Série d'exercices N° 1 : Séries numériques

Exercice 1 : Soient les deux suites (u_n) et (v_n), on suppose que pour tout n dans $\mathbb{N}$

$$u_n = v_{n+1} - v_n.$$

a) Montrer que la suite (v_n) et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sont de même nature.

b) *Application :* Montrer que la série suivante est convergente et calculer sa somme.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 2 : Étudier la convergence des séries numériques suivantes en calculant leur somme.

$$1)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} \quad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} \quad 3)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+2)} \quad 4)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} \quad 5)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Log}\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Exercice 3 : Établir la divergence des séries suivantes :

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \cos\frac{1}{\sqrt{n}} \quad 2)\ \sum_{n=0}^{+\infty} n! \quad 3)\ \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \quad 4)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right).$$

Exercice 4 : Trouver la nature de la série $\sum u_n$ qui a pour terme général u_n en utilisant le critère indiqué.

a) *Critère de comparaison* 1) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ 2) $u_n = \sin\dfrac{1}{n^\alpha}, \alpha > 0$ 3) $u_n = e^{\frac{1}{n}} - 1$ 4) $u_n = \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.

b) *Critère de D'Alembert* 1) $u_n = \dfrac{1 \times 3 \times \ldots (2n-1)}{n! 3^n}$ 2) $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$ 3) $u_n = n^3 \sin\dfrac{\pi}{3^n}$ 4) $u_n = \dfrac{a^n}{n^n}, a > 0$.

c) *Critère de Cauchy* 1) $u_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 2) $u_n = 2^{-n}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ 3) $u_n = \left(\dfrac{n+1}{2n-1}\right)^{2n} a^n, a > 0$.

Exercice 5 : Étudier les séries numériques suivantes :

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^\alpha}, a > 0, \alpha \in \mathbb{R} \quad 2)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n + n}{a^n}, a > 0 \quad 3)\ \sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha e^{-\sqrt{n}}, \alpha \in \mathbb{R} \quad 4)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^4+n}$$

$$5)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-n^2}, a > 0 \quad 6)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad 7)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Log} n}{n^\alpha}, \alpha > 0 \quad 8)\ \sum_{n=1}^{+\infty} a^{\operatorname{Log} n}, a > 0.$$

Exercice 6 : Étudier la convergence absolue et la semi-convergence des séries suivantes :

$$1)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\alpha n)}{n^2}, \alpha \in \mathbb{R} \quad 2)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + \operatorname{Log} n} \quad 3)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{n} \quad 4)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right).$$