**U.S.T.H.B. 2013-2014 Semestre 1** **Math 3 : Séries**

**Faculté de Mathématiques** **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section D**

**Examen final - 16 janvier 2014. Durée : 1h 30 minutes**

**Nom :**........................ **Matricule :**........................

**Prénom :**........................ **Groupe :**........................

==========================================================

**Exercice 1 (5 points) : 1)** ***1,5 pts.*** **2)** ***2 pts.*** **3)** ***1,5 pts.***

Quelle est la nature des séries numériques suivantes :

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \qquad 2)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!} \qquad 3)\ \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}}$$

==========================================================

**Réponse.**

1) Le terme général $u_n = 3^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} > 0$ pour $n \geq 1$. En utilisant le critère de Cauchy

$$l = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to+\infty}(u_n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(3^{-n}\left(\tfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty}3^{-\frac{n}{n}}\left(\tfrac{n+1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty}3^{-1}\left(\tfrac{n+1}{n}\right)^{n} = \frac{e}{3} \simeq 0,91 < 1.$$

Comme $l < 1$, alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ est convergente.

2) Le terme général $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} > 0$ pour $n \geq 0$. En appliquant le critère de D'Alembert

$$l = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(u_{n+1}\cdot\frac{1}{u_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+2)\cdot(2n)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+2)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{4n^2} = \frac{1}{4} < 1.$$

Comme $l < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ est convergente.

3) On utilise la règle de Riemann pour cette série.

On a le terme général $u_n = e^{-\sqrt{n}} > 0$ pour $n \geq 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = \lim_{n\to+\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} = 0$, alors il existe $M > 0$ tel que $n^2 e^{-\sqrt{n}} \leq M$ pour tout $n \geq 0$. Ce qu'implique que

$$e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{M}{n^2} \text{ pour tout } n \geq 0.$$

Alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}}$ est convergente.

==========================================================

**Exercice 2 (5 points) :** **a)** *2 pts.* **b)** *3 pts.*

**a)** Étudier la convergence et la convergence absolue de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

**b)** Calculer les sommes partielles $S_{2n} = \displaystyle\sum_{k=2}^{2n} \operatorname{Log}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$ et $S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=2}^{2n+1} \operatorname{Log}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right)$,

puis en déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \operatorname{Log}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

==========================================================

**Réponse.**

**a)** Le terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.

- Si $\alpha \leq 0$, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ n'existe pas car

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n)^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad \alpha < 0, \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = 0, \end{cases}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{(2n+1)^\alpha} = \begin{cases} -\infty & \text{si} \quad \alpha < 0, \\ -1 & \text{si} \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Alors, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha \leq 0$ est divergente, donc à priori n'est pas absolument convergente.

- Si $\alpha > 1$, on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ qu'est une série de Riemann convergente. Alors, la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.

- Si $0 < \alpha \leq 1$, La suite $(|u_n|)_n = \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0. Donc d'après le critère de Leibniz la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente. Comme elle n'est pas absolument convergente, alors elle est semi convergente.

**b)** Les sommes partielles sont

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=2}^{2n} \operatorname{Log}\left(1+\frac{(-1)^k}{k}\right) \\ &= \operatorname{Log}\left(1+\tfrac{1}{2}\right) + \operatorname{Log}\left(1-\tfrac{1}{3}\right) + \operatorname{Log}\left(1+\tfrac{1}{4}\right) + \operatorname{Log}\left(1-\tfrac{1}{5}\right) + ... + \operatorname{Log}\left(1+\tfrac{1}{2n}\right) \\ &= \operatorname{Log}\tfrac{3}{2} + \operatorname{Log}\tfrac{2}{3} + \operatorname{Log}\tfrac{5}{4} + \operatorname{Log}\tfrac{4}{5} + ... + \operatorname{Log}\tfrac{2n+1}{2n} \\ &= \operatorname{Log}\left(\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{5}{4}\cdot\tfrac{4}{5}\cdot ... \cdot\tfrac{2n+1}{2n}\right) = \operatorname{Log}\tfrac{2n+1}{2n} \end{aligned}$$

et

$$S_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n+1} \text{Log}\left(1 + \tfrac{(-1)^k}{k}\right)$$
$$= \text{Log}\left(1 + \tfrac{1}{2}\right) + \text{Log}\left(1 - \tfrac{1}{3}\right) + ... + \text{Log}\left(1 - \tfrac{1}{2n-1}\right) + \text{Log}\left(1 + \tfrac{1}{2n}\right) + \text{Log}\left(1 - \tfrac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \text{Log}\,\tfrac{3}{2} + \text{Log}\,\tfrac{2}{3} + +... + \text{Log}\,\tfrac{2n+1}{2n} + \text{Log}\,\tfrac{2n}{2n+1}$$
$$= \text{Log}\left(\tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot ... \cdot \tfrac{2n+1}{2n} \cdot \tfrac{2n}{2n+1}\right) = \text{Log}\,1 = 0.$$

Alors,

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \text{Log}\left(1 + \tfrac{(-1)^k}{k}\right) = \begin{cases} \text{Log}\,\frac{2n+1}{2n} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 0$. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \text{Log}\left(1 + \tfrac{(-1)^n}{n}\right)$ est convergente et sa somme $S = 0$.

==================================================

**Exercice 3 (5 points) : a)** ***1,5. pts*** **b)** ***2 pts.*** **c)** ***1,5 pts.***

**a)** Calculer le rayon de convergence $R$ de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1)\, x^n$ et étudier sa convergence en $x = \pm R$.

**b)** Calculer les sommes $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n x^n$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$. *Indication*. Noter que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}, x \in \left]-R, R\right[$.

