Chapitre 3

Séries entières

Sommaire

3.1 Généralités

Définition 50

On appelle série entière toute série de fonctions $\sum f_n$ dont le terme général est de la forme $f_n(x) = a_n x^n$, où (a_n) désigne une suite réelle et $x \in \mathbb{R}$.

Une série entière est notée $\sum a_n x^n$.

Comme pour les séries de fonctions, on cherche le **domaine de convergence**

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que la série } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ converge} \right\}.$$

Si la série $\sum a_n x^n$ est convergente sur un domaine D, cela permet de définir une fonction $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Exemple 34

Considérons la série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$.

Posons $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$ et appliquons le critère de D'Alembert

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0.$$

La série entière $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ est alors absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $D = \mathbb{R}$. ■

Exemple 35

Soit la série entière $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$. Posons $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^2}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 x \right| = |x|.$$

Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.
Pour le cas où $|x| = 1$, on a $|f_n(x)| = \dfrac{|x|^n}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}$ qu'est le terme général d'une série de Riemann convergente. Par suite, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$ est absolument convergente dans $[-1, 1]$ et alors $D = [-1, 1]$. ■

Exemple 36

Soit la série entière $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n! x^n$. Cette série ne converge que si $x = 0$ car

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to+\infty} |(n+1)x|$$

et cette limite n'existe que si $x = 0$. D'où $D = \{0\}$. ■

Exemple 37

Considérons la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Posons $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{n}{n+1} x \right| = |x|.$$

Si $|x| < 1$, la série est absolument convergente et si $|x| > 1$ la série diverge.
Pour le cas où $x = 1$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, c'est la série harmonique qu'est divergente.
Si $x = -1$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, c'est la série harmonique alternée qu'est convergente.
D'où $D = [-1, 1[$. ■

Proposition 51 (Lemme d'Abel)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(a_n x_0^n)_n$ soit bornée. Alors :

- *La série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente pour $|x| < |x_0|$.*
- *La série $\sum a_n x^n$ est normalement convergente pour $|x| < r$ avec $0 < r < |x_0|$.*

3.2 Rayon de convergence

3.2.1 Existence du rayon de convergence

Pour les séries entières, la notion de convergence prend une forme assez simple.

Théorème 52

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière; alors il existe un unique nombre réel $R \geq 0$ (éventuellement infini) tel que

- *$\sum a_n x^n$ converge absolument dans $]-R, R[$.*
- *$\sum a_n x^n$ diverge si $|x| > R$.*

Définition 53

Le nombre $R = \sup \{r \in \mathbb{R}^+ \text{ tel que } \sum |a_n| r^n \text{ converge}\} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ est appelé rayon de convergence de la série $\sum a_n x^n$.

Remarque 54

Le rayon de convergence d'une série $\sum a_n x^n$ est caractérisé par :

1. $|x| < R \Rightarrow \sum a_n x^n$ est absolument convergente.

2. $|x| > R \Rightarrow \sum a_n x^n$ diverge.

3. $|x| = R$ est le cas douteux où on ne peut rien dire sur la nature de la série.

4. $|x| \leq r < R$ pour $r > 0$, la série est normalement convergente. ■

3.2.2 Calcul du rayon de convergence

La proposition suivante permet la détermination pratique du rayon de convergence dans certains cas.

Proposition 55 (Lemme d'Hadamard)

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. Le rayon de convergence R est donné par la relation :

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Exemple 38

1. Considérons la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

   On a $a_n = \frac{1}{n!}$, utilisons le critère de D'Alembert :

   $$\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

   Alors, le rayon de convergence est $R = +\infty$. La série est absolument convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Soit la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

   On a $a_n = \frac{1}{n^2}$, et donc $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \right| = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$. Le rayon de convergence est $R = 1$. La série est absolument convergente pour tout $|x| < 1$ et divergente si $|x| > 1$. Pour $|x| = 1$ la série converge.

3. Soit la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$.

   On a $a_n = \frac{1}{2^n}$. Le critère de Cauchy donne : $\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$.
   Le rayon de convergence est donc $R = 2$. La série est absolument convergente pour tout $|x| < 2$ et divergente si $|x| > 2$. Pour $|x| = 2$ la série diverge. ■

Cas des séries lacunaires

Soit φ une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, la série $\sum a_n x^{\varphi(n)}$ est une série entière. Pour trouver son rayon de convergence, on commence par calculer la limite suivante :

$$l = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}x^{\varphi(n+1)}}{a_n x^{\varphi(n)}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \lim_{n\to+\infty} |x|^{\varphi(n+1)-\varphi(n)},$$

puis on cherche le domaine de x où $l < 1$; R est donc le rayon de domaine où notre série converge.

Exemple 39

Trouver le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n x^{2n+5}$.

