Chapitre 2

Suites et séries de fonctions

Sommaire

2.1 Suites de fonctions **19**

2.1.1 Convergence simple 20

2.1.2 Convergence uniforme 20

2.1.3 Théorèmes de passage à la limite 21

2.2 Séries de fonctions **22**

2.2.1 Domaine de convergence 22

2.2.2 Convergence uniforme 23

2.2.3 Convergence normale 24

2.2.4 Propriétés des séries de fonctions uniformément convergentes 24

2.1 Suites de fonctions

Soit (a, b) un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $F = \mathcal{F}((a, b), \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de (a, b) dans $\mathbb{R}$.

Définition 36

Une suite de fonctions réelles définie sur (a, b) est une application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & F \\ & n & \longmapsto & f_n. \end{array}$$

f_n est le terme général de la suite $(f_n)_n$.

Exemple 22

L'intervalle $(a, b) = \mathbb{R}$ et $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$, $n \in \mathbb{N}$. ■

2.1.1 Convergence simple

Définition 37

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles définie sur (a, b). On dit que $(f_n)_n$ **converge simplement** vers f sur (a, b) si pour tout $x_0 \in (a, b)$ on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$.

Exemple 23

La suite $(f_n)_n$ définie par $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$ converge simplement vers la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}. \ ■$$

2.1.2 Convergence uniforme

Définition 38

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ **converge uniformément** vers f sur (a, b) si

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sup_{x \in (a,b)} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0.$$

Exemple 24

Soit $(a, b) = [0, +\infty[$ et $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$, $n \in \mathbb{N}$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f définie par $f(x) = x$.

On a

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,+\infty[} \left|\frac{nx^2}{1+nx} - x\right| = \sup_{x\in[0,+\infty[} \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n}.$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0$ et donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f définie par $f(x) = x$. ■

Remarque 39

La convergence uniforme implique la convergence simple, mais la réciproque n'est pas vraie. ■

2.1.3 Théorèmes de passage à la limite

Théorème 40 (Continuité)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de (a,b) dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément sur (a,b) vers une fonction f. Alors f est continue sur (a,b).

La convergence de l'exemple $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx^2}$ n'est pas uniforme car la fonction limite n'est pas continue en 0.

Théorème 41 (Intégration)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles continues sur $[a,b]$ et uniformément convergente vers f, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Exemple 25

Soit $(a,b) = [0,1]$ et $f_n(x) = \dfrac{ne^{-x}+x^2}{n+x}$, $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f définie par $f(x) = e^{-x}$.

On a

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{ne^{-x}+x^2}{n+x} - e^{-x}\right| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{x^2 - xe^{x}}{n+x}\right| \le \frac{2}{n}.$$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)|\right) = 0$ et donc $(f_n)_n$ converge uniformément vers f définie par $f(x) = e^{-x}$. D'après le théorème précédent

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}dx = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} \frac{ne^{-x}+x^2}{n+x}dx = \int_0^1 e^{-x}dx = 1 - e^{-1}. \ ■$$

Théorème 42 (Dérivation)

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $[a,b]$ telle que la suite $(f'_n)_n$ converge uniformément vers g sur $[a,b]$ et la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $[a,b]$. Alors la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = g$.

Exemple 26

Soit $(a,b) = [0,1]$ et $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$, $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$, $f'_n(x) = \dfrac{n^2}{(n+x)^2}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,1]} |f'_n(x) - 1|\right) = 0$. Par conséquent, la suite $(f'_n)_n$ converge uniformément vers la fonction g définie par $g(x) = 1$. On constate que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers la fonction f définie par $f(x) = x$ vérifiant $f' = g$. ■

2.2 Séries de fonctions

Définition 43

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions réelles définie sur (a,b).

La série $\sum f_n$ est appelée **série de fonctions** et f_n son **terme général**.

Exemple 27

On prend $(a,b) =]-\infty, +\infty[$. La série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} e^{nx}$ est une série de fonctions et son terme général $f_n(x) = e^{nx}$. ■

2.2.1 Domaine de convergence

Définition 44

- On dit que $\sum f_n$ converge en x_0 si la série $\sum f_n(x_0)$ converge.
- La série $\sum f_n$ est dite **simplement convergente** sur (a,b) si la série $\sum f_n(x)$ converge en tout x dans (a,b).
- **Domaine de convergence** de la série $\sum f_n$ est

$$D = \left\{ x \in (a,b) \text{ tel que } \sum f_n(x) \text{ converge} \right\}.$$

Le domaine de convergence est souvent appelé domaine de définition.

Exemple 28

Trouver le domaine de convergence de la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ où $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n}$.

