

Nom : Matricule :

Prénom : Groupe :

Exercice 1 (5 points) : Quelle est la nature des séries numériques suivantes :

$$1) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{-n} + 1} \quad 2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} \quad 3) \sum_{n=0}^{+\infty} n e^{-n}$$

Réponse.

=====

Exercice 2 (5 points) :

a) Calculer le rayon de convergence R de $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 1) 2^{n+1} x^n$ et étudier sa convergence en $x = \pm R$.

b) On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 1) 2^{n+1} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $x \in]-R, R[$.

Montrer que $f(x) = 8x^2 g''(2x) + 4x g'(2x) + 2g(2x)$.

c) En déduire la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} (n^2 + 1) 2^{n+1} x^n$. *Indication.* Noter que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

=====

Réponse.

=====

Exercice 3 (5 points) : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x \sin x$.

a) Montrer que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f est $f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$, $n \geq 1$.

Indication. Noter que $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) En déduire le développement en séries entières de f et donner son domaine de convergence.

=====

Réponse.

=====

Exercice 4 (5 points) : Soit f la fonction 2π -périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \in]-\pi, 0], \\ 2 & \text{si } x \in]0, \pi]. \end{cases}$$

- a) Tracer le graphe de la fonction f pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.
- b) Écrire la série de Fourier σf associée à f et étudier sa convergence sur $] -\pi, \pi[$.
- c) En déduire la somme de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.
- d) En appliquant l'égalité de Parseval $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
- =====

Réponse.