

Nom : Matricule :

Prénom : Groupe :

=====

Exercice 1 (5 points) : Quelle est la nature des séries numériques suivantes :

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \quad 2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\sqrt{n}}$$

=====

Réponse.

=====

Exercice 2 (5 points) :

a) Étudier la convergence et la convergence absolue de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

b) Calculer les sommes partielles $S_{2n} = \sum_{k=2}^{2n} \text{Log} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k} \right)$ et $S_{2n+1} = \sum_{k=2}^{2n+1} \text{Log} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k} \right)$,

puis en déduire la nature de la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \text{Log} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)$.

=====

Réponse.

=====

Exercice 3 (5 points) :

a) Calculer le rayon de convergence R de $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1) x^n$ et étudier sa convergence en $x = \pm R$.

b) Calculer les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$. *Indication.* Noter que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $x \in]-R, R[$.

c) En déduire la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + n + 1) x^{2n}$.

=====

Réponse.

=====

Exercice 4 (5 points) : Soit f la fonction 2π -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\pi, 0], \\ 1 & \text{si } x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

- a) Tracer le graphe de la fonction f pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.
- b) Calculer les coefficients de Fourier a_n et b_n puis en déduire a_{2n} , a_{2n+1} , b_{2n} et b_{2n+1} .
- c) Écrire la série de Fourier σf associée à f et étudier sa convergence en $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$.
- d) En déduire la somme de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
- e) En appliquant l'égalité de Parseval $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$,

calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

=====

Réponse.