Chapitre 4

Séries de Fourier

Sommaire

4.1 Séries trigonométriques

Définition 71

Une fonction f définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ est dite **périodique** de période $T \in \mathbb{R}^*$ (ou T-**périodique**) si pour tout $x \in D$, on a $x + T \in D$ et

$$f(x+T) = f(x).$$

Exemple 46

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$ est 2π-périodique car $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. ■

Définition 72

On appelle série **trigonométrique** réelle, toute série de fonctions de la forme :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right] \tag{1}$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Les nombres a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sont appelées **coefficients** de cette série.

Exemple 47

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos(nx)$ est une série trigonométrique avec $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 0$ et $\omega = 1$. ■

Le problème est de déterminer l'ensemble D tel que la série (1) soit convergente pour tout $x \in D$.

Remarque 73

Supposons que la série (1) converge en x dans D et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right].$$

Alors la série (1) converge en tout point de la forme $x + \frac{2k\pi}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$ et $f(x) = f\left(x + \frac{2k\pi}{\omega}\right)$; et par suite la fonction f est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. ■

Proposition 74

Si les séries numériques $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique (1) est absolument et uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

Proposition 75

Si les suites numériques $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont décroissantes et tendent vers 0, alors la série trigonométrique (1) est convergente pour $x \neq \frac{2k\pi}{\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 48

La série $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n} \cos(nx) + \frac{1}{n^2} \sin(nx)\right]$ converge pour tout $x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

4.1.1 Représentation complexe d'une série trigonométrique

D'après les relations d'Euler :

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i},$$

et en posant

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \overline{c_n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad \text{et} \quad c_0 = \frac{a_0}{2},$$

la série (1) devient

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}.$$

Cette dernière expression est appelée **forme complexe** d'une série trigonométrique.

4.1.2 Calcul des coefficients de la série trigonométrique

Cas réel

Mettons nous dans les conditions de convergence uniforme de la série trigonométrique (1) et posons

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\right].$$

Alors

$$f(x)\cos(n\omega x) = \frac{a_0}{2}\cos(n\omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega x)\cos(n\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\cos(n\omega x)\right],$$

$$f(x)\sin(n\omega x) = \frac{a_0}{2}\sin(n\omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\omega x)\sin(n\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\sin(n\omega x)\right].$$

En intégrant et en utilisant la convergence uniforme de la série trigonométrique (1) et les relations suivantes :

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(k\omega x)\cos(n\omega x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ \dfrac{\pi}{\omega} & \text{si } k = n, \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin(k\omega x)\sin(n\omega x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ \dfrac{\pi}{\omega} & \text{si } k = n, \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos(k\omega x)\sin(n\omega x)\,dx = 0,$$

on déduit alors les coefficients par les expressions suivantes :

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \qquad b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par un changement de variable, ces coefficients peuvent s'écrire

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \qquad b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $\omega = 1$, cas des fonctions 2π-périodique

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Cas complexe

On a $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}$. Les coefficients dans ce cas, sont donnés par la relation :

$$c_n = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\,e^{-in\omega x}dx = \frac{\omega}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\,e^{-in\omega x}dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4.2 Séries de Fourier

4.2.1 Séries de Fourier de fonctions 2π-périodiques

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$. On suppose que $\int_\alpha^{\alpha+2\pi} |f(t)|\,dt$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition 76

On appelle **série de Fourier** associée à f, la série trigonométrique notée σf où

$$\sigma f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right],$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Les coefficients a_n et b_n sont appelés **coefficients de Fourier** de la fonction f.

Si la fonction f n'est pas donnée explicitement sur $[0, 2\pi]$, mais sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, dans ce cas le calcul des coefficients de Fourier de f s'effectue sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Remarque 77

- Si la fonction f est paire $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ et $b_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$.
- Si la fonction f est impaire $a_n = 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$. ■

Exemple 49

Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & \text{si } x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[. \end{cases}$$

La fonction étant paire, ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$b_n = 0,\ a_0 = 1 \text{ et } a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}.$$

Par conséquent sa série de Fourier est

$$\sigma f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}\cos(nx) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi}(-1)^n \frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1}. \ ■$$

Deux questions se posent :

1. La série de Fourier associée à f est-elle convergente?
2. En cas de convergence, peut-on dire que la série converge vers f?

Théorème 78 (de Dirichlet)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes (appelées conditions de Dirichlet) :
D1) *En tout point x_0, les limites de f à droite et à gauche de x_0 existent et les discontinuité de f sont en nombre fini dans tout intervalle fini.*
D2) *f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.*
Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right] = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}.$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Les notations $f(x+0)$ et $f(x-0)$ représentent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x.

Exemple 50

Soit $f : \left]-\pi, \pi\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique, $T = 2\pi$ définie par $f(x) = x$.

