U.S.T.H.B. 2012-2013 Semestre 1 **Math 3 : Séries**

Faculté de Mathématiques **$2^{\text{ème}}$ Lic, ST-GP, Section F**

Examen final - 13 janvier 2013. Durée : 90 minutes

Nom :.. **Matricule :**..

Prénom :.. **Groupe :**..

==

Exercice 1 (5 points) : Quelle est la nature des séries numériques suivantes :

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{-n}+1} \qquad 2)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^n}{n!} \qquad 3)\ \sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-n}$$

==

Réponse.

1) On a $u_n = \dfrac{1}{2^{-n}+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2^{-n}+1} = 1 \neq 0$. La condition nécessaire de convergence $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ pour les séries numériques n'est pas satisfaite.

Alors la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^{-n}+1}$ est divergente (grossièrement).

2) Le terme général $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$ est strictement positif. En utilisant le critère de D'Alembert

$$l = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(u_{n+1}\cdot\frac{1}{u_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)\,n!}\cdot\frac{n!}{n^n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \simeq 2,72 > 1.$$

Comme $l > 1$, alors la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{n^n}{n!}$ est divergente.

3) Le terme général $u_n = ne^{-n} > 0$ pour $n \geq 1$. En appliquant le critère de D'Alembert

$$l = \lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\,e^{-(n+1)}}{ne^{-n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\,e^{-1}}{n} = e^{-1} \simeq 0,37 < 1.$$

Comme $l < 1$, alors la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} ne^{-n}$ est convergente.

==

Exercice 2 (5 points) :

a) Calculer le rayon de convergence R de $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)\,2^{n+1}x^n$ et étudier sa convergence en $x=\pm R$.

b) On pose $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)\,2^{n+1}x^n$ et $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$, $x\in\,]-R,R[$.

Montrer que $f(x)=8x^2g''(2x)+4xg'(2x)+2g(2x)$.

c) En déduire la somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)\,2^{n+1}x^n$. *Indication*. Noter que $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$.

==

Réponse.

a) On a $a_n=(n^2+1)\,2^{n+1}$ et

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{\left((n+1)^2+1\right)2^{n+1+1}}{(n^2+1)\,2^{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n^2+2n+2)\,2}{(n^2+1)}=2,$$

donc $R=\dfrac{1}{2}$.

Pour $x=R=\dfrac{1}{2}$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)\,2^{n+1}x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}2\,(n^2+1)$ qu'est divergente car

$$\lim_{n\to+\infty}2\left(n^2+1\right)=+\infty\neq 0.$$

Pour $x=-R=-\dfrac{1}{2}$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(n^2+1)\,2^{n+1}x^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}2\,(n^2+1)\,(-1)^n$ qu'est divergente car

$$\lim_{n\to+\infty}2\left(n^2+1\right)(-1)^n \text{ n'existe pas.}$$

b) On a $g'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$, $g''(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}n\,(n-1)\,x^{n-2}$. Alors

$$\begin{aligned}8x^2g''(2x)+4xg'(2x)+2g(2x)&=8x^2\sum_{n=2}^{+\infty}n\,(n-1)\,(2x)^{n-2}+4x\sum_{n=1}^{+\infty}n\,(2x)^{n-1}+2\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}n\,(n-1)\,2^{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}n2^{n+1}x^n+\sum_{n=0}^{+\infty}2^{n+1}x^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[n\,(n-1)\,2^{n+1}x^n+n2^{n+1}x^n+2^{n+1}x^n\right].\end{aligned}$$

En factorisant $2^{n+1}x^n$, il vient

$$\begin{aligned}8x^2g''(2x)+4xg'(2x)+2g(2x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left[n\,(n-1)+n+1\right]2^{n+1}x^n\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+1\right)2^{n+1}x^n=f(x).\end{aligned}$$

c) Comme $f(x) = 8x^2 g''(2x) + 4xg'(2x) + 2g(2x)$ et $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ alors,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+1\right) 2^{n+1} x^n = f(x) &= 8x^2 \left(\frac{1}{1-x}\right)'' (2x) + 4x \left(\frac{1}{1-x}\right)' (2x) + \frac{2}{1-2x} \\
&= \\
&= 8x^2 \frac{2}{(1-2x)^3} + 4x \frac{1}{(1-2x)^2} + \frac{2}{1-2x} \\
&= \frac{16x^2 + 4x(1-2x) + 2(1-2x)^2}{(1-2x)^3} \\
&= \frac{16x^2 - 4x + 2}{(1-x)^3}.
\end{aligned}$$

==

<u>**Exercice 3 (5 points)**</u> **:** On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^x \sin x$.

a) Montrer que la dérivée $n^{ième}$ de f est $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$, $n \geq 1$.

<u>Indication</u>. Noter que $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

b) En déduire le développement en séries entières de f et donner son domaine de convergence.

