

Série n°2 (Nombres réels et complexes)

Exercice 1.

a) Trouver tous les nombres x qui vérifient les inégalités suivantes :

1. $(x - 1)(2x - 3) > 0$ 2. $(x + 2)(x - 3) < 0$ 3. $3x + 1 < 5x + 2$.

b) Résoudre dans \mathbb{R} les équations $x(\sqrt{x} + 3) = 4$ et $|x - 1| = |2x + 3|$.

c) Pour $x, y \geq 0$, classer par ordre croissant les expressions $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, $\sqrt{x + y}$ et $2\sqrt{\frac{x + y}{2}}$.

Exercice 2.

Soient a un nombre réel et n un nombre entier naturel.

Montrer que si $|a| \geq 1$ alors $|a^{n+1}| \geq |a^n| \geq 1$. Que dire quand $|a| \leq 1$?

Exercice 3.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $[x + 1] = [x] + 1$.

b) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y \implies [x] \leq [y]$.

c) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq [2x] - 2[x] \leq 1$.

Exercice 4.

On donne $z = 3 + \sqrt{3}i$ et $w = -1 + 2i$.

Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$Z_1 = z - \bar{w}, \quad Z_2 = 2\bar{z}, \quad Z_3 = z^2, \quad Z_4 = w^3, \quad Z_5 = \frac{z}{w}.$$

Exercice 5.

Calculer le rapport $\frac{z}{w}$ avec $z = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}$ et $w = \frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{2}}$.

En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 6.

a) Écrire les nombres -1 , $-1 - \sqrt{3}i$, $-1 + i$, $-8i$ sous forme trigonométrique.

b) En déduire les racines cubiques de ces nombres.

c) Calculer $(-1 - \sqrt{3}i)^5$ et $(-1 + i)^{10}$.

Exercice 7.

Montrer les égalités suivantes :

$$\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta, \quad \cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta.$$

Exercice 8.

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

$$\begin{aligned} 5z + 2i &= (1 + i)z - 3, & \frac{z - i}{z + 3} &= 4i, \\ z^4 + 1 &= 0, & z^5 - 1 &= 0, \\ z^2 + (-3 + i\sqrt{3})z + (-1 + i\sqrt{3}) &= 0, & z^4 + (5 - 2i)z^2 + 5 - 5i &= 0. \end{aligned}$$

Exercice 9.

Un homme parcourt 12 km dans la direction Nord-Est, ensuite 20 km à 30° Ouest-Nord et enfin 18 km à 60° Sud-Ouest.

Déterminer analytiquement et graphiquement à quelle distance et quelle direction il se trouve par rapport à sa position de départ.