U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 1 **Math 1**

Faculté de Mathématiques **$1^{\text{ère}}$ Lic, STU, Section E**

Série d'exercices pour se préparer à l'examen finale

Exercice 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1)\ |3x-1| = |2x+1| \qquad 2)\ |2x+1| + |3x-1| = 5 \qquad 3)\ |x-3| - |x+1| = 2.$$

Exercice 2 : Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$1)\ 1+i\sqrt{3} \qquad 2)\ 2+2i \qquad 3)\ \frac{1+i}{\sqrt{3}+i} \qquad 4)\ (1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right).$$

Exercice 3 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$1)\ z^2 - z + 1 - i = 0 \qquad 2)\ z^3 = 8i \qquad 3)\ z^4 + 1 = 0 \qquad 4)\ z^5 - 1 = 0.$$

Exercice 4 : Déterminer les constantes a et b telles que $\dfrac{x}{x^2-4} = \dfrac{a}{x-2} + \dfrac{b}{x+2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 : Montrer que la suite (u_n) définie par

$$u_1 = \sqrt{2}, \ \ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}, \ \ \forall n \geq 1$$

est croissante majorée par 2. En déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

Exercice 6 : Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies par $v_0 > u_0$ et

$$\begin{cases} u_n = \dfrac{3u_{n-1} + 2v_{n-1}}{5} \\ v_n = \dfrac{3v_{n-1} + 2u_{n-1}}{5} \end{cases}$$

1. Calculer $v_n - u_n$ en fonction de $v_0 - u_0$.
2. Montrer que $u_n < v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que (v_n) et (u_n) sont adjacentes.
4. Calculer $v_n + u_n$ en fonction de $v_0 + u_0$ et en déduire la limite des suites (v_n) et (u_n).

Exercice 7 : Calculer les limites suivantes : $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{2x-2}$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+2} - x$.

Exercice 8 : Calculer $\arcsin\frac{1}{2}$, $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\arccos\left(\cos\frac{-\pi}{2}\right)$, $\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

Exercice 9 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, puis calculer leurs dérivées :

$f(x) = \arcsin(x^2-1)$, $g(x) = \arccos(2x+5)$, $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $u(x) = \sin(x^2)\, e^{3x}$, $v(x) = \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$.

Exercice 10 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - \sin x}{x - \dfrac{\pi}{4}}, & \text{si } x \neq \frac{\pi}{4}, \\ a, & \text{si } x = \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Déterminer a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 : En utilisant la règle de l'Hôpital, calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1 + \log x}{e^x - e}$, 2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$, 3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^p - 1}{x^q - 1}$, 4) $\lim\limits_{x\to e} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{e}}{\log x - 1}$, 5) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1 - x}{1 - \sin \frac{\pi}{2} x}$.

Exercice 12 :

1. Montrer que l'équation $\sin(\pi x) = 2 - e^x$ admet au moins une racine réelle $r \in \left]0, 1\right[$.

2. Montrer que l'équation $x^5 + 5x + 4 = 0$ admet une unique racine réelle.

Exercice 13 : Peut-on appliquer le théorème de Rolle dans les cas suivants?

1) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $[-1, 1]$; 2) $g(x) = \begin{cases} x + \sin x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ sur $[0, \pi]$.