

I) Matrices, déterminants:

Étinition: On appelle matrice, un tableau de nombres à n lignes et m colonnes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

On note $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$

i : lignes
 j : colonnes.

• Si $m=1$, la matrice est appelée vecteur et $A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$.

• Si $n=m$, A est appelée matrice carrée.

Exple: $n=2, m=3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$a_{11}=1, a_{12}=0, a_{13}=-1, \dots$$

1) Quelques matrices carrées particulières:

a) Matrice unité: $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

Exples: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exples: $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Matrice triangulaire supérieure:

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exple:

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

d) Matrice triangulaire inférieure:

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Exples: $L_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$

3) Opérations sur les matrices:

a) addition et soustraction: L'addition et la soustraction des matrices se font terme à terme. les matrices doivent avoir le même nombre de lignes et même nombre de colonnes.

Exples: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

b) Multiplication par un scalaire réel: pour multiplier une matrice par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, il faut multiplier chaque élément de la matrice par ce nombre.

Exple pour $\lambda = 2$, $2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

c) Produit de 2 matrices

soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ et $B = (b_{jl})_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq l \leq p}}$

$$\begin{matrix} A & \cdot & B & = & C & = & (c_{il}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (n,m) & & (m,p) & & (n,p) \end{matrix} \quad \text{tel que } c_{il} = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jl}$$

Req: on a eu fait: $c_{il} = (a_{i1}, \dots, a_{im}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}$

Exemples:

$$c_{11} = \sum_{j=1}^n a_{1j} b_{j1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \cdot B =$$

Exercice:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \\ -2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Calculer $2A - B$, $A \cdot C$.

b) CA et $A \cdot B$ sont-elles définies? trouver $\text{Tr}(C)$, A^T , B^T .

* M une matrice (n, p) alors ${}^t M$ sera (p, n) définie par: ${}^t M = (b_{ji})$ où $b_{ji} = a_{ij}$

Remarque: le produit des matrices n'est pas commutatif; en effet

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A \cdot B = ? \quad B \cdot A = ?$$

4) Déterminants: (المتحدد)

Définition: Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n .

On définit A_{ij} la matrice extraite de A en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A .

Exemples:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow A_{11} = , A_{12} = , A_{21} = , A_{22} =$$

$$B = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 7 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & -6 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow B_{11} = , B_{12} = , B_{21} + \dots B_{22} =$$

Définition: Soit A une matrice d'ordre n telle que $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$

On appelle déterminant de A et on note $\det A$ (ou $|A|$) le nombre

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{si on fixe la colonne}$$

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \text{si on fixe la ligne}$$

Exemples:

1. si $n=2$ i.e. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, alors $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

en effet: pour $j=1 \dots$

si on prend $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| =$

2. si $n=3$ i.e. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, alors :

$i=1$:

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})$$

Req: On peut calculer le $\det A$ par rapport à n'importe quelle ligne ou colonne.

Exemple:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés du déterminant:

1- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. Exemple: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

2- $\det(A^T) = \det A$.

3- le $\det$ d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au produit des éléments de la diagonale.

5) Inversion d'une matrice carrée:

Une matrice carrée A est dite inversible (ou régulière) si $\det A \neq 0$.

on note par A^{-1} l'inverse de la matrice A et on a:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T \quad \text{avec } C = (C_{ij}) \text{ et } C_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$$

Exemples: Calculer les inverses des matrices suivantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet A_1^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/8 & 1/2 \\ -1/4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bullet |A_2| = 5 \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\bullet |A_3| = 6. \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A_2 \cdot A_2^{-1} = I_3$$

B inverse de A si $A \cdot B = I$.

~~Quelques remarques:~~

~~Chaque base son inverse~~

~~La matrice identité~~

~~La matrice identité~~

IV Systemes d'equations lineaires: (جمل الخط 8) (2013)

1) définition : On appelle, système à n équations linéaires et p inconnues, tout système de la forme :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n. \end{cases}$$

On appelle :

a_{ij} : coefficients

x_i : inconnues

b_i : termes constants.

un tel système peut s'écrire sous forme matricielle :

$$A \cdot X = b. \quad \text{avec}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exples: Ecrire sous forme matricielle, les systèmes suivants.

$$(S_1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ -7x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} 3x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

2) Système de Cramer: (Cas où A est une matrice régulière).

(S) sera dit de Cramer si $n = p$ (i.e. le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations), et si $\det A \neq 0$.