1. Les discontinuités de f sont les points de la forme $x_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $f(x_k + 0) = -\pi$, $f(x_k - 0) = \pi$.
2. f est partout dérivable sauf aux points x_k. En ces points nous avons :
$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi - 0)}{x - \pi} = 1 \text{ et } \lim_{x \to \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi + 0)}{x - \pi} = 1.$$
   f vérifie les conditions de Dirichlet, donc sa série de Fourier associée est convergente.

f est impaire donc $a_0 = a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx = 2\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ et par suite

$$\sigma f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \quad \blacksquare$$

Exemple 51

Soit $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique, $T = 2\pi$ définie par $f(x) = |x|$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ et partout dérivable sauf aux points $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ où

$$\lim_{x \to k\pi^-} \frac{f(x) - f(k\pi - 0)}{x - k\pi} = (-1)^{k+1} \text{ et } \lim_{x \to k\pi^+} \frac{f(x) - f(k\pi + 0)}{x - k\pi} = (-1)^k .$$

f satisfait les conditions de Dirichlet, donc sa série de Fourier associée converge. De plus f est paire, ce qui nous donne $b_n = 0$, et

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \pi, \ a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx)\, dx \Rightarrow \begin{cases} a_{2n} = 0, \\ a_{2n+1} = \dfrac{-4}{\pi(2n+1)^2}. \end{cases}$$

La série de Fourier σf converge alors vers f car elle est continue, et on a

$$\sigma f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} = f(x).$$

Remarquons enfin que l'égalité $f(0) = 0$ se traduit par $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \qquad \blacksquare$$

Une des particularités des séries de Fourier est le calcul des sommes de certaines séries numériques.

4.2.2 Séries de Fourier d'une fonction de période arbitraire

Soit f une fonction périodique de période $T = 2l$. Pour la développer en série de Fourier sur l'intervalle $[-l, l]$ faisons le changement de variable $x = \dfrac{lt}{\pi}$. La fonction $g(t) = f\left(\dfrac{lt}{\pi}\right)$ sera une fonction 2π-périodique de t, car

$$g(t + 2\pi) = f\left(\frac{l(t + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{lt}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = g(t).$$

Alors, on peut la développer en séries de Fourier sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. En retournant à la variable x, en posant $t = \dfrac{\pi x}{l}$, on obtient

$$\sigma f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right],$$

avec

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exemple 52

Développer en séries de Fourier la fonction 2-périodique f définie par $f(x) = |x|$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Comme cette fonction est paire, on a $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 x dx = 1,\ a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos(n\pi x)\,dx \Rightarrow \begin{cases} a_{2n} = 0, \\ a_{2n+1} = \dfrac{-4}{\pi^2 (2n+1)^2}. \end{cases}$$

Alors,

$$\sigma f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2} = f(x).\ \blacksquare$$

4.2.3 Séries de Fourier de fonctions non périodiques

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction non périodique définie sur l'intervalle $[a, b]$, on prolonge f en une fonction g périodique de période $T \geq b - a$ telle que la fonction g satisfait les conditions de Dirichlet.

Exemple 53

Donner une série de Fourier de période 2π qui coïncide sur $]0, \pi[$ avec la fonction $f(x) = e^x$.

a) Choisissons un prolongement pair et posons $f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0] \\ e^{x} & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$.

Dans ce cas les coefficients sont $a_0 = 2\dfrac{e^\pi - 1}{\pi}$, $a_n = 2\dfrac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2+1}$ et $b_n = 0$.

On a alors :

$$\sigma f_1(x) = \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2+1}\cos(nx) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0] \\ e^{x} & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

b) Choisissons un prolongement impair et posons $f_2(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\\ e^{x} & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\end{cases}$.

Dans ce cas les coefficients sont $a_0 = a_n = 0$ et $b_n = 2n\dfrac{1 - (-1)^n e^\pi}{\pi(n^2+1)}$.

On a alors :

$$\sigma f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\frac{1-(-1)^n e^\pi}{\pi(n^2+1)}\sin(nx) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\\ e^{x} & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \text{ ou } x = \pm\pi \end{cases}.$$

c) Choisissons un prolongement ni pair ni impair et posons $f_3(x) = e^x$ si $x \in]-\pi, \pi[$.

On a le résultat final :

$$\sigma f_3(x) = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}\left[\cos(nx) - n\sin(nx)\right]\right)$$
$$= \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x \in]-\pi, \pi[\\ \dfrac{e^\pi + e^{-\pi}}{\pi} & \text{si} \quad x = \pm\pi \end{cases}. \qquad \blacksquare$$

On a obtenu trois séries différentes qui valent exactement e^x sur l'intervalle $]0, \pi[$. On pouvait choisir d'autres prolongements et obtenir d'autres séries.

4.2.4 Égalité de Parseval

Théorème 79 (Égalité de Parseval)
Soit f une fonction développable en série de Fourier et de période $T = \frac{2\pi}{\omega} > 0$, alors on a

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}(f(x))^2\,dx.$$

Remarque 80
Si f est de période 2π, on a :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x))^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x))^2\,dx. \qquad \blacksquare$$

Exemple 54
Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\end{cases}$.
f étant une fonction impaire donc $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}\left(1 - (-1)^n\right) \Rightarrow \begin{cases} b_{2n} = 0, \\ b_{2n+1} = \dfrac{4}{\pi(2n+1)}. \end{cases}$$

La série de Fourier associée est : $\sigma f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \text{ ou } x = \pi \end{cases}$.

- Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$ on a $\sigma f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin\left((2n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)}{2n+1} = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. On tire

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4}.$$

- Appliquons l'égalité de Parseval : $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(f(x))^2\,dx = 2 = \dfrac{16}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et l'on tire donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}.$$

- Posons $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ série convergente d'après le critère de Riemann. En séparant les pairs et les impairs on a

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow S - \frac{1}{4}S = \frac{\pi^2}{8}.$$

On tire alors

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}. \blacksquare$$