

Approche Intuitive: En mathématique,

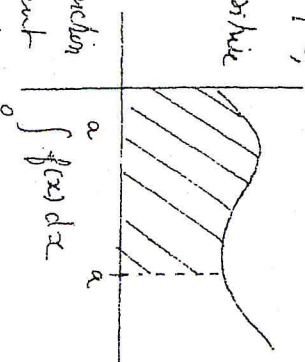
l'intégrale d'une fonction réelle continue positive est la valeur de l'aire du domaine délimité par l'axe des abscisses

et la courbe représentative de la fonction

Par les fonctions continues qui prennent ces valeurs réelles négatives, une définition d'aire algébrique

prend possible une aire négative.

représentation graphique d'une intégrale.



II/ Définition: Soit f une fonction continue définie sur $[a, b]$ à valeurs réelles. On appelle $\int_a^b f(x) dx$, l'intégrale définie de f sur $[a, b]$. Cette intégrale représente la mesure de l'aire du domaine délimité par les axes $x = a$, $x = b$ et la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

III/ Propriétés des intégrales: Soient f et g deux fonctions continues sur I , a, b et c trois réels de I .

$$1) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$2) \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

$$3) \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$5) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

$$6) \text{ Si } f(x) \leq g(x) \text{ sur } [a, b], \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

$$7) \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

$$8) \text{ Si } f(x) = 0 \text{ } \forall x \in [a, b] \quad \int_a^b f(x) dx = 0.$$

9) Inégalité de la moyenne:

$$m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

III/ Théorème de la moyenne: Pour toute fonction

continue sur $[a, b]$ non vide et non trivial ($b > a$) la

valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est le réel m défini par

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

$$c, x, d: \exists c \in [a, b] \text{ tq: } \int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot f(c)$$

IV/ Intégrales indéfinies - calcul des primitives:

Définition: Soit f une fonction numérique définie sur

$I \subset \mathbb{R}$. On appelle primitive de f sur I , toute fonction

F définie dérivable sur I tq:

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$$

Exemples: $x \mapsto e^x$ est une primitive de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$.

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est une primitive de $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$.

$x \mapsto \log x$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Proposition: Si f est une primitive de f sur I ,

Toutes les primitives de f sur I sont de la forme $f + c$ ou c est une constante.

Propriétés: Soient F et G les primitives de f et g respectivement sur I intervalle de $\mathbb{R}$. On a:

- 1) $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- 2) $F \cdot G$ est une primitive de $F' \cdot G + F \cdot G'$ sur I .
- 3) kF " " " " $k \neq 0$ sur I .
- 4) Si $G \neq 0$ sur I $\frac{F}{G}$ est primitive de $\frac{f \cdot G - g \cdot F}{G^2}$ sur I .
- 5) Si F est la primitive de f sur I , G la primitive de g sur I , alors $G \circ F$ est la primitive de $(g \circ F) \cdot f$ sur I .

Théorème: Soit f une fonction continue sur I , $a \in I$.

La fonction $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$

est la primitive de f sur I tq $F(a) = 0$.

Proposition: Si f est continue sur I et F une primitive de f sur I , alors $\forall (c, d) \in I$

$$\int_c^d f(t) dt = F(d) - F(c).$$

Remarque: Une primitive de f notée $\int f(x) dx$ s'appelle aussi "Intégrale indéfinie" de f , c'est une fonction. Par contre $\int_a^b f(x) dx$ appelle une intégrale définie c'est une constante.

voir ①

La technique de calcul des primitives.

1) Intégration par partie:

Proposition: Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$ On a:

$$\begin{aligned} 1) \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx &= f(x) \cdot g(x) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx \\ 2) \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx &= \left[f(x) \cdot g(x) \right]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx \end{aligned}$$

Exemples: 1) $\int \log(x) dx$

$$\begin{aligned} f(x) &= \log x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \\ g'(x) &= 1 \Rightarrow g(x) = x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - \int 1 dx \\ &= x \log x - x + c \quad \forall x \in]0, +\infty[\\ &\quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$2) \int (3x^2 + 1) e^{2x} dx.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 6x \\ g'(x) &= e^{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \end{aligned}$$

$$\int (3x^2 + 1) e^{2x} dx = \frac{1}{2} (3x^2 + 1) e^{2x} - \int 3x e^{2x} dx$$

$$\int x e^{2x} dx.$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1.$$

$$g'(x) = e^{2x} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}$$

$$\text{donc } \int (3x^2 + 1) e^{2x} dx = \frac{1}{2} (3x^2 + 1) e^{2x} - \frac{3}{2} x e^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}.$$

$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$

2) Intégration par changement de variable:

Proposition: Soit f une fonction numérique continue et

φ une fct de classe C^1 sur $[a, b]$ dont l'image est

contenue dans le domaine de définition de f , alors:

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

Exemples: 1) Calculer $\int_{-1/e}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

On pose $x = \sin t$ Ainsi $\varphi: t \mapsto \sin t$.