Dans notre cas $\varphi(n) = 2n + 5$ et

$$l = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{3^{n+1}x^{2(n+1)+5}}{3^n x^{2n+5}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{3^{n+1}}{3^n} \right| \lim_{n\to+\infty} |x|^{2(n+1)+5-(2n+5)} = 3|x|^2.$$

La série converge si $3|x|^2 < 1$, qu'est équivalente à $|x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$, d'où le rayon de convergence est $R = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

La série est absolument convergente pour tout $|x| < \frac{\sqrt{3}}{3}$ et divergente si $|x| > \frac{\sqrt{3}}{3}$. ■

3.3 Propriétés des séries entières

3.3.1 Continuité

Proposition 56

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et soit f sa somme qu'est définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R, R[$. La fonction f est alors continue.

Remarque 57

Par la seule connaissance du rayon de convergence, on ne peut rien dire a priori sur la définition et l'éventuelle continuité de f en $\pm R$. ■

Exemple 40

Considérons la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$.

Le rayon de convergence de cette série entière est $R = 1$.

La fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est donc continue sur $]-1, 1[$.

<u>*Cas de $x = -1$*</u>

On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} (-1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, qu'est divergente. Donc f n'est pas définie en $x = -1$.

<u>*Cas de $x = 1$*</u>

On a $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} (1)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, qu'est une série harmonique alternée convergente.

Donc f est définie en $x = 1$. Ainsi, elle est continue en $x = 1$ par la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ sur $[0, 1]$. ■

3.3.2 Dérivation

Définition 58

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$ si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe.

Si cette limite existe on la note $f'(x_0)$.

Définition 59

Une fonction f est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, si sa dérivée d'ordre n est une fonction continue sur I.

Proposition 60

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, et soit f la fonction définie sur $]-R, R[$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors f est dérivable et sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme : $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$.

Définition 61

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ est appelée **série entière dérivée** de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Remarque 62

Série entière et série entière dérivée ont le même rayon de convergence. ■

Exemple 41

Considérons à nouveau la série entière $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ de rayon de convergence $R = 1$, qu'est définie et continue sur $]-1,1]$.

Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{(-1)^n}{n} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} -(-x)^{n-1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n = \frac{-1}{1+x}.$$

Donc pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{-1}{1+t} dt = -\operatorname{Log}(1+x)$.

On retient

$$\forall x \in]-1,1] \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \operatorname{Log}(1+x). \ ■$$

3.3.3 Intégration

Définition 63

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ admet une primitive s'il existe une fonction $F : D \to \mathbb{R}$ vérifiant $F' = f$; (D étant le domaine de définition de f).

Proposition 64

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R, et soit f la fonction définie sur $]-R,R[$ par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Alors pour tout intervalle $[0,x] \subset]-R,R[$, on peut calculer $\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt$ en intégrant terme à terme :

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

La série entière $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est de rayon de convergence R ; qu'est aussi une primitive de f s'annulant en 0.

Exemple 42

Considérons la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ de rayon de convergence $R = 1$.

On a

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

On en déduit que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\operatorname{Log}(1-x). \blacksquare$$

3.3.4 Opérations sur les séries entières

Proposition 65

Soit $\sum a_n x^n$, $\sum b_n x^n$ deux séries entières ayant respectivement R_1 et R_2 pour rayon de convergence.

1. *Si $R_1 \neq R_2$, le rayon de convergence R_3 de la série entière $\sum (a_n + b_n) x^n$ est $R_3 = \min\{R_1, R_2\}$.*
2. *Si $R_1 = R_2$, le rayon de convergence de la série entière $\sum (a_n + b_n) x^n$ est $R_3 \geq R_1$.*

Exemple 43

Soient les deux séries entières $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n$ et $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1-2^n}{2^n} x^n$. Les deux séries ont pour rayon de convergence $R_1 = R_2 = 1$. Par contre la série somme $(f+g)(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} x^n$, a pour rayon de convergence $R_3 = 2$. $\blacksquare$

3.4 Fonctions développables en série entière

Définition 66

Soit f une fonction réelle à variable réelle x. On dit que f est **développable en série entière** au voisinage de x_0 s'il existe une suite réelle $(a_n)_n$ et $R > 0$ tels que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \forall x \in]x_0 - R, x_0 + R[.$$

Proposition 67

Pour qu'une fonction f soit développable en série entière au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, il est ***nécessaire*** *qu'elle soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ de x_0 et dans ce cas on a : $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$.*

Exemple 44

Considérons la fonction f définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

La fonction f est développable en série entière sur $]-1,1[$ car on sait $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. ■

Exercice 1

Donner le développement en série entière de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2-x}$ au voisinage de $x_0 = 1$. ■

Remarque 68

Il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui ne sont pas développables en série entière. ■

Exercice 2

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ mais non développable en série entière au voisinage de 0. ■

3.4.1 Série de Taylor

Définition 69

On appelle série de Taylor d'une fonction $f :]-R,R[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Proposition 70

Soit $f :]-R,R[\to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de 0.

On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $x \in]-R,R[$, $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$.

