

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENNE⁽¹⁾

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

DÉPARTEMENT D'ANALYSE



Notes de Cours du module Séries (Math 3)

Par

LAADJ Toufik⁽²⁾

Pour

Deuxième année Licence
Domaine : Sciences et Technologies

Septembre 2013

⁽¹⁾USTHB : Bab Ezzouar Alger, Algérie.

⁽²⁾Page Web : <http://perso.usthb.dz/~tlaadj/>

Table des matières

Table des matières	iii
Description du Cours	iv
0 Rappel sur les suites numériques réelles	1
1 Séries numériques	3
1.1 Généralités	4
1.1.1 Convergence	4
1.1.2 Propriétés	5
1.2 Séries à termes positifs	6
1.2.1 Règles de comparaison	7
1.2.2 Séries de Riemann	9
1.2.3 Critère de D'Alembert	10
1.2.4 Critère de Cauchy (ou règle de Cauchy)	11
1.2.5 Critère de Raabe-Duhamel	13
1.2.6 Critère de Gauss	13
1.3 Séries à termes quelconques	14

1.3.1	Critère d'Abel	14
1.3.2	Séries alternées	15
1.4	Séries absolument convergentes	16
1.5	Séries commutativement convergentes	16
2	Suites et séries de fonctions	19
2.1	Suites de fonctions	19
2.1.1	Convergence simple	20
2.1.2	Convergence uniforme	20
2.1.3	Théorèmes de passage à la limite	21
2.2	Séries de fonctions	22
2.2.1	Domaine de convergence	22
2.2.2	Convergence uniforme	23
2.2.3	Convergence normale	24
2.2.4	Propriétés des séries de fonctions uniformément convergentes	24
3	Séries entières	26
3.1	Généralités	27
3.2	Rayon de convergence	28
3.2.1	Existence du rayon de convergence	28
3.2.2	Calcul du rayon de convergence	29
3.3	Propriétés des séries entières	30
3.3.1	Continuité	30
3.3.2	Dérivation	31
3.3.3	Intégration	32
3.3.4	Opérations sur les séries entières	33

3.4	Fonctions développables en série entière	33
3.4.1	Série de Taylor	34
3.5	Séries entières et équations différentielles	37
4	Séries de Fourier	39
4.1	Séries trigonométriques	39
4.1.1	Représentation complexe d'une série trigonométrique	41
4.1.2	Calcul des coefficients de la série trigonométrique	41
4.2	Séries de Fourier	42
4.2.1	Séries de Fourier de fonctions 2π -périodiques	42
4.2.2	Séries de Fourier d'une fonction de période arbitraire	45
4.2.3	Séries de Fourier de fonctions non périodiques	46
4.2.4	Égalité de Parseval	47
	Références	49

Description du Cours

Objectif du Cours

L'objectif du module Séries (Math 3) est l'étude des sommes infinies

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Ces notes de cours donnent les principales définitions et les résultats concernant ces sommes infinies (séries), illustrés par des exemples.

Contenu du Cours

- Séries numériques
- Suites et séries de fonctions
- Séries entières
- Séries de Fourier

Résultats d'apprentissage

À la fin du cours, l'étudiant doit avoir une compréhension approfondie de la théorie des séries et devrait être en mesure d'appliquer ces connaissances pour résoudre les exercices dans une variété de contextes. En particulier, l'étudiant doit être capable de :

- Comprendre ce qu'une série est.
- Comprendre la distinction entre une suite, suite des sommes partielles et une série.
- Comprendre la condition nécessaire de convergence.
- Étudier la nature des séries en utilisant les divers critères de convergence.
- Comprendre la convergence absolue et semi convergence.
- Étudier la convergence simple et uniforme des suites et des séries de fonctions.
- Trouver le rayon de convergence et la somme d'une série entière.
- Trouver le développement en séries entières d'une fonction.
- Étudier la convergence d'une série de Fourier.
- Développer une fonction en série de Fourier.
- Trouver la somme des séries numériques en utilisant les séries de Fourier.