On note que $|f_n(x)| = \left|\dfrac{x^n}{n}\right| \leq |x|^n$.

Pour $x \in]-1, 1[$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |x|^n$ converge, donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ converge aussi.

Pour $x = -1$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$ est une série alternée convergente.

Pour $x = 1$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n}$ est la série harmonique qu'est divergente.

Pour $|x| \geq 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x^n}{n} = \infty$, donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n}$ diverge pour $|x| \geq 1$.

Alors le domaine de convergence $D = [-1, 1[$. ■

2.2.2 Convergence uniforme

Définition 45

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions converge simplement vers S sur (a, b) et $(S_n)_n$ la suite des sommes partielles.

$$S_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + ... + f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x).$$

La série $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur (a, b) si la suite $(S_n)_n$ converge uniformément vers S dans (a, b).

Exemple 29

Considérons la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$. Le domaine de convergence de cette série est $D =]-1, 1[$. Montrons qu'elle est uniformément convergente sur tout intervalle $[-r, r]$ avec $r \in]0, 1[$.

On a $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$, $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ et pour tout $x \in [-r, r]$

$$|S(x) - S_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{n} x^k\right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \leq \frac{r^{n+1}}{1-r}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{r^{n+1}}{1-r} = 0$, alors la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ est uniformément convergente. ■

2.2.3 Convergence normale

Définition 46

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définie sur un intervalle (a,b).

On dit que la série $\sum f_n$ converge **normalement** sur (a,b) si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente, où $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in(a,b)} |f_n(x)|$.

Prouver la convergence normale de $\sum f_n$ sur (a,b) revient donc à trouver une inégalité

$$|f_n(x)| \leq u_n$$

valable pour tout $x \in (a,b)$, où $(u_n)_n$ est une suite telle que la série $\sum u_n$ converge.

L'intérêt de la notion de convergence normale réside dans l'implication :

convergence normale $\Rightarrow$ convergence uniforme.

Exemple 30

Considérons la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. On a $\left|\dfrac{1}{n^2+x^2}\right| \leq \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge. Alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. ■

2.2.4 Propriétés des séries de fonctions uniformément convergentes

Théorème 47 (Continuité)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions uniformément convergente sur (a,b) et soit x_0 dans (a,b). On suppose que chaque fonction f_n continue en x_0. Alors la série $\sum f_n$ est continue au point x_0 et vérifiant $\lim\limits_{x\to x_0} \sum f_n(x) = \sum \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x) = \sum f_n(x_0)$.

Exemple 31

Considérons la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n+1)!}$, $x \in [0,1]$.

On a $\left|\dfrac{x^n}{(2n+1)!}\right| \leq \dfrac{1}{(2n+1)!}$ sur $[0,1]$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)!}$ converge. Alors la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n+1)!}$ converge normalement sur $[0,1]$ et donc il y a la convergence uniforme.

Comme les fonctions $x \longmapsto \dfrac{x^n}{(2n+1)!}$ sont continues, il vient alors la continuité de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{(2n+1)!}$ sur $[0,1]$. ■

Théorème 48 (Intégration terme à terme)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions uniformément convergente sur $[a,b]$. On suppose que chaque fonction f_n continue sur $[a,b]$. Alors la série $\sum \left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right)$ converge vers $\int_a^b \left(\sum f_n(x)\right) dx$. Autrement dit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(x)\,dx\right) = \int_a^b \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) dx$.

Exemple 32
Considérons la série de fonctions $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$, $x \in [0,t]$, $0 < t < 1$. Cette série est uniformément convergente sur $[0,t]$ puisque $|(-1)^n x^{2n}| \leq t^{2n}$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^{2n}$ converge. Alors on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^t (-1)^n x^{2n} dx\right) = \int_0^t \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}\right) dx$, ce qu'est équivalente à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{Arctg} t. \ \blacksquare$$

Théorème 49 (Dérivation terme à terme)
Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$. Si $\sum f_n$ converge simplement sur $[a,b]$ et si $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a,b]$, alors la série $\sum f_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ et $\left(\sum f_n\right)' = \sum f_n'$.

Exemple 33
Soit $[a,b] = [-t,t]$, $0 < t < 1$.
Considérons la série de fonctions $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ où $f_n(x) = (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$.
À l'aide du critère de d'Alembert, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ converge simplement sur $[-t,t]$.
La série dérivée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$ converge uniformément car $|(-1)^n x^n| \leq t^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} t^n$ converge.
Par conséquent la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-t,t[$ et

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}.$$

Il s'agit de la fonction $x \longmapsto \operatorname{Log}(1+x)$. $\blacksquare$