \rho . \sin\varphi . \sin\theta = 2 \sin(\pi/3) . \sin(\pi/4) = 2\left(\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1/\sqrt{2}\right) = \sqrt{3/2}$$
$$z = \rho \cos\varphi = 2 . \cos(\pi/3) = 2(1/2) = 1 .$$

ainsi le point $(2, \pi/4, \pi/3)$ est de coordonnées cartésiennes $(\sqrt{3/2}, \sqrt{3/2}, 1)$.

2) Déterminer les coordonnées sphériques du point de coordonnées cartésiennes $(0, 2\sqrt{3}, -2)$.

Réponse : Soit (ρ, θ, φ) les coordonnées sphériques.

On a : $\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{0+12+4} = 4$

$$\cos\varphi = z/\rho = \frac{-2}{\rho} = -1/2 . \Rightarrow \varphi = 2\pi/3 .$$

et $\cos\theta = \dfrac{x}{\rho . \sin\varphi} = 0 \Rightarrow \theta = \pi/2 .$

(remarque : $\theta \neq 3\pi/2$ car $y = 2\sqrt{3} > 0$). Par conséquent les coordonnées sphériques du point donné sont $(4, \pi/2, 2\pi/3)$.