**c)** En déduire la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1)\, x^{2n}$.

==================================================

**Réponse.**

**a)** On a $a_n = n^2 + n + 1$ et

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{n^2 + n + 1}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 3n + 3}{n^2 + n + 1} = 1,$$

donc $R = \dfrac{1}{1} = 1$.

Pour $x = R = 1$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1)\, x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1)$ qu'est divergente car

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^2 + n + 1\right) = +\infty \neq 0.$$

Pour $x = -R = -1$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1)\, x^n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1)\,(-1)^n$ qu'est divergente car

$$\lim_{n\to+\infty} \left(n^2 + n + 1\right)(-1)^n \;\; \text{n'existe pas.}$$

**b)** On a $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$. Par dérivation on a $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$. En multipliant par $x$, on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}$. Dérivant à nouveau, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$. Une autre fois on multiplie par $x$ et on obtient $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$.

**c)** On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+n+1\right) x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \frac{x+x^2}{(1-x)^3} + \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x} = \frac{1+x^2}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

Par suit, en remplaçant $x$ par $x^2$, on déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+n+1\right) x^{2n} = \frac{1+x^4}{\left(1-x^2\right)^3}.$$

==================================================

**Exercice 4 (5 points)** : **a)** ***1 pt.*** **b)** ***2 pts.*** **c)** ***1 pt.*** **d)** ***1 pt.***

Soit $f$ la fonction $2\pi$-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in \left]-\pi, 0\right], \\ x & \text{si} \quad x \in \left]0, \pi\right]. \end{cases}$$

**a)** Tracer le graphe de la fonction $f$ pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

**b)** Calculer les coefficients de Fourier $a_n$ et $b_n$ puis en déduire $a_{2n}, a_{2n+1}, b_{2n}$ et $b_{2n+1}$.

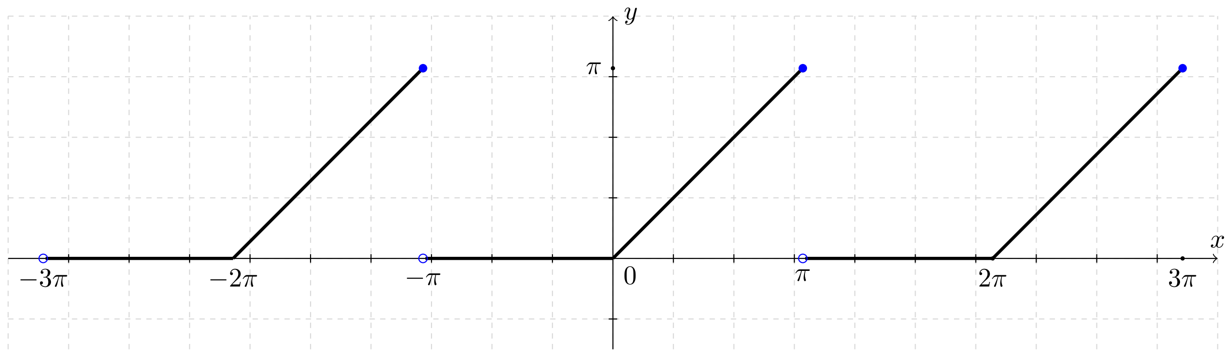
**c)** Écrire la série de Fourier $\sigma f$ associée à $f$ et étudier sa convergence en $x = 0, \dfrac{\pi}{2}, \pi$.

**d)** En déduire les sommes des séries numériques $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

==================================================

**Réponse.**

**a)**



**b)** La fonction $2\pi$-périodique $f$ n'est ni paire ni impaire.

Alors les coefficients de Fourier sont donnés par

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\left(\frac{\sin(nx)}{n}\right)' dx$$

$$= \left[\frac{1}{\pi}x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n}dx = 0 - 0 - \left[-\frac{1}{\pi}\frac{\cos(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\cos(n\pi)-1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}$$

et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)' dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\pi}x\frac{\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{-\cos(nx)}{n}\right)dx = -\frac{\cos(n\pi)}{n} - 0 + \left[\frac{1}{\pi}\frac{\sin(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

On remarque que $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = \dfrac{-2}{\pi(2n+1)^2}$, $b_{2n} = \dfrac{-1}{2n}$ et $b_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$.

**c)** La série de Fourier $\sigma f$ associée à $f$ est

$$\sigma f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos(nx) + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)\right].$$

Le fonction $f$ est continue en 0 et en $\frac{\pi}{2}$, seul point de discontinuité est $x = \pi$ et on a

$$f(\pi-0) = \pi,\ f(\pi+0) = 0.$$

La fonction $f$ est dérivable en $\frac{\pi}{2}$. En 0 on a $f'_d(0) = 1$, $f'_g(0) = 0$, et en $\pi$ :

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi-0)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^-}\frac{x-\pi}{x-\pi} = 1 \text{ et } \lim_{x\to\pi^+}\frac{f(x)-f(\pi+0)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{0-0}{x-\pi} = 0.$$

**d)** La fonction $f$ vérifie les conditions de Dirichlet en 0, $\frac{\pi}{2}$ et $\pi$, donc sa série de Fourier associée est convergente en ces points. Pour $x = 0$ on a

$$\sigma f(0) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2} = 0.$$

Comme $(-1)^{2n} - 1 = 0$, il vient

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-2}{\pi (2n+1)^2} = 0.$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Pour $x = \frac{\pi}{2}$ on a

$$\sigma f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \right] = \frac{\pi}{2}.$$

Comme $\cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(2n\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $(-1)^{2n} - 1 = 0$ et $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$, il vient

$$\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n+1} (-1)^n = \frac{\pi}{2}.$$

D'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$