Alors la série de Taylor $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ de f est simplement convergente dans $]-R,R[$ et on a :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in]-R,R[.$$

Séries de Taylor des fonctions élémentaires

1. **La fonction exponentielle :** $f(x) = e^x$.

   Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = e^x$ et donc $f^{(n)}(0) = 1$.

   Alors
$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = +\infty.$$

2. **Les fonctions hyperboliques :**
$$\operatorname{Ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \tfrac{x^6}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad R = +\infty.$$
$$\operatorname{Sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \tfrac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad R = +\infty.$$

3. **Les fonctions circulaires :**

   - **La fonction sinus** : $f(x) = \sin x$.

     On a $f'(x) = \cos x,\ f''(x) = -\sin x,\ f'''(x) = -\cos x,\ \ f^{(4)}(x) = \sin x....$ et donc $f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0....$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad R = +\infty.$$

   - **La fonction cosinus** : $f(x) = \cos x$.

     On a $f(x) = \cos x = (\sin x)'$, alors
$$\cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad R = +\infty.$$

4. **La série du binôme :** $f(x) = (1+x)^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

   On a $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, ...$

   $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$ et donc

   $f(0) = 1,\ f'(0) = \alpha,\ f''(0) = \alpha(\alpha-1), ...\ f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)$.

   Alors
$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad R = 1.$$

   En particulier pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ on a :

   - $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$.
$$\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times 5... \times (2n-3)}{2 \times 4 \times 6... \times 2n} x^n$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + ...$$

- $f(x) = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times 5 ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 ... \times 2n} x^n \\ &= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 + ...\end{aligned}$$

- En remplaçant x par $-x^2$ il vient

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 ... \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 ... \times 2n} x^{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + ...\end{aligned}$$

- Par intégration on obtient

$$\begin{aligned}\arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!} x^{2n+1} \\ &= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + ...\end{aligned}$$

5. **La fonction** $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. On a pour $|x| < 1$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + ... = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad R = 1.$$

- En remplaçant x par $-x$ on obtient

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - ... = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n, \quad R = 1.$$

- Par intégration il vient

$$\operatorname{Log}(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - ... = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \quad R = 1.$$

- En remplaçant x par $-x^2$ dans $\dfrac{1}{1-x}$ on aura

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - ... = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad R = 1.$$

- Par intégration on obtient

$$\operatorname{Arctg} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - ... = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad R = 1.$$

3.5 Séries entières et équations différentielles

Les séries entières peuvent être utilisées pour résoudre des équations différentielles linéaires à coefficients non constants développables en séries entières.

Cette méthode est illustrée par les exemples suivants.

Exemple 45

Considérons l'équation différentielle $2x(1+x)y'' + (5x+3)y' + y = 0$.

On cherche une solution de cette équation différentielle qu'est développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$. Posons $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. On a

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xy'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n, \\ xy''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n \\ x^2 y''(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n. \end{aligned}$$

Il vient, en remplaçant dans notre équation différentielle

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[2n(n+1)a_{n+1} + 2n(n-1)a_n + 5na_n + 3(n+1)a_{n+1} + a_n\right] x^n = 0,$$

qu'est équivalente à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\left[(2n+3)a_{n+1} + (2n+1)a_n\right] x^n = 0,$$

encore équivalent à dire que la suite $(a_n)_n$ est solution de l'équation de récurrence suivante :

$$(2n+3)a_{n+1} + (2n+1)a_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par récurrence, on en déduit que

$$a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1} a_0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Alors

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^n = \frac{a_0}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\sqrt{x}\right)^{2n+1} = a_0 \frac{\operatorname{Arctg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}. \blacksquare$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = (1+x)^\alpha$ où α est un réel non entier naturel.

1. Vérifier que f est une solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle avec condition initiale suivante :
$$\begin{cases} (1+x)\,y' - \alpha y = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$
2. Retrouver le développement en série entière de f ainsi que son rayon de convergence. ■

Solution.

1. On a bien $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \,]-1,1[$:
$$(1+x)\,f'(x) - \alpha f(x) = (1+x)\,\alpha\,(1+x)^{\alpha-1} - \alpha\,(1+x)^\alpha = 0.$$
2. Supposons que la solution f de cette équation différentielle est développable en série entière sur un intervalle $]-R,R[$:
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$
On a
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,a_{n+1} x^n,$$
$$x f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n,$$
et f est solution de cette équation différentielle si, et seulement si
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(n+1)\,a_{n+1} + n a_n - \alpha a_n\right] x^n = 0,$$
encore équivalent à
$$a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$
avec $a_0 = f(0) = 1$, ce qui donne par récurrence
$$a_n = \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,...\,(\alpha-n+1)}{n!} \quad n \in \mathbb{N}^*.$$
Alors
$$f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha\,(\alpha-1)\,(\alpha-2)\,...\,(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$
Par le critère de D'Alembert $R = 1$. ■