L'unique solution du système (S) de Cramer ($AX = b$) est donnée par

les formules suivantes:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det A}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}}{\det A}.$$

sinon, on peut écrire le système sous forme matricielle:

$$A \cdot X = b \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I_n} \cdot X = A^{-1} \cdot b \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot b$$

Exemples: Résoudre:

$$(S_1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\Delta = 5, \quad x_1 = \frac{3}{5}, \quad x_2 = \frac{1}{5}, \quad x_3 = \frac{7}{5}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot b = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(S_2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\Delta = 1, \quad x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -5$$

Remarque : si $A \cdot X = 0$ alors $X = 0$ est la solution unique du système de Cramer.

3 - Résolution d'un système d'équations linéaires: (cas général).

Soit (S) le système suivant :

$$(S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ - - - - - \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases} \iff A \cdot X = b.$$

Comment résoudre (S) : ?

* On extrait de (S) le système (S') suivant :

$$(S') \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r = b'_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + a_{1r+2}x_{r+2} + \dots + a_{1p}x_p) = b'_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2r}x_r = b'_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + a_{2r+2}x_{r+2} + \dots + a_{2p}x_p) = b'_2 \\ \text{--- --- --- --- --- --- --- --- ---} \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \dots + a_{rr}x_r = b'_r - (a_{rr+1}x_{r+1} + a_{rr+2}x_{r+2} + \dots + a_{rp}x_p) = b'_r \end{cases}$$

$$(S') \iff M \cdot X' = b' \text{ avec } X' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \quad b' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \vdots \\ b'_r \end{pmatrix} \text{ et}$$

M^s une matrice carrée d'ordre r telle que $\det M^s \neq 0$.

(S') est donc un système de Cramer, qui a pour solution unique X' telle que: $x_1 = \frac{\det M_1}{\det M}$, $x_2 = \frac{\det M_2}{\det M}$, ..., $x_r = \frac{\det M_r}{\det M}$

où M_j sont les matrices obtenues en remplaçant la colonne j dans M par la colonne b' .

deux cas sont à envisager :

1^{er} cas : si le vecteur $x = (\frac{\det M_1}{\det M}, \dots, \frac{\det M_r}{\det M}, x_{r+1}, \dots, x_p)$ vérifie le système (S) alors x est solution de (S)

2^e cas : sinon (S) n'a pas de solutions.

Exemples : Résoudre :

$$S) \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+4z=0 \\ 4x-11y+10z=0 \end{cases} \rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & -11 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \det A = 0.$$

$$(S') \begin{cases} x+y=-z \\ 2x-3y=-4z \end{cases} \rightarrow |M| = -5, \quad x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -4z & -3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-7}{5}z, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & -4z \end{vmatrix}}{-5}$$

$$(S) = \{ (x, y, z) \mid (S) \text{ est vérifiée} \}$$

$$= \{ (x, y, z) \mid x = -\frac{7}{5}z, y = \frac{2}{5}z \} = \{ (-\frac{7}{5}z, \frac{2}{5}z, z) \mid z \in \mathbb{R} \}$$

$$(S) = \{ z(-\frac{7}{5}, \frac{2}{5}, 1) \mid z \in \mathbb{R} \}.$$

$$* \begin{cases} x+z=-y \\ 2x+4z=+3y \end{cases} \rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow |M| = 2 \neq 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -y & 1 \\ 3y & 4 \end{vmatrix}}{2} = -\frac{7}{2}y, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -y \\ 2 & 3y \end{vmatrix}}{2} = \frac{5}{2}y.$$

on remplace dans (3) $-\frac{7}{2}y \times 4 - 11y + 10 \cdot \frac{5}{2}y = 0$

$$Soln = \{ (-\frac{7}{2}y, y, \frac{5}{2}y) \mid y \in \mathbb{R} \}$$

$$* \begin{cases} 2x+3y=3 \\ x-2y=5 \\ 3x+2y=8 \rightarrow 7 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1 \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2y-z=0 \\ 2x+3y-2z=0 \\ -x+3y+z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4+x_5=0 \\ x_2+x_3-2x_4+2x_5=0 \\ 2x_1+x_2-5x_3-4x_4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1+2x_2+3x_4=x_3-x_5 \\ x_2-2x_4=-x_3-2x_5 \\ 2x_1+x_2=5x_3+4x_4 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} \int 2(2n+1)^{1/2} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{(2n+1)^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{3} (2n+1)^{3/2}$$