==

Réponse.

a) Montrons par récurrence que $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$, $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, on a $f'(x) = (e^x \sin x)' = (\cos x + \sin x) e^x = \sqrt{2} e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Supposons que $f^{(k)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^k e^x \sin\left(x + k\frac{\pi}{4}\right)$, $k = 1, 2, ...n$. On a alors

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) &= \left(\left(\sqrt{2}\right)^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)\right)' \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \left[\cos\left(x + n\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \sqrt{2} \sin\left(x + n\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^{n+1} e^x \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence $f^{(n)}(x) = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \sin\left(x + n\frac{\pi}{4}\right)$, $n \geq 1$.

b) En utilisant la formule de Taylor $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$, il vient

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n e^0 \sin\left(0 + n\frac{\pi}{4}\right)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)}{n!} x^n.$$

==

Exercice 4 (5 points) : Soit f la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \in \left]-\pi, 0\right], \\ 2 & \text{si} \quad x \in \left]0, \pi\right]. \end{cases}$$

a) Tracer le graphe de la fonction f pour $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

b) Écrire la série de Fourier σf associée à f et étudier sa convergence sur $\left]-\pi, \pi\right[$.

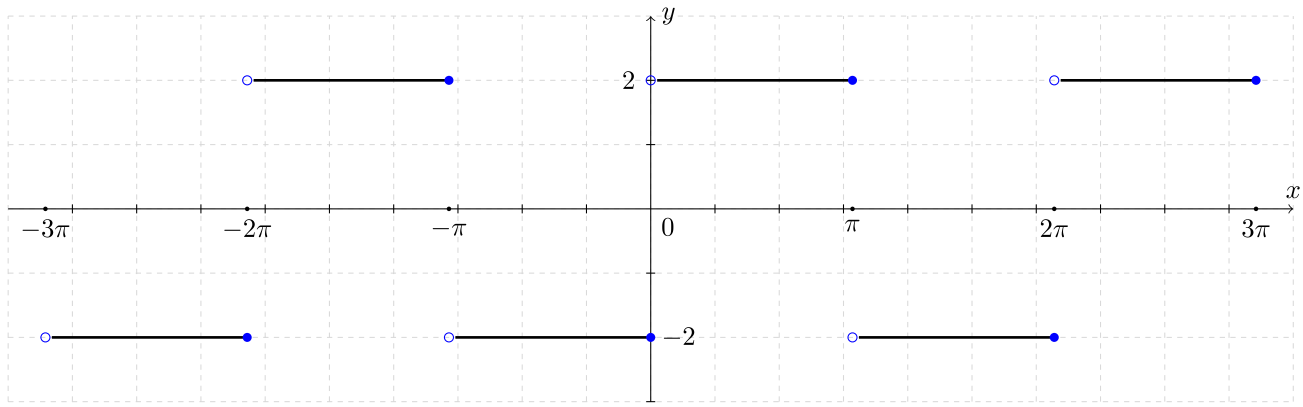
c) En déduire la somme de la série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

d) En appliquant l'égalité de Parseval $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx$, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

==

Réponse.

a)



b) La fonction 2π-périodique f est impaire car $f(-x) = -2 = -f(x)$, $x \in \left]0, \pi\right[$.

Alors les coefficients de Fourier sont donnés par

$$a_0 = a_n = 0, \ \ n \geq 1$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin(nx) \, dx = \left[\frac{-4}{\pi n} \cos(nx) \right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{4(1 - \cos(n\pi))}{\pi n} = \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi n}.$$

On remarque que $b_{2n} = 0$ et $b_{2n+1} = \frac{8}{\pi(2n+1)}$. La série de Fourier σf associée à f est

$$\sigma f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)] = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} b_{2n} \sin(2nx) + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1} \sin((2n+1)x).$$

Comme $b_{2n} = 0$, alors

$$\sigma f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{2n+1} \sin((2n+1)x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x).$$

Le seul point de discontinuité sur $]-\pi, \pi[$ est $x = 0$ et on a $f(0+0) = 2$, $f(0-0) = -2$.

La fonction f est partout dérivable sur $]-\pi, \pi[$ sauf en $x = 0$. En ce point on a :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0-0)}{x - 0} = 0 \text{ et } \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0+0)}{x - 0} = 0.$$

La fonction f vérifie les conditions de Dirichlet, donc sa série de Fourier associée est convergente. De plus

$$\sigma f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[, \\ 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ 2 & \text{si} \quad x \in]0, \pi[. \end{cases}$$

c) Pour $x = \frac{\pi}{2}$, on a $\sigma f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi(2n+1)} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = 2.$
Comme $\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n$, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8(-1)^n}{\pi(2n+1)} = 2.$$

On en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

d) En appliquant l'égalité de Parseval $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx$, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (b_{2n+1})^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 4 dx = \frac{1}{\pi}(8\pi) = 8.$$

en remplaçant b_{2n+1} par sa valeur, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{64}{\pi^2 (2n+1)^2} = 8,$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$