φ est de classe C^1 sur $[-\pi/2, 0] \rightarrow [-1, 0]$ et on a:

$$\int_{-1/e}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int_{-\pi/2}^0 \frac{\cos t}{|\cos t|} dt = \int_{-\pi/2}^0 \cos t dt$$

$$= t \Big|_{-\pi/2}^0 = \frac{\pi}{2}$$

ou bien $x = \log t$.

$$1) \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} \quad \text{On pose } x = \log \frac{1}{t} \quad \varphi: t \mapsto \log \frac{1}{t}$$

φ est de classe C^1 sur $[\frac{1}{e}, 1] \rightarrow [0, 1]$ et on a:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \int_{1/e}^1 \frac{-\frac{1}{t} dt}{1+\frac{1}{t}} = - \int_{1/e}^1 \frac{1}{1+t} dt = - \log |1+t| \Big|_{1/e}^1$$

$$= -\log(2) + \log(1+\frac{1}{e})$$

$\varphi: x \mapsto \log x$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$f(x) = \frac{1}{x \log x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus [0, 1] \cup]1, +\infty[$ continue sur D

et on a: $dt = \frac{1}{t} \log t = \frac{1}{t} dt$

$$\int \frac{1}{x \log x} dx = \int \frac{1}{t} dt = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{\log x} + c \quad \text{avec}$$

3) Intégration de fractions rationnelles

Les fractions rationnelles sont les fractions du type $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux polynômes.

Si $d = \deg P < \deg Q \Rightarrow \frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$ où E est une fonction de polynôme et R est de degré inférieur à Q .

Si $d \geq \deg Q \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{P}{Q}$ est une fonction de polynôme dont la part est la décomposition.

L'outil fondamental est la décomposition d'une fonction rationnelle en somme.

* d'éléments simples de première espèce

$$\frac{A}{(x-a)^k}$$

* d'éléments simples de deuxième espèce

$$\frac{A x + B}{(x-a)^2 + b^2}$$

Les polynômes de polynômes sont fractionnaires à calculer. De même pour les polynômes d'éléments simples de 2^e espèce.

$$\int \lambda \ln |x-a| + c \quad \text{si } u=1$$

pour les éléments simples de la forme exposée dans l'exercice :

$$\int \frac{\lambda x + \mu}{(x-a)^2 + b^2} dx = \frac{\lambda}{2} \int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2 + b^2} dx + (\mu + \lambda a) \int \frac{dx}{[(x-a)^2 + b^2]^n}$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int \frac{2(x-a)}{(x-a)^2 + b^2} dx + \frac{\mu + \lambda a}{b^{2n-1}} \int \frac{\frac{1}{b}}{[(\frac{x-a}{b})^2 + 1]^n} dx$$

La première primitive se voit aisée : facile à trouver en $\tilde{x}(x-a)$ et la deuxième de $[(x-a)^2 + b^2]^n$ ainsi que nous verrons :

$$\int \frac{\frac{1}{b} \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2}}{[(x-a)^2 + b^2]^n} dx = \int \frac{1}{b^{2n-1}} \frac{1}{[(x-a)^2 + b^2]^{n-1}} dx \quad \text{si } n \neq 1$$

$$= \int \frac{1}{b^{2n-1}} \frac{1}{[(x-a)^2 + b^2]^n} dx \quad \text{si } n=1$$

La deuxième primitive se voit aisée : facile à trouver en changeant de variable

$$t = \frac{x-a}{b} \Rightarrow dt = \frac{1}{b} dx \quad \text{et on obtient :}$$

$$I_n = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} \quad \text{pour } n=1 \quad I_1 = \int \frac{dt}{1+t^2} = \text{Arctg } t$$

et $I_n(t)$ se calcule par récurrence. Soit n_1 en faisant une intégration par parties : $\begin{cases} u(t) = (1+t^2)^{-n} \\ v'(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) = -2nt(1+t^2)^{-n-1} \\ v(t) = t \end{cases}$

$$I_n(t) = \int \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \frac{t}{(1+t^2)^n} - \int \frac{-2nt t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

-f-

$$\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = \int \left[\frac{t^2+1}{(1+t^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \right] dt$$

$$= \int \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - \int \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt$$

$$\Rightarrow I_n(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n I_n - 2n I_{n+1}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left[I_n (2n-1) + \frac{t}{(1+t^2)^n} \right]$$

Exemple : $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx = \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x+2} dx = \ln |x+1| - \ln |x+2| + c$$

$$1) \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 2x + 5} dx$$

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 2x + 5} = x - 2 + \frac{12}{x^2 + 2x + 5}$$

$$\frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 2x + 5} = x - 2 + \frac{12}{x^2 + 2x + 5}$$

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 + 2x + 5} dx = \int (x-2) dx + \int \frac{12}{x^2 + 2x + 5} dx = x^2 - 2x + \int \frac{12}{x^2 + 2x + 5} dx$$

Décomposition de $\frac{1}{x^2 + 2x + 5}$

$$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$$

-d-

$$\frac{1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{4\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}}{\left[\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1\right]} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Ainsi $\int \frac{x^3+x+2}{x^2+2x+5} dx = x^2-2x + \frac{12}{2} \operatorname{Arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$

$$C \in \mathbb{R}$$